

## ANALISI MATEMATICA II

13 SETTEMBRE 2002– PROVA SCRITTA

**Esercizio 1.** Determinare l'immagine della funzione

$$f(x, y) = [x^2 - xy + y^2]^3 + 2$$

definita sulla corona circolare di raggio interno  $1/4$  e raggio esterno  $4$ .

*Suggerimento:* Osservare che la funzione  $t \mapsto t^3 + 2$  è monotona.

**Esercizio 2.** Considerare la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$$

orientata in modo tale che il versore normale abbia la terza componente positiva.

Calcolare il flusso di  $F(x, y, z) = (z, 0, x)$  attraverso  $\Sigma$ .

*Suggerimento:* Osservare che, posto  $\Phi(x, y, z) = (xy, x^2, yz)$ , si ha  $\text{rot } \Phi = F$ .

Allora l'esercizio si può risolvere usando il teorema di Stokes.

**Esercizio 3.** Siano  $x(t)$  e  $y(t)$  le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - x'(t) = 2, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y''(t) - y'(t) = 2, \\ y(0) = d, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Calcolare, in dipendenza da  $d > 0$ , per quale valore di  $t > 0$  si ha  $x(t) = y(t)$ .

**Esercizio 4.** Determinare se il campo vettoriale  $F(x, y, z) = (x^2, y, z^3)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , è conservativo. In caso affermativo, calcolare tra tutti i possibili potenziali del campo vettoriale quello che si annulla in  $(0, 0, 0)$ .