

Analisi Matematica (M–Z), Ingegneria Edile, II parte

Dr. Marco Spadini

Topologia di \mathbb{R}^n

Insiemi aperti, chiusi, punti di accumulazione, interno e chiusura di un insieme. Derivato di un insieme, frontiera, insiemi connessi. Distanze in \mathbb{R}^n e topologia indotta. Insiemi limitati.

Funzioni di n variabili a valori in \mathbb{R}^s

La nozione di funzione continua. Somme, prodotti, quozienti e composizioni di funzioni. Funzioni componenti, proiezioni e legame con la continuità. Limiti, teoremi sui limiti. Calcolo di limiti, esempi di difficoltà possibili. Un approccio con le coordinate polari. Punti di estremo assoluto e relativo di funzioni a valori reali. Teoremi Weierstrass per funzioni continue. Ricerca dell'immagine di una funzione con metodi elementari.

Calcolo differenziale in \mathbb{R}^n

Nozione di derivata direzionale e suo significato geometrico. Derivate parziali. Matrice Jacobiana di una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Caso $m = 1$: vettore gradiente e suo significato geometrico. Differenziabilità nel senso di Fréchet, differenziale primo. Funzioni C^1 e differenziabili. Calcolo della derivata direzionale. Legame tra queste nozioni. Teoremi sulle derivate. Funzione composta e derivazione. Derivabilità e continuità. Derivate seconde, matrice hessiana. Funzioni C^n . Differenziali primo e secondo. Massimi e minimi locali, criterio della matrice hessiana. Forme quadratiche definite positive o negative e indefinite. Massimi e minimi della funzione $x \mapsto \|Ax\|^2$, legame con autovalori, autovettori e valori singolari di A .

Funzioni implicite e applicazioni

Insiemi di livello di una funzione di più variabili, significato geometrico del gradiente. Ricerca dei punti di estremo di una funzione di due variabili

che si trovano sulla frontiera del dominio. Teorema del Dini (versione semplificata). Moltiplicatori di Lagrange. Punti di estremo interni al dominio. Teorema di Fermat.

Curve e superfici

Curve parametrizzate. Nozione di lunghezza. Curve equivalenti. Parametro d'arco. Integrale curvilineo di prima specie, massa e baricentro di una curva con densità anche non costante. Esercizi sulle funzioni di due variabili. Superfici in forma cartesiana e parametrizzate. Curve e superfici rappresentate implicitamente. Versore normale, piano tangente. Superfici orientate. Superfici con bordo. Orientazione del bordo. Esempi di curve e superfici. Curve come intersezioni di superfici.

Equazioni differenziali

Operatori differenziali. Equazioni differenziali lineari, spazio delle soluzioni, equazioni non omogenee. Struttura dell'insieme delle soluzioni. Teorema di Cauchy. Determinazione dell'integrale di una ED lineare scalare del primo ordine (coefficienti variabili). Integrale di una equazione lineare scalare non omogenea (a coefficienti qualunque). Funzioni linearmente indipendenti, determinante wronskiano. Equazioni differenziali lineari in \mathbb{R}^n , spazio delle soluzioni e sua base; il teorema di Cauchy in questo caso. Soluzioni non prolungabili. Le equazioni differenziali del secondo ordine come equazioni differenziali vettoriali. Qualche esempio di determinazione di una soluzione particolare per equazioni del primo e secondo ordine. Determinazione della soluzione generale per equazioni lineari a coefficienti costanti. Soluzione di problemi di Cauchy. Metodo di variazione delle costanti per una equazione lineare (anche non a coefficienti costanti) non omogenea del secondo ordine. Metodo di somiglianza. Problemi diversi (non di Cauchy) per equazioni differenziali. Problemi periodici, risonanza. Significato fisico. Pennello di Peano.

Espressioni e forme differenziali, loro integrazione

l'espressione ds . Spazio duale e forme. Condizione necessaria perché una forma sia il differenziale di una funzione. Un metodo per determinare le primitive di una forma. Forme chiuse ed esatte. Omotopia di curve, insiemi semplicemente connessi, condizione sufficiente affinché una forma sia esatta. Integrali curvilinei di espressioni differenziali e di forme. Significato fisico. Legame con i campi vettoriali: primitive e potenziali, campi conservativi. Il lavoro di un campo vettoriale. Teorema fondamentale del calcolo per le forme esatte e suo significato in termini di lavoro di un campo conservativo. Ricostruzione di una primitiva di una forma esatta: me-

todo di integrazioni successive e metodo degli integrali curvilinei. Esempi elementari. Le forme

$$\frac{x dy}{x^2 + y^2} - \frac{y dx}{x^2 + y^2} \quad e \quad \frac{x dx}{x^2 + y^2} + \frac{y dy}{x^2 + y^2}$$

Omotopia di curve e integrazione. Orientazione. Alcune proprietà degli integrali curvilinei (di prima e seconda specie).

Integrali multipli

Integrali doppi

Integrali doppi su rettangoli: definizione e proprietà di linearità e monotonia. Insiemi trascurabili. Teorema di integrabilità, teorema di equivalenza, teorema di Fubini. Integrali doppi su domini limitati, proprietà di additività rispetto all'insieme di integrazione, proprietà di monotonia. Domini normali, formule di riduzione. Teoremi della media, centro di massa di una lamina piana con densità variabile. Posizione del centro di massa. Formula di cambiamento di variabili. Coordinate polari ed altri esempi di coordinate curvilinee. Formule di Gauss-Green. Teorema della circuitazione. Calcolo dell'area di un insieme piano mediante un integrale curvilineo.

Integrali tripli

Integrali tripli: definizione e proprietà di linearità e monotonia. Insiemi trascurabili. Teorema di integrabilità, teorema di equivalenza, proprietà di additività rispetto all'insieme di integrazione, teorema di Fubini, insiemi semplici e formule di riduzione (formule degli spaghetti e delle fette). Formula di cambiamento di variabili. Coordinate sferiche. Coordinate cilindriche.

Integrali di superficie

Placche piane orientate e lamine. Superfici a placche. Espressioni differenziali di secondo ordine. Definizione di integrale di superficie. Area di una superficie a placche. Bordo di una superficie a placche. Orientazione, orientazione indotta sul bordo. Centri di massa di superfici con densità non costante. Divergenza e rotore di un campo vettoriale. Teoremi della divergenza e di Stokes. Esempi di applicazione del teorema della divergenza. Alcune osservazioni sugli operatori differenziali rotore, divergenza gradiente e laplaciano.