Esercizio 1:

La disuguaglianza data è soddisfatta da tutti e soli gli $x \in (0, 1+\sqrt{3})$. Tra gli intervalli proposti solo il n. 1 è contenuto in $(0, 1+\sqrt{3})$.

Risp. corretta: (1)

Esercizio 2:

Si osservi che la funzione $t \mapsto \arctan(t)$ è monotona crescente con $\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$. Dal momento che il sup dell'insieme

$$\left\{ \frac{x^2-3x+2}{x^7-31x^5+2} \; : \; x^7-31x^5+2 \neq 0 \right\}$$

è $+\infty$ (perchè x^7-31x^5+2 attraversa sicuramente uno zero visto che il suo grado è dispari), si ha $\sup A = \frac{\pi}{2}$.

Risp. corretta (4).

Esercizio 3:

Con due opportune antirazionalizzazioni si ottiene

$$a_n = \frac{1}{2n\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^2},$$

pertanto $\{a_n\}$ è monotona decrescente; il suo sup (che è anche un max) si ottiene per $n=1$. Quindi

$$\sup\{a_n\} = a_1 = \frac{3}{2}+\sqrt{2}.$$

Risp. corretta (3).

Esercizio 4:

Ricordiamo che per $x \in (0,\pi)$ si ha $0 < \sin(x) < x$ e $\sin(\pi-x) = \sin x$ da cui $0 < \sin(\pi-x) < \pi - x$. Quindi, se $x_n \in (0,\pi)$,

a) $$x_{n+1} = x_n + \sin(x_n) > x_n$$

b) $$x_{n+1} = x_n + \sin(x_n) < x_n + \pi - x_n = \pi$$

Dal momento che $x_0 \in (0,\pi)$ otteniamo $x_n < x_{n+1} < \pi \quad \forall n = 1,2,\dots$

In altre parole, x_n è monotona crescente e limitata. Allora ammette limite, diciamo ℓ, e si avrà (visto che cresce) $\ell>0$. Per trovare il limite basta risolvere

$$\ell = \ell + \sin(\ell) \qquad \text{con} \qquad \ell \in (0,\pi]$$

Otteniamo $\ell=\pi$.

Risposta corretta (3).

Esercizio 5:

Usiamo gli sviluppi di McLaurin

$$e^x = 1+x+o(x)$$
$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$
$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

Allora

$$e^x + \frac{2\ln(\cos(x))}{x^2} = 1+x+o(x)+2x^{-2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$$
$$= x+o(x).$$

Notiamo che $|\sin(t)|\leq 1 \ \forall t$. Quindi

$$|f(x)| \leq \frac{|x+o(x)|}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}+o(\sqrt{x}) \quad \left(\text{Ricordando che } x>0\right)$$

da cui $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Risp. Corretta (4).

Esercizio 6:

Osserviamo che $0 < e^{-t^2} \leq 1 \ \forall t\in\mathbb{R}$. Inoltre $x_n>0$ implica $\int_0^{x_n} e^{-t^2}dt > 0$. Dunque, essendo $x_1 = 1>0$ otteniamo per ricorrenza $x_n>0$. Allora, $x_{n+1} = \int_0^{x_n} e^{-t^2}dt \leq \int_0^{x_n} 1\, dt = x_n$. Cioè $\{x_n\}$ è monotona decrescente e positiva, allora ammette limite, diciamo "ℓ", che è certamente non negativo. Per trovare ℓ risolviamo

$$\ell = \int_0^{\ell} e^{-t^2}dt.$$

Se fosse $\ell>0$ il teorema della media implicherebbe l'esistenza di $\xi\in(0,\ell)$ con $\ell = \ell e^{-\xi^2}$, ma questo può accadere solo se

$e^{-\xi^2}=1$, ovvero $\xi=0$, contro $\xi\in(0,l)$. Allora l'unica possibilità è $l=0$.

Risp. Corretta (4)

Esercizio 7:

Per la continuità di g si ha $\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x} g(t)\,dt=0$. Per il teorema dell'Hopital

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\big(g(x)+g(-x)\big)=2$$

Dunque f è continua. Calcoliamo

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}\int_{-h}^{h} g(t)\,dt-2\right)=\frac{1}{h^2}\left(\int_{-h}^{h} g(t)\,dt-2h\right)$$

Per l'Hopital,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left(\int_{-h}^{h} g(t)\,dt-2h\right)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)+g(-h)-2}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)-h}{h^2}=0$$

Quindi $f'(0)=0$.

Risp. corretta (2).

Esercizio 8:

$f_\alpha\in C^2(\mathbb{R})$, quindi basta andare a scegliere α t.c. $f''(x)\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. In altre parole basta discutere la disuguaglianza $f''(x)\geq 0$ cioè

$$e^x\geq 6\alpha x.$$

Per $\alpha<0$ $e^x-6\alpha x$ è negativa per $x<0$ e $|x|$ grande.

Per $\alpha=0$ $e^x\geq 0$ quindi si ha convessità

Per $\alpha>0$ vediamo quando $g(x):=\frac{e^x}{6x}\geq\alpha$. Basta scegliere α più piccola $(\leq)$ del minimo di g (se esiste) su $(0,+\infty)$. Infatti per $x\leq 0$ $e^x\geq 6\alpha x$ è sempre soddisfatta per $\alpha>0$. Il minimo di g esiste perché $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Si ha $g'(x)=\frac{e^x}{6x^2}(x-1)$

Quindi l'unico punto di minimo è $x=1$ e il valore minimo vale $g(1)=e/6$. Ne segue che f è convessa su $(-\infty,+\infty)$ sse $\alpha\in[0,e/6]$.

Risp. Corretta (3)

Esercizio 9:

Studiamo f. Calcolando f' si ottiene

$$f'(x) = 2x\left(e^{x^4} - e^{(x^2-1)^2}\right)$$

Dall'equazione $f'(x)=0$ si ottengono i punti critici $x = 0, \pm\sqrt{1/2}$
Studiando il segno di f' si vede che $\pm 1/\sqrt{2}$ sono punti di minimo relativo mentre $x=0$ è punto di massimo relativo.

Risposta corretta (3)

Esercizio 10:

Basta controllare quanti sono gli zeri in cui la derivata seconda cambia segno. Si ha

$$f''(x) = \frac{16x^3 + 8x^2 - 7x - 10}{(4x+1)^3}\, e^{-x}$$

è sufficiente studiare il segno del denominatore. Avendo grado dispari ha almeno uno zero in cui cambia segno. Poniamo

$$g(x) = 16x^3 + 8x^2 - 7x - 10$$

si ha $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e $g'(x) = 48x^2 + 16x - 7$

quindi $g'(x) = 0 \iff x \in \{-7/12, 1/4\}$. Uno di questi valori sarà un massimo relativo e l'altro un minimo relativo, $g(-7/12) = -\frac{177}{27}$, $g(1/4) = -11$ entrambi negativi. Allora g ha un solo zero e in questo cambia segno. Quindi c'è un solo flesso

Risp. corretta (3).

Esercizio 11:

La retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1)) = (1,0)$ ha equazione $y = \frac{1}{e}(x-1)$. L'unico tra i punti proposti a trovarsi sulla retta è $(0, -\frac{1}{e})$

Risp. corretta (4)