Analisi Matematica II

25 novembre 2006– Prova scritta

Svolgere obbligatoriamente gli esercizi 1 e 2, ed un altro (soltanto!) a scelta tra i rimanenti esercizi.

Esercizio 1. Determinare l'immagine della funzione

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \, , \, y \leq \sqrt{2}. \right\}$$

Esercizio 2. Sia $y_{a,b}(x)$, per ogni $(a,b) \in Q = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a+b=1\}$, la soluzione del seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'' = -a^{-2}y', \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = b^2. \end{cases}$$

Per quali valori di $(a,b) \in Q$ la funzione $(a,b) \mapsto y_{a,b}(a^2)$ assume il suo minimo?

Esercizio 3. Calcolare il valore massimo ottenuto dal seguente integrale al variare di $a \in [0, 1/\sqrt{2}]$,

$$\int_\gamma a|x| \, \mathrm{d}s$$

dove γ è data da

$$\gamma(t) = \big(at, at\sin(t), at\cos(t)\big), \qquad -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \leq t \leq \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \; .$$

Esercizio 4. Considerato il campo di forze dipendente dal parametro $\beta \in \mathbb{R}$:

$$F(x,y,z) = \big(2\beta x + \beta^2 y - 3\beta z, \beta^2 x + \beta y, 3\beta x\big),$$

determinare il valore del parametro β affinché sia minimo il lavoro del campo lungo la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma(t) = \big(t^3, t - t^2, t^2\big).$$

Quale è il valore di tale minimo?

Esercizio 5. Calcolare il massimo della funzione

$$h(z) = \iint_T \frac{y}{z^2+1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

dove T è il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(0,2z)$ e $(1,0)$, per $z \in \mathbb{R}$.

Durata della prova: 90 minuti — Giustificare i passaggi effettuati