

Alcuni appunti di Analisi Matematica II

— Calcolo Integrale —

Marco Spadini

Avvertenza: Questi appunti sono stati inizialmente tratti dal registro delle lezioni del Prof. Massimo Furi (Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, A.A. 2007/2008), che ringrazio moltissimo per avere generosamente messo a mia disposizione il materiale didattico. Sono piano piano cresciuti negli ultimi anni con l'aggiunta di osservazioni, dimostrazioni ed alcuni argomenti non comuni.

Ho apportato diverse modifiche e molte aggiunte rispetto all'originale, principalmente nella parte centrale e finale del testo, e nella formattazione. Molte dimostrazioni e osservazioni sono state aggiunte assieme ad esempi ritenuti significativi.

Gli eventuali errori presenti, però, sono soltanto una mia responsabilità. Sarò grato a chiunque mi farà notare sbagli, imprecisioni o inconsistenze.

Aggiornamento del 25 luglio 2021

Codice versione: 32.20210725

Copyright ©Marco Spadini 2012–2021. Tutti i diritti riservati. La copia e la redistribuzione sono proibiti senza l'esplicito consenso scritto dell'autore.

Indice

1	Integrali dipendenti da un parametro	1
1.1	Funzione definita mediante un'integrazione parziale (integrale parametrico)	1
1.1.1	Continuità	1
1.1.2	Derivabilità e differenziabilità	3
1.1.3	Una formula di derivazione nel caso di estremi non costanti	5
2	Espressioni differenziali e integrali curvilinei	7
2.1	Espressioni e forme differenziali di grado 1	7
2.1.1	Forme differenziali di grado 1	9
2.1.2	Forme differenziali e campi vettoriali	12
2.2	Integrali curvilinei	16
2.2.1	Curve	16
2.2.2	integrale curvilineo di un'espressione differenziale	17
2.2.3	Lunghezza di una curva	18
2.2.4	Integrali in ds	20
2.2.5	Insiemi semplicemente connessi	24
2.2.6	Integrale curvilineo di una forma differenziale.	26
2.2.7	Determinazione di una primitiva di una forma esatta	35
3	Integrali doppi	37
3.1	Integrale doppio su rettangoli	37
3.1.1	Partizioni puntate e funzioni integrabili	37
3.1.2	Proprietà elementari	39

3.1.3	Insiemi trascurabili, Teoremi di integrabilità ed equivalenza	40
3.1.4	Teorema di riduzione	42
3.2	Integrale doppio su un arbitrario insieme limitato	43
3.2.1	Definizione e proprietà elementari	43
3.2.2	Formule di riduzione	45
3.2.3	Misura di Peano-Jordan	46
3.2.4	Teoremi della media	49
3.2.5	Teorema di cambiamento di variabili	52
3.2.6	Integrali doppi dipendenti da un parametro (integrali doppi parametrici)	55
3.3	Integrali doppi generalizzati	58
3.4	Formule di Gauss-Green nel piano	60
3.4.1	Curve e catene di Jordan	60
3.4.2	Formule di Gauss-Green e teorema della circuitazione	62
3.4.3	Teorema della divergenza nel piano e formule di integrazione per parti	68
3.4.4	Appendice: la formula di coarea nel piano	70
4	Integrali tripli	72
4.1	Integrali tripli su parallelepipedi	72
4.1.1	Partizioni puntate, funzioni integrabili e proprietà fondamentali	72
4.1.2	Teorema di riduzione	74
4.2	Integrali tripli su un arbitrario insieme limitato	75
4.2.1	Estensione standard di una funzione e definizione di integrale	75
4.2.2	Formule di riduzione	76
4.2.3	Misura (volume) di un insieme in \mathbb{R}^3	78
4.2.4	Cambiamento di variabili in \mathbb{R}^3	80
4.2.5	Il teorema di Pappo-Guldino per i volumi dei solidi di rotazione	82
4.2.6	Integrali tripli dipendenti da un parametro (integrali tripli parametrici)	83
5	Integrali di superficie	85
5.1	Superfici parametrizzate.	85

5.1.1	Elemento d'area e integrale superficiale	88
5.1.2	Superfici a placche	92
5.1.3	Osservazione sulla nozione di area, la lanterna di Schwarz	93
5.1.4	Il Teorema di Pappo-Guldino per le superfici di rotazione	95
5.2	Superfici orientate; teoremi della divergenza e della circuitazione	96
5.2.1	Placche orientate	96
5.2.2	Orientazione di una superficie a placche	100
5.2.3	Teoremi della divergenza e della circuitazione	101
5.2.4	Formula di coarea per gli integrali tripli	107
6	Operatori differenziali in \mathbb{R}^3	108
6.1	Definizioni e prime proprietà	108
6.1.1	Definizioni e interpretazioni	108
6.1.2	Relazioni con la matrice jacobiana	109
6.2	Relazioni	110
6.2.1	Legami tra gli operatori	110
6.2.2	Ricostruzione di un campo dal suo rotore (potenziale vettore)	111
6.2.3	Il vettore simbolico ∇	114
	Indice analitico	115

Capitolo 1

Integrali dipendenti da un parametro

1.1 Funzione definita mediante un'integrazione parziale (integrale parametrico)

Siano $d > c$ due numeri reali. Dato $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f: D \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Per la continuità di f , per ogni $x \in D$ fissato, la funzione $f(x, \cdot): [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $y \mapsto f(x, y)$ è continua e quindi integrabile. Dunque risulta definito l'integrale $\int_c^d f(x, y)dy$ per ogni $x \in D$. In altri termini, risulta ben definita la funzione $G: D \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$G(x) := \int_c^d f(x, y)dy.$$

Chiaramente G è una funzione di n variabili. Saremo principalmente interessati al caso in cui $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto.

1.1.1 Continuità

Si ottiene facilmente il seguente fatto per $D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$:

Lemma (di continuità per integrali parametrici (semplici)). *Sia $f: [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $G: [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$ data da*

$$G(x) := \int_c^d f(x, y)dy,$$

è continua.

Dimostrazione. Poniamo $D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Osserviamo che, presi x ed x_0 in D ,

$$|G(x) - G(x_0)| = \left| \int_c^d f(x, y)dy - \int_c^d f(x_0, y)dy \right| \leq \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)|dy. \quad (1.1)$$

Sfruttando la compattezza di $D \times [c, d]$ è possibile provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$ per ogni coppia di coppie (x, y) e (x_0, y) in $D \times [c, d]$ (con la stessa y come secondo elemento) tali che $|x - x_0| < \delta$.¹

Dunque, fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta > 0$ tale che

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Allora, da (1.1) segue che

$$|G(x) - G(x_0)| \leq \int_c^d \frac{\varepsilon}{d - c} dy = \frac{\varepsilon}{d - c} (d - c) = \varepsilon.$$

Cioè la continuità. □

Il lemma ci permette rapidamente di considerare domini aperti.

