

ANALISI MATEMATICA II

28 GIUGNO 2005– PROVA SCRITTA

Svolgere al più tre dei seguenti esercizi.

Esercizio 1. Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x, y) = (|xy| + x^2)$$

al cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 4$.

Esercizio 2. Determinare, se esiste, una soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = -y - e^x - \sin x, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3. Stabilire se il campo vettoriale

$$(x, y) \mapsto (2y^2e^{xy^2}, 4xye^{xy^2})$$

è conservativo. Calcolare poi il seguente integrale curvilineo

$$\oint_{\partial D} (y^2e^{xy^2} + 1)dx + (2xye^{xy^2} + xy)dy$$

dove ∂D è il bordo (percorso una sola volta, in senso positivo) dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq -x^2 + x\}$$

Suggerimento: Usare la proprietà additiva degli integrali.

Esercizio 4. Calcolare il centro di massa di una lamina piana avente la forma di un semidisco di raggio 4, centrato nell'origine e contenuto nel semipiano $y \geq 0$, la cui densità varia secondo la legge $\rho(x, y) = 1 + y^2 + x^2$.

Durata della prova: 90 minuti — Giustificare i passaggi effettuati