

ANALISI MATEMATICA II

12 NOVEMBRE 2001

- (1) Determinare i punti critici della seguente funzione

$$f(x, y) = \frac{x^4 - \frac{x^2}{2} + 1}{y^2 + 1}$$

e stabilire la loro natura locale.

Suggerimento: Osservare che la funzione f è della forma $f(x, y) = g(x)h(y)$ per cui, ad esempio $f_x(x, y) = g'(x)h(y)$, ecc...

- (2) Calcolare la massa totale della lamina piana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 + x^2\},$$

dotata di densità $\rho(x, y) = 1 + |xy|$.

Suggerimento: Usare la simmetria per semplificare i calcoli.

- (3) Dato il campo di forze in $\mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = (2xy + 2z, x^2 - z, 2x - y)$$

e calcolare il lavoro (del campo) compiuto per spostare un punto lungo l'arco di curva

$$\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t, \cos(\pi t), \sin(\pi t)).$$

Suggerimento: Controllare se il campo è conservativo. In caso affermativo, determinare una funzione potenziale oppure calcolare il lavoro utilizzando una curva più conveniente che connette il punto iniziale $\varphi(-1)$ con quello finale $\varphi(1)$.

- (4) Risolvere il seguente problema di Cauchy per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = xy - \alpha x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Sia $y_\alpha(x)$ la soluzione, determinare $\bar{\alpha}$ affinché $y_{\bar{\alpha}}(\sqrt{2}) = 1$.

Suggerimento: Per trovare $y_\alpha(x)$ considerare α come una costante ed applicare la formula usuale imponendo la condizione iniziale $y_\alpha(0) = 1$.