Facoltà di Ingegneria - CDL in Ingegneria per l'Ambiente e le Risorse

Analisi Matematica II

15 febbraio 2005– Prova scritta

Svolgere al più tre dei seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2xy^2, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

specificando per ogni valore di $a \neq 0$ il dominio della soluzione trovata.

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il campo vettoriale v dato da $v(x,y,z) = \vec{i} + (1-z)\vec{j}$. Si consideri inoltre, per ogni $\alpha \in [0, \pi/2]$ la superificie Σ parametrizzata da

$$\phi_\alpha(u,v) = \big(u, v\cos\alpha, v\sin\alpha\big) \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

Si determini, per ogni $\alpha \in [0, \pi/2]$ il valore assoluto del flusso di v attraverso Σ e si scelga $\alpha \in [0, \pi/2]$ affinché tale valore sia minimo.

Esercizio 3. Dati $r, R > 0$, determinare il baricentro di una lamina piana di densità costante descritta dall'insieme

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y,\ r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Sfruttare il risutato ottenuto per ottenere quello di una lamina simile, descritta dall'insieme

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x,\ r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D x^3 + 3xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x, \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1\}$, Utilizzando la trasformazione di coordinate

$$x(\rho, \theta) = \sqrt{3}\,\rho\cos\theta, \quad y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta.$$

Durata della prova: 90 minuti — Giustificare i passaggi effettuati