Teorema (di continuità per integrali parametrici (semplici)). *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f: D \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Allora $G: D \rightarrow \mathbb{R}$ data da*

$$G(x) := \int_c^d f(x, y) dy,$$

è continua.

Dimostrazione. Basta osservare che per ogni $x \in D$ si possono trovare a_1, \dots, a_n e b_1, \dots, b_n tali che $x \in (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ e che $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq D$. Allora, per il lemma, G è continua in x da cui segue la tesi.² □

Una conseguenza immediata è che se f e D sono come nel teorema, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_c^d f(x_0, y) dy,$$

formula che esprime il passaggio al limite sotto il segno di integrale.³

Il teorema di continuità richiede che l'intervallo di integrazione sia limitato. Esistono esempi che mostrano l'essenzialità di questa limitazione. Se tuttavia, in aggiunta alle ipotesi del teorema su f si assume che esista una funzione sommabile⁴ $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $|f(x, y)| \leq \varphi(y)$ allora

$$G(x) := \int_I f(x, y) dy$$

è continua.

¹Si noti che δ dipende solo da ε ; questa proprietà si chiama *uniforme continuità* ed è il contenuto di un teorema detto di *Heine–Cantor*.

²Si ricorda infatti il seguente fatto elementare: Una funzione g è continua in un punto x del suo dominio se e solo se fissato un intorno aperto (relativo al dominio) U di x la restrizione $g|_U$ è continua in x .

³Esistono teoremi più forti di passaggio al limite sotto il segno di integrale ma vanno oltre lo scopo di queste lezioni.

⁴Si dice che una funzione è sommabile su un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ se è integrabile su ogni sottoinsieme chiuso e limitato di I e il suo valore assoluto è integrabile su I in senso generalizzato.

Esempio. Consideriamo il limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{e^x}{\cos(\alpha x)} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1} dx = e - 1.$$

Esempio. Calcoliamo il limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-4\alpha} - e^{-\alpha}}{2\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha).$$

Possiamo riconoscere la funzione come $f(\alpha)$ come

$$f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha} \Big|_{x=2} - \frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha} \Big|_{x=1} = \int_1^2 -xe^{-\alpha x^2} dx$$

$$\text{Quindi } \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha) = \int_1^2 -xe^{0x^2} dx = \int_1^2 -x dx = -3/2.$$

1.1.2 Derivabilità e differenziabilità

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f: D \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Posto $x = (x_1, \dots, x_n)$, supponiamo che per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$ la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ di f esista continua per ogni $(x_1, \dots, x_n, y) = (x, y) \in D \times [c, d]$.

Teorema (di derivabilità per integrali parametrici (semplici)). *Siano f e D come sopra e G come nel teorema di continuità, allora la derivata parziale di G rispetto ad x_i esiste continua ed è data da:*

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) := \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy, \quad \forall x \in D.$$

Dimostrazione. Fissato $(x, y) \in D \times [c, d]$, dal momento che D è aperto esiste una palla B di centro (x, y) contenuta in D . Sia h tale che il segmento di estremi $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$ e $(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n, y)$ sia tutto contenuto in B , e quindi in $D \times [c, d]$. Consideriamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} & \frac{G(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n, y) - G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_c^d f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n, y) dy - \int_c^d f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y) dy \right) \\ &= \int_c^d \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n, y) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)}{h} dy \\ &= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, \xi, \dots, x_n, y) dy \end{aligned}$$

l'ultima eguaglianza essendo una conseguenza del teorema del valor medio, con ξ compreso tra x_i e $x_i + h$. Allora, il rapporto incrementale è dato da:

$$\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y) dy + \int_c^d \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, \xi, \dots, x_n, y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y) \right) dy.$$

Con lo stesso argomento usato nel teorema di continuità, la continuità di $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ implica che il secondo integrale può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo h a sua volta sufficientemente piccolo. In altre parole,

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n, y) - G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)}{h} = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y) dy.$$

Osserviamo infine che $x \mapsto \frac{\partial G}{\partial x_i}(x)$ è continua per il teorema di continuità, visto che $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è una funzione continua. \square

Osserviamo che se si suppone che f abbia tutte le derivate $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ continue, $i = 1, \dots, n$, allora tutte le derivate $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ esistono continue in D . Ne segue che G è una funzione C^1 in D . Indicheremo questa affermazione con il nome di *teorema di differenziabilità per integrali parametrici (semplici)*.

Se con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ si indica la matrice jacobiana di f rispetto alla prima variabile (vettoriale) x , allora per la matrice jacobiana $G'(x)$ si ha la seguente espressione

$$G'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \quad (1.2)$$

dove l'integrazione è da intendersi elemento per elemento.

Come il teorema di continuità, anche il teorema di derivabilità richiede che l'intervallo di integrazione sia limitato. Se tuttavia, in aggiunta alle ipotesi del teorema su f si assume che esistano due funzioni sommabili $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $|f(x, y)| \leq \varphi(y)$ e $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y)| \leq \psi(y)$ allora

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) := \int_I \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy$$

esiste ed è continua.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$h(t) := \int_1^2 \frac{e^{-tx^3}}{x} dx,$$

e calcoliamo $h'(0)$. Si ha che $h'(0) = \int_1^2 -x^2 e^{0x^3} dx = -7/3$.

Esempio. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) := \int_a^x \left(\int_b^y \varphi(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi.$$

Allora, per il teorema fondamentale del calcolo e il teorema di differenziabilità, f è C^1 e

$$\nabla f(x, y) = \left(\int_b^y \varphi(x, \eta) d\eta, \int_a^x \varphi(\xi, y) d\xi \right).$$

1.1.3 Una formula di derivazione nel caso di estremi non costanti

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $\alpha: D \rightarrow [c, d]$ e $\beta: D \rightarrow [c, d]$. Se $f: D \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, per $x \in D$ e $u, v \in [c, d]$ poniamo

$$F(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy, \quad \text{e} \quad H(u, v, x) = \int_u^v f(x, y) dy.$$

Ovviamente, $F(x) = H(\alpha(x), \beta(x), x)$.

Siccome f è continua, il teorema fondamentale del calcolo implica che

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u, v, x) = -f(x, u), \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial v}(u, v, x) = f(x, v),$$

che quindi sono continue. Supponiamo ora, in aggiunta, che f sia C^1 . Allora, per il teorema di differenziabilità e la formula (1.2) si ha che

$$\frac{\partial H}{\partial x}(u, v, x) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

è continua (nel senso che tutti gli elementi di questa matrice sono funzioni continue). In particolare si ha che H è C^1 .

