

ANALISI MATEMATICA II

18 LUGLIO 2002– PROVA SCRITTA

Esercizio 1. Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{|x| + |y| + 1}$$

al bordo dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

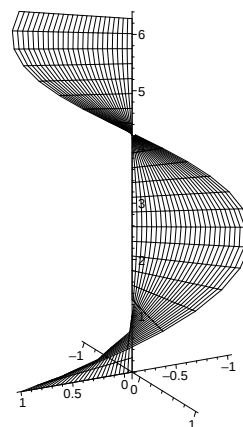
Esercizio 2. Calcolare, per ogni $\alpha \in [0, 1]$, l'area della superficie parametrizzata Σ_α data da

$$(u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, \alpha v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Suggerimento: L'area è data dall'integrale superficiale

$$\iint_{\Sigma_\alpha} 1 dS.$$

La superficie Σ_1 è rappresentata qui a fianco.



Esercizio 3. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x^2 + y^2(x)}{xy(x)}, \\ y(1) = 3, \end{cases}$$

specificando il dominio della soluzione trovata.

Suggerimento: Usare la sostituzione $y(x) = xz(x)$.

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale curvilineo (in $\mathbb{R}^2$):

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

dove $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ e γ è il segmento di estremi $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Giustificare attentamente i passaggi!