

ANALISI MATEMATICA II

2 SETTEMBRE 2003 – PROVA SCRITTA

Svolgere 3 dei seguenti esercizi

Esercizio 1. Determinare i punti critici della seguente funzione:

$$f(x, y) = e^{-(x^2y - xy^2 - x + y)}$$

e stabilire, se possibile, la loro natura locale.

Suggerimento: usare la monotonia della funzione $t \mapsto e^{-t}$.

Esercizio 2. Determinare una soluzione del seguente problema al bordo:

$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = 3e^{2x} - x, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1 + 3e^2. \end{cases}$$

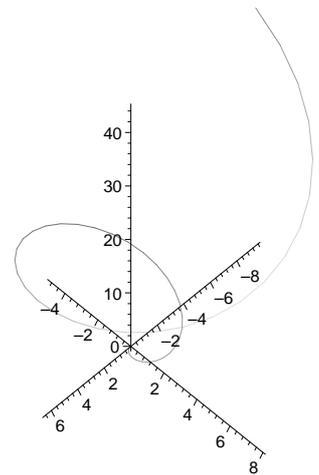
Esercizio 3. Calcolare la lunghezza della curva di \mathbb{R}^3 rappresentata parametricamente da:

$$t \mapsto \left(t \cos t, t \sin t, \frac{t^2}{2} \right), \quad t \in [0, 3\pi]$$

Suggerimento: ricordare che

$$\frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right)$$

è una primitiva di $\sqrt{1+x^2}$ ed applicare un cambiamento di variabile. La curva è rappresentata in figura.



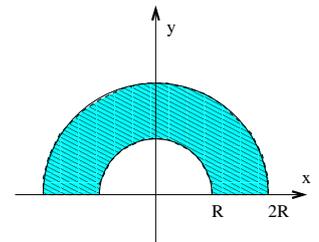
Esercizio 4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \iint_{D_R} \frac{y-x}{1+x^2+y^2} dx dy$$

dove

$$D_R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : R \leq x^2 + y^2 \leq 2R, y \geq 0 \right\}.$$

Suggerimento: usare una trasformazione in coordinate polari; D_R è rappresentato in figura.



Durata della prova: 2 ore. Giustificare tutte le risposte fornite!