Se α e β sono funzioni C^1 , la formula di derivazione delle funzioni composte implica

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x) &= \frac{\partial H}{\partial u}(\alpha(x), \beta(x), x)\alpha'(x) + \frac{\partial H}{\partial v}(\alpha(x), \beta(x), x)\beta'(x) + \frac{\partial H}{\partial x}(\alpha(x), \beta(x), x) \\ &= -f(x, \alpha(x))\alpha'(x) + f(x, \beta(x))\beta'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy, \end{aligned}$$

dove, come al solito, $\alpha'(x)$ e $\beta'(x)$ denotano le matrici jacobiane in x di α e β .

Nel caso $n = 1$ tutte le matrici jacobiane sopra, ovviamente, si riducono a funzioni scalari.

La discussione fatta finora si riduce al seguente

Corollario Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $\alpha: D \rightarrow [c, d]$ e $\beta: D \rightarrow [c, d]$ funzioni C^1 . Se $f: D \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione C^1 allora, posto

$$F(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

Si ha che F è C^1 e

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) = -f(x, \alpha(x))\alpha'(x) + f(x, \beta(x))\beta'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy. \quad (1.3)$$

Esempio. Prendiamo $D = (1, +\infty)$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x, y) = e^{xy}/y$, $\alpha(x) = 1$ e $\beta(x) = x^{-1}$. Si ha che

$$F(x) = \int_1^{1/x} \frac{e^{xy}}{y} dy$$

è una funzione C^1 . In base alla formula trovata,

$$F'(x) = -\frac{e}{x} + \int_1^{1/x} e^{xy} dy = -\frac{e}{x} + \frac{e}{x} - \frac{e^x}{x} = -\frac{e^x}{e}.$$

Notiamo, come c'era da aspettarsi, che questa derivata viene negativa.

Un'osservazione che ci tornerà utile in seguito è che se $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1: [a, b] \rightarrow [c, d]$ e $\varphi_2: [a, b] \rightarrow [c, d]$ sono funzioni C^1 allora dalla (1.3),

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy = \frac{d}{dx} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy + f(\varphi_1(x), x)\varphi_1'(x) - f(\varphi_2(x), x)\varphi_2'(x)$$

integrando entrambi i membri rispetto a x su $[a, b]$ e tenendo conto del teorema fondamentale del calcolo, otteniamo

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(f(\varphi_1(x), x)\varphi_1'(x) - f(\varphi_2(x), x)\varphi_2'(x) \right) dx \tag{1.4}$$

$$+ \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} f(b, y) dy - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} f(a, y) dy.$$

Come vedremo più avanti, quando parleremo delle formule di Gauss-Green nel piano, entrambi i membri di quest'eguaglianza hanno un'interpretazione importante.

Capitolo 2

Espressioni differenziali e integrali curvilinei

2.1 Espressioni e forme differenziali di grado 1

Ricordiamo che un *vettore applicato* in \mathbb{R}^2 è una coppia $(p, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Il punto p si dice *punto di applicazione* di (p, v) e v è il *vettore libero*. Più in generale, un vettore applicato in \mathbb{R}^k è una coppia (p, v) di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$.

Un'espressione differenziale (reale di grado uno) in \mathbb{R}^2 è una funzione continua $\omega : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un sottoinsieme (generalmente aperto) X di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. In altre parole, ω è una "legge" che ad ogni vettore applicato (p, v) di X associa un numero reale $\omega(p, v)$. In modo analogo si definisce il concetto di espressione differenziale in \mathbb{R}^3 (o, più in generale, in \mathbb{R}^k).

Chiaramente, le espressioni differenziali, come tutte le funzioni reali, si possono sommare, moltiplicare, dividere tra loro e, nell'ordine giusto, anche comporre con funzioni reali di variabile reale. Le convenzioni che si fanno sul dominio della somma, del quoziente, ecc., sono analoghe a quelle già viste per funzioni reali di variabile reale. Quindi, il dominio della somma o del prodotto di due espressioni differenziali è dato dall'intersezione dei domini delle due espressioni; il dominio di un quoziente è l'intersezione dei due domini meno i vettori (applicati) in cui si annulla il denominatore; il dominio di una composizione $f \circ \omega$ di un'espressione differenziale $\omega : X \rightarrow \mathbb{R}$ con una funzione reale di variabile reale $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è il sottoinsieme $\omega^{-1}(A) = \{(p, v) \in X : \omega(p, v) \in A\}$ di X .

Data un'espressione differenziale ω in \mathbb{R}^2 (o in \mathbb{R}^k), se si fissa un punto p di \mathbb{R}^2 (o di \mathbb{R}^k) si ottiene una funzione, denotata con ω_p , che dipende soltanto dal vettore libero v . In altre parole, fissato p , si ha $\omega_p(v) = \omega(p, v)$; cioè con ω_p si denota l'applicazione parziale che si ottiene fissando p e facendo variare soltanto v .

Esempi di espressioni differenziali:

- 1) una funzione continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un sottoinsieme A di \mathbb{R}^2 (o di \mathbb{R}^k) può essere pensata come una particolare espressione differenziale dipendente soltanto dal punto di

- applicazione (indipendente quindi dal vettore libero);
- 2) l'incremento Δf di un'applicazione continua $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è, per definizione, l'espressione differenziale $\Delta f(p, v) = f(p + v) - f(p)$;
 - 3) il differenziale df di una $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 su un aperto U di \mathbb{R}^2 è l'espressione differenziale che ad ogni $(p, v) \in U \times \mathbb{R}^2$ associa il differenziale $df_p(v)$ di f in p relativo a v (ricordarsi che $df_p(v) = \nabla f(p) \cdot v$);
 - 4) l'elemento di lunghezza (o d'arco) ds è l'espressione differenziale che ad ogni vettore applicato (p, v) associa la lunghezza di v (ossia $ds(p, v) = \|v\|$).
 - 5) il differenziale secondo d^2f di una $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 su un aperto U di \mathbb{R}^2 è l'espressione differenziale che ad ogni $(p, v) \in U \times \mathbb{R}^2$ associa il numero $d^2f(p, v)$ ottenuto calcolando per $t = 0$ la derivata seconda della funzione composta $\varphi(t) = f(p + tv)$.

