

1. (3 punti) Dire se il campo vettoriale in \mathbb{R}^3 dato da

$$F(x, y, z) = (2e^{-y}x + z^3, 1 + e^{-y}x^2, 3z^2x),$$

è conservativo.

Risposta = Si [] No []

2. (5 punti) Calcolare la lunghezza della curva $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\phi(t) = (\frac{1}{4}e^{4t}, e^{2t}, \frac{2}{3}e^{3t})$.

(Suggerimento: usare l'identità $e^{8t} + 4e^{4t} + 4e^{6t} = [e^{2t}(e^{2t} + 2)]^2$.)

[Lunghezza =]

3. (5 punti) Sia $F(x, y) = (2xy, -2xy^2)$ un campo vettoriale in \mathbb{R}^2 . Se F rappresenta un campo di forza, calcolare il lavoro necessario a spostare un punto dalla posizione $(0, 0)$ a $(0, 2)$ lungo la spezzata composta dalle seguenti due curve di equazione cartesiana:

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad \text{per } 0 \geq x \geq -4 \\ x = y^2 - 4 & \quad \text{per } 0 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

(Suggerimento: Fare attenzione alla direzione con cui viene percorsa la spezzata. Se un arco della spezzata viene percorso nella direzione opposta a quella data dalla parametrizzazione allora l'integrale che rappresenta il lavoro deve cambiare di segno.)

[lavoro =]

4. (5 punti) Dire se il campo vettoriale $F(x, y) = (x^2, 2y + 1)$ è conservativo in \mathbb{R}^2 e trovarne un potenziale.

Utilizzare il potenziale appena trovato per calcolare il lavoro necessario a spostare un punto dalla posizione $(0, 0)$ a $(2, 4)$.

[potenziale =], [lavoro =]

5. (6 punti) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D x^2 \, dx \, dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \leq 4, xy \geq 3, y \geq 0\}$.

[L'integrale vale:]

6. (5 punti) Usando una trasformazione in coordinate polari, calcolare l'integrale doppio:

$$\iint_D x \, dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 \leq 0, y \geq 0\}$.

[L'integrale vale:]

7. (6 punti) Calcolare il centro di massa di una lamina piana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

avente densità $\rho(x, y) = 1 + |y|$.

(Suggerimento: la coordinata \bar{x} del centro di massa si può ottenere semplicemente con considerazioni di simmetria.)

[Centro di massa di D :]

N.B. Punteggio minimo: 16/35. Motivare tutte le risposte!