

ANALISI MATEMATICA II

4 AGOSTO 2003– PROVA SCRITTA

Svolgere 3 dei seguenti esercizi

Esercizio 1. Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x, y) = \frac{xy^2 - x^2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

al bordo del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

Esercizio 2. Determinare il dominio della funzione f definita da:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n(n+1)} (\sqrt{x})^n.$$

Esercizio 3. Calcolare la lunghezza della curva di \mathbb{R}^2 rappresentata parametricamente da:

$$t \mapsto (t \cos t, t \sin t), \quad t \in [0, \pi] \quad (\text{Spirale di Archimede})$$

Suggerimento: ricordare che

$$\frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right)$$

è una primitiva di $\sqrt{1+x^2}$.

Esercizio 4. Calcolare il centro di massa di una lamina piana avente la forma di un semidisco di raggio 3, centrato nell'origine e contenuto nel semipiano $y \geq 0$, la cui densità varia secondo la legge $\rho(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$.

Durata della prova: 2 ore. Giustificare tutte le risposte fornite!