Proviamo che (nel senso delle espressioni differenziali in \mathbb{R}^2) vale l'uguaglianza

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Ossia, mostriamo che per ogni $(p, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ risulta

$$ds(p, v) = \left(\sqrt{dx^2 + dy^2} \right) (p, v).$$

A tale scopo fissiamo un punto $p = (x_0, y_0)$ e un vettore libero $v = (h, k)$. Per definizione di ds si ha $ds(p, v) = \|v\|$. Mostriamo ora che se si applica l'espressione differenziale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ a (p, v) si ottiene ancora $\|v\|$. Ricordiamo infatti che il differenziale dx della funzione x (pensata in \mathbb{R}^2) associa ad ogni vettore applicato (p, v) la prima componente di v . Quindi, se $v = (h, k)$, si ha $dx(p, v) = h$. Analogamente $dy(p, v) = k$. Pertanto, in base alla nozione di somma, prodotto e composizione di espressioni differenziali, risulta

$$\left(\sqrt{dx^2 + dy^2} \right) (p, v) = \sqrt{(dx(p, v))^2 + (dy(p, v))^2} = \sqrt{h^2 + k^2} = \|v\|.$$

In modo analogo si prova che in \mathbb{R}^3 risulta $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ o, equivalentemente,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Supponiamo ora di voler esprimere l'elemento d'arco ds di \mathbb{R}^2 tramite le coordinate polari. Per far ciò basta calcolare le espressioni dx e dy in coordinate polari e sostituirle nell'uguaglianza $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Ricordiamo che le coordinate cartesiane (x, y) sono legate alle coordinate polari (ρ, θ) dalle seguenti relazioni: $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$. Quindi, differenziando, si ottiene

$$dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta.$$

Pertanto,

$$ds^2 = (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta)^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

o, equivalentemente, $ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}$, che è l'espressione cercata.

2.1.1 Forme differenziali di grado 1

Definizione (di forma differenziale). Un'espressione differenziale $\omega: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, dove U è un aperto di \mathbb{R}^k , si dice una *forma differenziale* (di grado uno, o 1-forma) su U se è lineare rispetto al vettore libero. Ossia se, fissato un qualunque $p \in U$, l'applicazione parziale $\omega_p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\omega_p(v) = \omega(p, v)$ è lineare.

Notiamo che se ω è una forma differenziale in \mathbb{R}^k l'applicazione parziale $p \mapsto \omega_p = \omega(p, \cdot)$ è una mappa da \mathbb{R}^k nello spazio duale $(\mathbb{R}^k)^*$ (lo spazio vettoriale dei funzionali lineari su \mathbb{R}^k). Sappiamo che la dimensione di $(\mathbb{R}^k)^*$ è k , ed è facile verificare che i differenziali dx_1, \dots, dx_k delle funzioni $x_i: (\xi_1, \dots, \xi_k) \mapsto \xi_i, i = 1, \dots, k$ sono linearmente indipendenti. Pertanto $\{dx_1, \dots, dx_k\}$ costituisce una base di $(\mathbb{R}^k)^*$. Una conseguenza di questo fatto è che ogni forma differenziale in \mathbb{R}^k si può scrivere come combinazione lineare di questi elementi. Cioè, se ω è una forma differenziale esistono funzioni A_1, \dots, A_k tali che

$$\omega = \sum_{i=1}^k A_i(x_1, \dots, x_k) dx_i.$$

In altre parole, fissato $p \in U$, l'applicazione lineare $\omega_p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ è combinazione lineare di k applicazioni lineari: dx_1, \dots, dx_k . I coefficienti della combinazione lineare dipendono dal punto $p = (x_1, \dots, x_k)$ fissato, e sono quindi k funzioni di $p = (x_1, \dots, x_k)$.

Si osservi che, data una funzione f di classe C^1 su un aperto U di \mathbb{R}^2 , il suo differenziale df è una forma differenziale. Ricordiamo infatti che, fissato $p \in U$, df_p opera sui vettori liberi $v \in \mathbb{R}^2$ nel seguente modo:

$$df_p(v) = \nabla f(p) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)v_2,$$

dove $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Pertanto, per le note proprietà del prodotto scalare, df_p risulta una funzione lineare di v . In pratica il differenziale di f è un'espressione della forma

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy,$$

dove, a causa dell'unicità del differenziale, le funzioni $A(x, y)$ e $B(x, y)$ sono le derivate parziali di f rispetto alla x e alla y , dx è il differenziale della prima funzione coordinata e dy della seconda.

In modo analogo, se f è una funzione C^1 su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^k$, allora

$$df_p = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_k) dx_i$$

per ogni $(x_1, \dots, x_k) \in U$.

Diremo che una forma differenziale

$$\omega = A_1(x_1, \dots, x_k)dx_1 + \dots + A_k(x_1, \dots, x_k)dx_k$$

è di classe C^n (o C^∞) se sono di classe C^n (o C^∞) tutte le funzioni A_1, \dots, A_k .

Abbiamo già osservato che un'ordinaria funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^k può essere pensata come un'espressione differenziale che dipende soltanto dal punto di applicazione. Il dominio di tale espressione è costituito di tutti i vettori applicati $(p, v) \in A \times \mathbb{R}^k$ con punto di applicazione in A . Viceversa, un'espressione differenziale ω il cui dominio sia il prodotto cartesiano $A \times \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, nel caso dipenda soltanto dal punto di applicazione (cioè fissato un qualunque $p \in A$, $\omega(p, v)$ sia costante rispetto al vettore libero v) può essere vista come un'ordinaria funzione reale definita in A .

Non è difficile provare che se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 , allora il rapporto tra il suo differenziale df e il differenziale dx della funzione coordinata x dipende soltanto dal punto di applicazione. Pertanto, nello spirito della suddetta identificazione, tale rapporto rappresenta un'ordinaria funzione (reale di variabile reale). Precisamente, vale l'uguaglianza

$$\frac{df}{dx} = f'.$$

Esercizio Provare che se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^n , allora risulta

$$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}.$$

Ci poniamo la seguente domanda: data una forma differenziale

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy,$$

si può affermare che questa è il differenziale di una funzione $f(x, y)$? Il risultato che segue mostra che la risposta è in generale negativa.

Teorema. Sia $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ una forma differenziale di classe C^1 su un aperto U di \mathbb{R}^2 . Se esiste una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $df = \omega$ (ossia, tale che $\partial f/\partial x = A$ e $\partial f/\partial y = B$), allora $\partial A/\partial y = \partial B/\partial x$.

Dimostrazione. Sia f una funzione tale che $\partial f/\partial x = A$ e $\partial f/\partial y = B$. Poiché A e B sono di classe C^1 , la funzione f risulta di classe C^2 . Di conseguenza, tenendo conto del Teorema di Schwarz, si ha

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

e la tesi è dimostrata. □

Esempio. Consideriamo la forma differenziale $\omega = xdx - xydy$. Poiché $\partial x/\partial y = 0$ e $\partial(-xy)/\partial x = -y$, non esiste una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $df = \omega$.

Definizione. Sia $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ una forma differenziale definita su un aperto U di \mathbb{R}^2 . Si dice che ω è una *forma esatta* (in U) se esiste una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, detta *primitiva* di ω , tale che $df = \omega$. Si dice che ω è una *forma chiusa* (in U) se è di classe C^1 e $\partial A/\partial y = \partial B/\partial x$.

