

1. **(3 punti)** Dire se il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ dato da

$$F(x, y, z) = (2e^{-y}x + z^2, e^{-y}x^2, 2zx),$$

è conservativo.

Risposta = Si [] No []

2. **(5 punti)** Calcolare la lunghezza della curva $\phi: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\phi(t) = (e^{2t}, \frac{1}{4}e^{4t}, \frac{2}{3}e^{3t})$.

(Suggerimento: usare l'identità $4e^{4t} + e^{8t} + 4e^{6t} = [e^{2t}(e^{2t} + 2)]^2$.)

[Lunghezza =]

3. **(5 punti)** Sia $F(x, y) = (3xy, 2y)$ un campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$. Se F rappresenta un campo di forza, calcolare il lavoro necessario a spostare un punto dalla posizione $(0, 0)$ a $(0, 4)$ lungo la spezzata composta dalle seguenti due curve di equazione cartesiana:

$$\begin{aligned} y &= 0 && \text{per } 0 \leq x \leq 2 \\ y &= 4 - x^2 && \text{per } 2 \geq x \geq 0 \end{aligned}$$

(Suggerimento: Fare attenzione alla direzione con cui viene percorsa la spezzata. Se un arco della spezzata viene percorso nella direzione opposta a quella data dalla parametrizzazione allora l'integrale che rappresenta il lavoro deve cambiare di segno.)

[lavoro =]

4. **(5 punti)** Dire se il campo vettoriale $F(x, y) = (1 + x^2, 2y)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$ e trovarne un potenziale.

Utilizzare il potenziale appena trovato per calcolare il lavoro necessario a spostare un punto dalla posizione $(0, 0)$ a $(4, 2)$.

[potenziale =], [lavoro =]

5. **(6 punti)** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D x \, dx \, dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \leq 3, xy \geq 2, y \geq 0\}$.

[L'integrale vale:]

6. **(5 punti)** Usando una trasformazione in coordinate polari, calcolare l'integrale doppio:

$$\iint_D x \, dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 \leq 0, x \geq 0\}$.

[L'integrale vale:]

7. **(6 punti)** Calcolare il centro di massa di una lamina piana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

avente densità $\rho(x, y) = 1 + |y|$.

(Suggerimento: la coordinata $\bar{x}$ del centro di massa si può ottenere semplicemente con considerazioni di simmetria.)

[Centro di massa di D :]

N.B. Punteggio minimo: 16/35. Motivare tutte le risposte!