

ANALISI MATEMATICA II

14 APRILE 2006– PROVA SCRITTA

Svolgere i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Determinare l'immagine della funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

definita sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 1 - x\}.$$

Esercizio 2. Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$ la soluzione $y_a(x)$ del seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' = (y^2 - y)x, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Per quali valori di a la funzione $y_a(x)$ è limitata?

Esercizio 3. Calcolare

$$\int_{\gamma} |x| \, ds$$

dove γ è data da

$$\gamma(t) = (t, t \sin t, t \cos t), \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi,$$

Esercizio 4. Verificare che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = 2xydx + x^2dy$$

è esatta. Servirsi di questo fatto per calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} 2xydx + (x^2 + x)dy$$

dove γ è il bordo del quadrato di vertici $(0, 0)$ e $(1, 1)$ avente lati paralleli agli assi, percorso in senso orario.

Suggerimento: usare la proprietà additiva degli integrali curvilinei.

Esercizio 5. Calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

dove D è la parte del semidisco

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

compresa tra le rette di equazione $x = y$ e $x = -y$.

Durata della prova: 120 minuti — Giustificare i passaggi effettuati