In base alla suddetta definizione, il precedente teorema può essere riformulato nel modo seguente: “condizione necessaria affinché una forma differenziale di classe C^1 sia esatta è che sia chiusa”.

Vedremo in seguito, dopo aver introdotto gli integrali curvilinei, che la condizione che una forma differenziale sia chiusa non ci assicura che sia anche esatta (a meno che non siano verificate delle opportune ipotesi sul suo dominio).

Esempio. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = (y^2 + \cos x)dx + (2xy + 1)dy.$$

Risulta $\partial(y^2 + \cos x)/\partial y = 2y$ e $\partial(2xy + 1)/\partial x = 2y$. Quindi ω è chiusa; ossia è soddisfatta la condizione necessaria affinché ω sia una forma esatta. Proviamo a vedere se effettivamente ω ammette una primitiva $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se una tale f esiste, si deve avere $df = \omega$, ossia

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 1.$$

Dalla prima uguaglianza si deduce che $f(x, y)$ è uguale a $xy^2 + \sin x$ più una costante rispetto alla variabile x (cioè più una funzione della sola y). Quindi $f(x, y) = xy^2 + \sin x + \varphi(y)$. Occorre determinare la funzione $\varphi(y)$. Derivando rispetto alla y l'espressione della f che abbiamo appena determinato, si ha $\partial f/\partial y = 2xy + \varphi'(y)$. Pertanto, tenendo conto che (se f è una primitiva) deve essere $\partial f/\partial y = 2xy + 1$, si ottiene $2xy + \varphi'(y) = 2xy + 1$. Quindi $\varphi'(y) = 1$ e, di conseguenza, $\varphi(y) = y + c$ (dove c è un'arbitraria costante). Si può concludere che se f è una primitiva, allora necessariamente

$$f(x, y) = xy^2 + \sin x + y + c.$$

Un semplice controllo mostra che effettivamente $xy^2 + \sin x + y + c$ è una primitiva di ω .

Ricordiamo che se $f(x, y, z)$ è una funzione di classe C^1 su un aperto U di \mathbb{R}^3 , il suo differenziale è l'espressione

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

o, con notazioni vettoriali, l'espressione

$$df = \nabla f \cdot dp,$$

dove dp è il vettore incremento (di componenti dx , dy e dz).

In \mathbb{R}^3 , un'espressione del tipo

$$\omega = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz,$$

dove A , B e C sono funzioni continue su un aperto U di \mathbb{R}^3 , rappresenta una forma differenziale in \mathbb{R}^3 . Come per le forme nel piano, ω è di classe C^n (o C^∞) se tali sono le sue tre *funzioni componenti*: A , B e C . Diremo che ω è una forma esatta se esiste una funzione f , la primitiva di ω , tale che $df = \omega$. Diremo che ω è *chiusa* se sono verificate le seguenti tre condizioni:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial z}.$$

In generale, in \mathbb{R}^k , una forma differenziale

$$\omega = \sum_{i=1}^k A_i(x_1, \dots, x_k)dx_i,$$

dove le funzioni A_i , sono continue su un aperto U di \mathbb{R}^k . Diremo che ω è una forma esatta se esiste una funzione f , la primitiva di ω , tale che $df = \omega$. Diremo che ω è *chiusa* se sono verificate le seguenti $k(k-1)/2$ condizioni:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad j = i, \dots, k.$$

Come per le forme in \mathbb{R}^2 , dal Teorema di Schwarz discende che (anche in \mathbb{R}^k) ogni forma esatta di classe C^1 è chiusa. In generale, tuttavia, non è vero il contrario (lo vedremo con un esempio, dopo aver introdotto gli integrali curvilinei).

2.1.2 Forme differenziali e campi vettoriali

Dato un aperto U di \mathbb{R}^3 (o di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^k), un *campo vettoriale* in U è una “legge” che ad ogni punto $p \in U$ assegna un vettore $\mathbf{w}(p) \in \mathbb{R}^3$ (o di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^k). Quindi, se $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ denota la base canonica di \mathbb{R}^3 , ogni campo vettoriale $\mathbf{w}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ si può rappresentare nel seguente modo:

$$\mathbf{w} = A(x, y, z)\mathbf{i} + B(x, y, z)\mathbf{j} + C(x, y, z)\mathbf{k},$$

dove A , B e C sono tre funzioni reali definite in U (dette *componenti del campo*).

Ovviamente, un campo vettoriale nel piano avrà due sole componenti e si rappresenterà nel seguente modo:

$$\mathbf{w} = A(x, y)\mathbf{i} + B(x, y)\mathbf{j}.$$

Un campo vettoriale si dice di classe C^n (risp. C^∞) se sono di classe C^n (risp. C^∞) le sue funzioni componenti.

Un importante esempio di campo vettoriale è il cosiddetto *gradiente* (denotato $\text{grad}f$ o ∇f) di una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 su un aperto U di \mathbb{R}^3 (o di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^k). In questo caso le funzioni componenti sono le derivate parziali di f . Ad esempio, in \mathbb{R}^3 si ha

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Il simbolo ∇ si chiama “nabla” e rappresenta un operatore lineare dallo spazio vettoriale delle funzioni di classe C^1 su un aperto U di \mathbb{R}^3 (o di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^k) a valori nello spazio vettoriale dei campi vettoriali definiti su U .

Un campo vettoriale in \mathbb{R}^3 , $\mathbf{w} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, si dice *conservativo* se ammette un *potenziale*; cioè una funzione f tale che $\nabla f = \mathbf{w}$ (vale a dire $A = \partial f/\partial x$, $B = \partial f/\partial y$ e $C = \partial f/\partial z$). Ovviamente, se f è un potenziale di \mathbf{w} , allora lo è anche $f + c$, qualunque sia la costante $c \in \mathbb{R}$.

Sempre in \mathbb{R}^3 , un campo $\mathbf{w} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ si chiama *irrotazionale* se sono verificate le seguenti tre condizioni:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial z}.$$

Analogamente, in \mathbb{R}^2 un campo vettoriale $\mathbf{w} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ è *conservativo* se esiste una funzione derivabile f (detta *potenziale*) tale che $\partial f/\partial x = A$ e $\partial f/\partial y = B$. Si dice che \mathbf{w} è *irrotazionale* se

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Teorema. *Condizione necessaria affinché un campo vettoriale di classe C^1 sia conservativo è che sia irrotazionale.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{w} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ un campo vettoriale (in \mathbb{R}^2) di classe C^1 (ricordiamo che in tal caso $A(x, y)$ e $B(x, y)$ sono funzioni di classe C^1 definite su aperto di \mathbb{R}^2). Supponiamo che $f(x, y)$ sia un potenziale di \mathbf{w} . Allora $f(x, y)$ è necessariamente di classe C^2 , dato che le sue derivate parziali (rispetto alla prima e alla seconda variabile) coincidono (rispettivamente) con $A(x, y)$ e con $B(x, y)$, che abbiamo supposto di classe C^1 . Si può quindi applicare il Teorema di Schwarz alla funzione f ottenendo così la seguente uguaglianza:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Il risultato segue subito tenendo conto che $\partial f/\partial x = A$ e $\partial f/\partial y = B$. La dimostrazione nel caso in cui \mathbf{w} sia un campo vettoriale in \mathbb{R}^3 è lasciata per esercizio allo studente. \square

La dimostrazione appena fatta ci dovrebbe ricordare quanto fatto alla fine del paragrafo precedente. Infatti esiste un parallelismo tra le forme differenziali e i campi vettoriali.

