

## ANALISI MATEMATICA II

1 SETTEMBRE 2006– PROVA SCRITTA

**Svolgere gli esercizi 1 e 2 ed un altro tra i rimanenti esercizi.**

**Esercizio 1.** Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \ln(|xy| - |x|)$$

e calcolare, se esiste, il piano tangente al grafico nel punto corrispondente a  $(x, y) = (2, 2)$ .

**Esercizio 2.** Sia  $y_{a,b}(x)$ , per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ , la soluzione del seguente problema.

$$\begin{cases} y'' = -y', \\ y(0) = a, \\ y(1) = b. \end{cases}$$

Sapendo che  $a^2 + b^2 \leq 1$ , determinare per quali valori di  $a$  e  $b$  la funzione  $(a, b) \mapsto y_{a,b}(\frac{1}{2})$  assume il suo massimo. Quanto vale questo massimo?

**Esercizio 3.** Calcolare il centro di massa di una lamina piana avente la forma di un semidisco di raggio 3, centrato nell'origine e contenuto nel semipiano  $y \geq 0$ , la cui densità varia secondo la legge

$$\rho(x, y) = \sqrt{9 - y^2 - x^2}.$$

**Esercizio 4.** Verificare che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (2xy - y^3 + 3x)dx + (x^2 - 3xy^2 + 3y)dy$$

è esatta. Servirsi di questo fatto per calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} (2xy - y^3)dx + (x^2 - 3xy^2 + 2y)dy$$

dove  $\gamma$  è il bordo del quadrato di vertici  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$  avente lati paralleli agli assi, percorso in senso orario.

**Suggerimento:** usare la proprietà additiva degli integrali curvilinei.

**Esercizio 5.** Determinare per quali valori dei parametri  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  il seguente campo vettoriale è conservativo

$$w(x, y, z) = (x^2y + \beta z, \alpha x^3 - \beta z, \alpha y + \beta x).$$

Calcolare poi, per tali valori di  $\alpha$  e  $\beta$ , il lavoro del campo vettoriale per lo spostamento di un punto da  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 0, 0)$ .

**Durata della prova: 120 minuti — Giustificare i passaggi effettuati**