

ANALISI MATEMATICA II

15 SETTEMBRE 2006– PROVA SCRITTA

Svolgere obbligatoriamente gli esercizi 1 e 2, ed un altro (soltanto!) a scelta tra i rimanenti esercizi.

Esercizio 1. Determinare il valore dei parametri $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ affinché la funzione

$$f_{\lambda, \mu}(x, y) = \lambda x^2 - \mu y^2 - 4x + \lambda y$$

abbia un punto critico in $(-1, 3)$. Determinare poi la natura locale di tale punto critico.

Esercizio 2. Sia $y_{a,b}(x)$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la soluzione del seguente problema.

$$\begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = a, \\ y(\frac{\pi}{2}) = b. \end{cases}$$

Sapendo che $a^2 + b^2 = 1$, determinare per quali valori di a e b la funzione

$$(a, b) \mapsto \int_0^\pi |y_{a,b}(x)| dx$$

assume il suo massimo. Quanto vale questo massimo?

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} |x| dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \geq 0\}$.

Esercizio 4. Verificare che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (2xy - y^3 + 3x)dx + (x^2 - 3xy^2 + 3y)dy$$

è esatta. Servirsi di questo fatto per calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma (2xy - y^3)dx + (x^2 - 3xy^2 + 2y)dy$$

dove γ è il bordo del quadrato di vertici $(0, 0)$ e $(-1, -1)$ avente lati paralleli agli assi, percorso in senso antiorario.

Suggerimento: usare la proprietà additiva degli integrali curvilinei.

Esercizio 5. Si consideri la funzione

$$g(x, y) = 2x^2 - y^2 - 4x$$

e si determini l'insieme di livello $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = -2\}$. Calcolare il piano tangente al grafico di g in ogni $(\xi, \eta) \in C$. Determinare, infine, se esiste, per quale dei punti appena considerati il piano tangente è parallelo al piano xy .

Durata della prova: 90 minuti — Giustificare i passaggi effettuati