Facoltà di Ingegneria - CDL in Ingegneria per l'Ambiente e le Risorse

Analisi Matematica II

19 aprile 2005 – Prima prova in itinere – Compito A.

Risolvere al più un esercizio per ognuno dei seguenti gruppi di esercizi

Gruppo A

Esercizio A1. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{e^x}$$

definita in $\mathbb{R}^2$.

1. Calcolare per quali punti (x,y) si ha $\nabla f(x,y) = 0$.
2. Posto
$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$.
3. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,1,1)$.

Esercizio A2. Si consideri, per ogni $a \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f_a(x,y) = ax^3 - 2y^2 - ax + 2a^2y.$$

Dopo avere verificato che il punto $(1,0)$ appartiene all'insieme

$$L_0(f_a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_a(x,y) = 0\}$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare per quali valori di $a \neq 0$ (se esistono), $L_0(f_a)$ risulta perpendicolare alla retta di equazione $x - y = 1$ nel punto $(1,0)$.

Gruppo B

Esercizio B1. Stabilire l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{e^n \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{n^3} x^n$$

Esercizio B2. Stabilire il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln\big(\ln(n+1)\big)} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+\sin(n^2-3)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{n^{-4}+1}$$

Gruppo C

Esercizio C1. Determinare una soluzione, se esiste, del seguente problema al contorno:

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \sin(x), \\ y(0) = y(2\pi) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio C2. Determinare una soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -(x+1)y^2(x), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

specificando il dominio della soluzione trovata.

Durata della prova: 1h 30'. Spiegare ogni passaggio!