Facoltà di Ingegneria - CDL in Ingegneria per l'Ambiente e le Risorse

Analisi Matematica II

1 febbraio 2005– Prova scritta

Svolgere al più tre dei seguenti esercizi.

Esercizio 1. Determinare l'immagine della funzione

$$f(x,y) = 3x + \frac{y}{2}$$

definita nell'intersezione del semipiano $x \geq 0$ e dei seguenti due dischi:

$$\begin{aligned} D_1 =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2y \leq 4\} \\ D_2 =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 4\}. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Trovare l'area della parte di piano limitata dall'immagine della curva $\varphi(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$, e dalla semiretta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \leq 0\}$.

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_Q \frac{x^2 - y^2}{xy}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove Q è il quadrato di vertici $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ e $(1,0)$.
Suggerimento: Usare la trasformazione di coordinate

$$x(u,v) = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \quad y(u,v) = \frac{u}{2} - \frac{v}{2}.$$

Esercizio 4. Al variare dei parametri $\omega \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a. \end{cases}$$

1. Se ω è pari, per ogni valore di a il problema ammette una ed una sola soluzione. Determinarla.
2. Se ω è dispari, stabilire per quali valori di a esiste una soluzione e determinarla.

Durata della prova: 90 minuti — Giustificare i passaggi effettuati