

ANALISI MATEMATICA II

2 AGOSTO 2002– PROVA SCRITTA

Esercizio 1. Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

al bordo della corona circolare di raggio interno 1 e raggio esterno 4.

Esercizio 2. Sia $D_R \subset \mathbb{R}^2$ il disco di centro l'origine e raggio R . Poniamo

$$S_R = \{(x, y, z) : z = xy, (x, y) \in D_R\}.$$

Calcolare

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\text{Area}(S_R)}{[\text{Area}(D_R)]^{3/2}}.$$

Suggerimento: L'area $\text{Area}(S_R)$ è data dall'integrale superficiale $\iint_{S_R} 1 dS$. La superficie S_R non è altro che il grafico della funzione f ristretta a D_R .

Esercizio 3. Calcolare, per ogni $a > 0$ la soluzione $y_a(x)$ del seguente problema:

$$\begin{cases} ay''(x) - y(x) = \sin(x/a), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

dopodiché calcolare, per ogni $x \geq 0$ fissato,

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} y_a(x).$$

Esercizio 4. Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n e^n}{\sqrt{1+2^n}} x^{2n}.$$

Suggerimento: Usare la sostituzione $t = x^2$.