Facoltà di Ingegneria - CDU in Ingegneria dell'Ambiente e delle Risorse

Analisi Matematica II

6 Settembre 2001

(1) Determinare l'immagine della seguente funzione

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}},$$

definita sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Suggerimento: Osservare che la funzione $[0,+\infty) \ni s \mapsto \sqrt{s} \in [0,+\infty)$ *è monotona crescente*

(2) Calcolare la posizione del centro di massa della lamina piana

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 + (x-1)^2\},$$

dotata di densità costante.

Suggerimento: Usare la simmetria per semplificare i calcoli.

(3) Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \sin n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi + \pi/2)}{n}.$$

(4) Calcolare l'area del dominio D di $\mathbb{R}^2$ racchiuso dalla curva γ rappresentata parametricamente da:

$$\varphi(t) = (\cos t \sin t, \sin t) \quad t \in [0,\pi].$$

(Nota: γ è il sostegno della curva mentre φ è la parametrizzazione. Le due cose non devono essere confuse.)

Suggerimento: Per le formule di Gauss-Green, con l'orientazione data da φ, si ha:

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_\gamma \boldsymbol{\nu} \cdot \mathrm{d}\varphi,$$

dove $\boldsymbol{\nu}$ è il campo (definito lungo γ) dato da $\boldsymbol{\nu} : (x,y) \mapsto (-y,x)$.
La curva è rappresentata nella figura a fianco