Ad ogni 1-forma differenziale $\omega = \sum_{i=1}^k A_i(x) dx_i$, definita su un aperto U di \mathbb{R}^k , associamo il campo vettoriale $\langle \omega \rangle: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ con le stesse componenti di ω ; ossia, dato $p \in U$, $\langle \omega \rangle(p)$ è il vettore

$$\langle \omega \rangle(p) = \begin{pmatrix} A_1(p) \\ \vdots \\ A_k(p) \end{pmatrix}$$

Per esempio, se $\omega = A dx + B dy + C dz$ è una 1-forma in \mathbb{R}^3 , allora $\langle \omega \rangle(p) = A(p)\mathbf{i} + B(p)\mathbf{j} + C(p)\mathbf{k}$. In altre parole, indipendentemente dal sistema di coordinate, fissato un punto $p \in U$, $\langle \omega \rangle(p)$ è quel vettore (è facile provare che è unico) che gode della seguente proprietà: $\omega_p(v) = \langle \omega \rangle(p) \cdot v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^k$. Questa osservazione ci fornisce un'interpretazione geometrica delle 1-forme:

Per ogni punto $p \in \mathbb{R}^k$, si considera la retta orientata r_ω per p con direzione e verso dati da $\langle \omega \rangle(p)$. Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^k$, $\omega_p(v)$ è la lunghezza (con segno) della proiezione di v su r_ω moltiplicata per $\|\langle \omega \rangle(p)\|$.

Viceversa, dato un campo vettoriale, $\mathbf{w}: U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ possiamo sempre associare una forma differenziale $\rangle \mathbf{w} \langle$ i cui coefficienti sono le componenti di \mathbf{w} . Cioè, se $\mathbf{w}(p) = (\mathbf{w}_1(p), \dots, \mathbf{w}_k(p))^T$ per ogni $p \in U$, allora

$$\rangle \mathbf{w} \langle_p = \sum_{i=1}^k \mathbf{w}_i(p) dx_i.$$

Si ha allora una corrispondenza biunivoca tra forme differenziali di grado 1 e campi vettoriali. In tale corrispondenza i seguenti concetti sono accoppiati:

$$\begin{aligned} f \text{ è una primitiva di } \omega &\iff f \text{ è un potenziale di } \langle \omega \rangle \\ f \text{ è un potenziale di } \mathbf{w} &\iff f \text{ è una primitiva di } \rangle \mathbf{w} \langle \\ \omega \text{ è esatta} &\iff \langle \omega \rangle \text{ è conservativo} \\ \mathbf{w} \text{ è conservativo} &\iff \rangle \mathbf{w} \langle \text{ è esatta} \end{aligned}$$

Se siamo in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 abbiamo a disposizione anche la nozione di ampo irrotazionale, per cui:

$$\begin{aligned} \omega \text{ è chiusa} &\iff \langle \omega \rangle \text{ è irrotazionale} \\ \mathbf{w} \text{ è irrotazionale} &\iff \rangle \mathbf{w} \langle \text{ è chiusa} \end{aligned}$$

Vedremo in seguito, dopo aver introdotto gli integrali curvilinei, che la condizione che un campo vettoriale sia irrotazionale non ci assicura che sia conservativo, a meno che il suo dominio non goda di una speciale proprietà: quella di essere semplicemente connesso (che definiremo tra breve).

Esercizio. Il campo vettoriale

$$\mathbf{w} = (y^2 + \cos y)\mathbf{i} + (2xy + 1)\mathbf{j}$$

non ammette un potenziale. Per quale motivo?

Esempio. Consideriamo il campo vettoriale

$$\mathbf{w} = (y^2 + \cos x)\mathbf{i} + (2xy + 1)\mathbf{j}.$$

Risulta $\partial(y^2 + \cos x)/\partial y = 2y$ e $\partial(2xy + 1)/\partial x = 2y$. Quindi \mathbf{w} è irrotazionale; ossia è soddisfatta la condizione necessaria affinché \mathbf{w} sia conservativo. Proviamo a vedere se effettivamente \mathbf{w} ammette un potenziale $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se f esiste, si deve avere $\nabla f = \mathbf{w}$, ossia

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 1.$$

Dalla prima uguaglianza si deduce che $f(x, y)$ è uguale a $xy^2 + \sin x$ più una costante rispetto alla variabile x (cioè più una funzione della sola y). Quindi

$$f(x, y) = xy^2 + \sin x + \varphi(y),$$

dove $\varphi(y)$ è un'arbitraria funzione della y che occorre determinare. Derivando rispetto alla y l'espressione della f che abbiamo appena determinato, si ha $\partial f/\partial y = 2xy + \varphi'(y)$. Pertanto, tenendo conto che (se f è un potenziale) deve essere $\partial f/\partial y = 2xy + 1$, si ottiene $2xy + \varphi'(y) = 2xy + 1$. Quindi $\varphi'(y) = 1$ e, di conseguenza, $\varphi(y) = y + c$ (dove c è un'arbitraria costante). Si può concludere che se f è un potenziale di \mathbf{w} , allora necessariamente

$$f(x, y) = xy^2 + \sin x + y + c.$$

Un semplice controllo mostra che effettivamente il gradiente di $xy^2 + \sin x + y + c$ è proprio $(y^2 + \cos x)\mathbf{i} + (2xy + 1)\mathbf{j}$.

Una condizione che assicura che una forma chiusa sia anche esatta (o, in \mathbb{R}^3 , che un campo irrotazionale sia conservativo) è che il suo dominio sia *semplicemente connesso*. La definizione formale, che studieremo un po' più avanti, di insieme semplicemente connesso richiede concetti topologici non completamente elementari.

Per il momento, vediamo con un esempio un metodo che permette di costruire un potenziale di un campo vettoriale assegnato. Il metodo sarà poi ripreso in generale alla fine del capitolo.

Esempio. Studiamo il seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{w} = 2yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy - 2z)\mathbf{k}.$$

Verifichiamo, innanzi tutto, se si tratta di un campo irrotazionale. Si ha

$$\partial(2yz)/\partial y = 2z \quad \text{e} \quad \partial(xz)/\partial x = z.$$

Poiché le due funzioni $2z$ e z non coincidono, è inutile proseguire con il calcolo delle altre derivate: il campo vettoriale non è irrotazionale e quindi non ammette un potenziale (non è conservativo).

