

ANALISI MATEMATICA II

18 SETTEMBRE 2003– PROVA SCRITTA

Svolgere 3 dei seguenti esercizi

Esercizio 1. Determinare l'immagine della seguente funzione:

$$f(x, y) = \int_0^{x-xy} s^2 ds$$

definita sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$
Suggerimento: usare la monotonia della funzione $t \mapsto \int_0^t s^2 ds$.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\iint_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dS$$

dove S è il grafico della funzione $(x, y) \mapsto xy$ ristretta al rettangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 2)$.

Esercizio 3. Sia $F(x, y, z) = (3x^2y - y^2 + z, x^3 - 2xy, x)$ un campo vettoriale assegnato. Calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva parametrizzata da

$$t \mapsto \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{\pi} \right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Esercizio 4. Determinare, per ogni $a > 0$, la soluzione $y_a(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} ay''(x) - 2y(x) = -\cos(x) + \frac{2}{a+2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

dpodiché, se possibile, calcolare per ogni $x > 0$ il limite

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} y_a(x).$$

Durata della prova: 2 ore. Giustificare tutte le risposte fornite!