Esempio. Studiamo il seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{w} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy - 2z)\mathbf{k}.$$

Verifichiamo, innanzi tutto, se si tratta di un campo irrotazionale. Si ha

$$\frac{\partial(yz)}{\partial y} = \frac{\partial(xz)}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial(xz)}{\partial z} = \frac{\partial(xy - 2z)}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial(xy - 2z)}{\partial x} = \frac{\partial yz}{\partial z} = y.$$

Il campo è quindi irrotazionale; ossia è verificata la condizione necessaria affinché il campo sia conservativo. Poiché le tre componenti di \mathbf{w} sono definite in tutto lo spazio \mathbb{R}^3 , che è semplicemente connesso, la suddetta condizione è anche sufficiente per l'esistenza di un potenziale. Denotiamo con f un potenziale di \mathbf{w} ; cioè, sia f una funzione tale che $\nabla f = \mathbf{w}$. Poiché la derivata di f rispetto alla x coincide con yz , la funzione $f(x, y, z)$ risulta uguale a xyz più una costante rispetto alla x (cioè più una funzione delle sole variabili y e z). Quindi $f(x, y, z) = xyz + \varphi(y, z)$. Occorre determinare la funzione $\varphi(y, z)$. Derivando rispetto alla y l'espressione della f che abbiamo appena determinato, si ottiene la funzione

$$xz + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z),$$

che deve coincidere con la seconda componente del campo \mathbf{w} . Pertanto

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) = 0,$$

e ciò implica che $\varphi(y, z)$ è una funzione che dipende soltanto dalla z . Denotiamola con $\psi(z)$. Si ha quindi $f(x, y, z) = xyz + \psi(z)$. Poiché la derivata di f rispetto alla z deve coincidere con la terza componente del campo, si ottiene $\psi'(z) = -2z$. Quindi $\psi(z) = -z^2 + c$. Concludendo si ha

$f(x, y, z) = xyz - z^2 + c$. Un semplice controllo ci assicura che effettivamente la funzione $xyz - z^2 + c$ è un potenziale di \mathbf{w} .

Esercizio. Mostrare che il campo irrotazionale

$$\mathbf{w} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

è conservativo, sebbene non sia definito in un insieme semplicemente connesso.

Suggerimento. Procedere come nell'esempio precedente, cercando f tale che $\nabla f = \mathbf{w}$.

Esercizio. Tentare di applicare la tecnica dell'esempio sopra al campo

$$\mathbf{w} = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

Si trova un potenziale? Cosa fallisce in questo caso?

Esercizio. Studiare la seguente forma differenziale:

$$\omega = yzdx + xzdy + (xy - 2z)dz.$$

2.2 Integrali curvilinei

2.2.1 Curve

Una *curva (parametrizzata)* in \mathbb{R}^n è una funzione continua $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. L'immagine $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ è detta *sostegno* della curva γ (da non confondere con il grafico di γ che è un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1}).

Una curva C^k , $k = 1, 2, \dots$, è una curva $\gamma \in C^1(I)$ (se $I \subseteq \mathbb{R}$ non è aperto, questo significa che esiste un'estensione C^k di γ ad un aperto di \mathbb{R} contenente I).

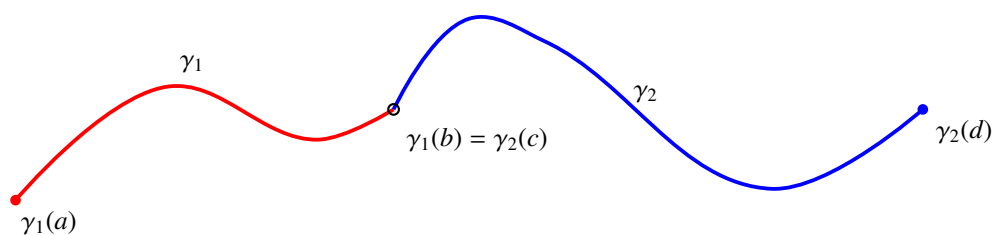
Una curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta *regolare* se è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, è detta *semplice* se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ per ogni $t_1 \neq t_2$ con $t_1 \in I$ and $t_2 \in \text{int } I$. Nel caso in cui $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è tale che $\gamma(a) = \gamma(b)$ diremo che γ è *chiusa*.

Infine, una curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta C^1 a tratti se esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ di $[a, b]$ con la proprietà che $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è C^1 per ogni $i = 1, \dots, N$.

Siano $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve con la proprietà che $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, in questo caso è definita una nuova curva detta *concatenazione* di γ_1 e γ_2 , denotata con $\gamma_1 \circ \gamma_2$, data da

$$\gamma_1 \circ \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{per } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{per } t \in [b, d - c + b] \end{cases}$$

per $t \in [a, d - c + b]$.

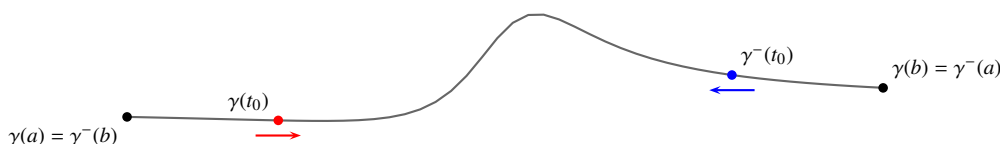
Il sostegno della concatenazione di γ_1 e γ_2 .

Notiamo che la concatenazione di curve C^1 , in generale, fornisce una curva C^1 a tratti.

Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, possiamo definire la curva “opposta” γ^- ponendo, per $t \in [a, b]$,

$$\gamma^-(t) = \gamma(b - t + a).$$

Si osservi che il sostegno di γ coincide con quello di γ^- ma vengono percorsi in senso opposto.

Il sostegno di γ percorso nei due sensi.

Definizione. Siano $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve regolari. Diremo che sono *equivalenti* se esiste una funzione continua $\psi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ con le seguenti proprietà:

- ψ è suriettiva (cioè tale che $\psi([a, b]) = [c, d]$);
- ψ è C^1 in (a, b) con $\psi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$;
- per ogni $t \in [a, b]$, $\gamma_2(\psi(t)) = \gamma_1(t)$.

Si dice che due curve regolari equivalenti *hanno la stessa orientazione* se $\psi'(t) > 0$ per ogni $t \in (a, b)$, e che *hanno orientazioni opposte* nel caso in cui valga $\psi'(t) < 0$ per ogni $t \in (a, b)$.

Si dimostra subito che quella definita sopra è una relazione di equivalenza¹. Osserviamo che, data $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regolare, la curva opposta γ^- è equivalente a γ con orientazione opposta.

2.2.2 integrale curvilineo di un'espressione differenziale

Vogliamo definire il concetto di integrale curvilineo di un'espressione differenziale lungo una curva parametrica di classe C^1 . Allo scopo è conveniente introdurre alcune notazioni alternative per rappresentare l'integrale non orientato, cioè quello direttamente legato alla prima definizione di integrale (con le sommatorie).

¹Cioè gode delle proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*. Questo fa sì che l'insieme di tutte le curve regolari sia partizionato in classi di equivalenza. È anche da notare che anche le relazioni “essere curve equivalenti con la stessa orientazione” oppure “essere curve equivalenti con orientazione opposta” sono relazioni di equivalenza.

Data una funzione integrabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, il numero

$$\int_a^b f(x) dx,$$

cioè l'integrale non orientato di f in $[a, b]$, può essere denotato anche con uno dei seguenti simboli:

$$\int_{[a,b]} f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) |dx|, \quad \int_{[a,b]} f(x) |dx|,$$

da usare esclusivamente quando i due estremi di integrazione a e b verificano la condizione $a < b$. L'espressione differenziale $|dx|$ rappresenta l'elemento di lunghezza in \mathbb{R} . In una variabile infatti si ha

$$ds = \sqrt{dx^2} = |dx|.$$

Definizione (di integrale curvilineo di un'espressione differenziale). Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ una curva parametrica di classe C^1 e sia ω un'espressione differenziale su un aperto U di \mathbb{R}^k contenente l'immagine di γ . Si chiama *integrale curvilineo* di ω lungo γ (o su γ) il numero

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[a,b]} \omega(\gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

Si fa notare che il suddetto integrale ha senso perché, essendo ω continua (per definizione di espressione differenziale) e γ di classe C^1 , la funzione reale di variabile reale $\omega(\gamma(t), \gamma'(t))$ è continua, e quindi integrabile nell'intervallo compatto $[a, b]$.

Con la suddetta definizione di integrale curvilineo le regole di calcolo risultano particolarmente naturali e facili da ricordare.

Esercizio Mostrare che date $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con la proprietà che $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ ed un'espressione differenziale ω su un aperto U di \mathbb{R}^k contenente l'immagine di $\gamma_1 \circ \gamma_2$, si ha

$$\int_{\gamma_1 \circ \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

Questo fatto si chiama *Teorema di additività*.

2.2.3 Lunghezza di una curva

Dato un sottoinsieme limitato $S \subseteq \mathbb{R}$ la sua lunghezza (o misura unidimensionale) è, per definizione, data da

$$\mu_1(S) = \int_I \mathbb{1}_S(t) dt,$$

dove I è un intervallo contenente S e $\mathbb{1}_S$ rappresenta la funzione caratteristica di S (cioè $\mathbb{1}_S(t)$ vale 1 se $t \in S$ e 0 altrimenti). Notiamo che se S è un intervallo limitato, diciamo di estremi a e b , allora $\mu_1(S) = |b - a|$. Molto spesso, per semplicità, la lunghezza si denota con il simbolo L .

Definizione (Lunghezza di una curva parametrica). Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua, la sua *lunghezza* (o misura unidimensionale) è data da

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^N \|\gamma(t_{j-1}) - \gamma(t_j)\| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b \text{ è una partizione di } [a, b] \right\}.$$

In particolare, se γ è iniettiva, $L(\gamma)$ è l'estremo superiore delle lunghezze delle spezzate (o poligoni) inscritte² nell'immagine di γ . Non è affatto detto che questo $L(\gamma)$ sia finito; se lo è, si dice che la curva è *rettificabile*.

Un'osservazione banale è che se si considera la parametrizzazione $\gamma: t \in [a, b] \mapsto t$ di un segmento di \mathbb{R} , si ha subito che $L(\gamma) = |b - a| = \mu_1([a, b])$.

La definizione appena data di lunghezza non è molto adatta ai calcoli pratici. Fortunatamente, se la curva è abbastanza regolare, vale il seguente

Teorema Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 , la sua *lunghezza* è il numero

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds,$$

dove ds denota l'elemento di lunghezza in \mathbb{R}^k (ricordiamo che $ds(p, v) := \|v\|$).

Dal punto di vista fisico, pensando a γ come ad una traiettoria, o meglio come una legge oraria del moto di una particella, $L(\gamma)$ rappresenta la "strada totale percorsa", anche se alcuni tratti di strada possono essere ripetuti più volte.

Esempio. Dati due punti $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^3$, calcoliamo la lunghezza della curva parametrica

$$\gamma(t) = p_0 + \frac{t}{T}(p_1 - p_0), \quad t \in [0, T].$$

Detta curva si può interpretare come il moto di un punto che parte da p_0 all'istante $t = 0$, si dirige verso p_1 con velocità (vettoriale) costante $\gamma'(t) = (p_1 - p_0)/T$ e raggiunge p_1 all'istante T . Dalla definizione si ottiene immediatamente

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_0^T ds(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_0^T \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^T (\|p_1 - p_0\|/T) dt = \|p_1 - p_0\|.$$

Esempio. Consideriamo la curva $\gamma(t)$ in \mathbb{R}^2 di equazioni parametriche $x = r \cos t$ e $y = r \sin t$, con $t \in [0, 2\pi]$. Questa rappresenta una circonferenza (parametrica) di raggio r , col centro nell'origine, percorsa una sola volta con velocità (scalare) costante. La sua lunghezza è data da

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

In modo equivalente possiamo calcolare la lunghezza di γ mediante l'uguaglianza $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Risulta

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

²Si confronti con il successivo paragrafo 2.2.4.

Differenziando le equazioni parametriche di γ si ottiene $dx = -r \sin t dt$ e $dy = r \cos t dt$. Sostituendo le espressioni di dx e dy nella precedente uguaglianza si ha infine

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 dt^2} = \int_0^{2\pi} r |dt| = 2\pi r.$$

Supponiamo ora che la suddetta circonferenza sia data in coordinate polari (ρ, θ) . Ossia, consideriamo le equazioni parametriche $\rho = r$, $\theta = t$, con $t \in [0, 2\pi]$. In questo caso $d\rho = 0$ e $d\theta = dt$. Quindi, dall'uguaglianza $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$ (che si consiglia di verificare per esercizio) si ottiene

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 dt^2} = \int_0^{2\pi} r |dt| = 2\pi r.$$

Esercizio. Provare che se una curva γ è costante, allora la sua lunghezza è nulla.

Esercizio. Provare che la concatenazione di due curve C^1 è rettificabile e che la sua lunghezza è la somma delle loro lunghezze.

2.2.4 Integrali in ds

L'integrale curvilineo di un'espressione differenziale del tipo $f(p)ds$ si dice anche *integrale non orientato*. Il motivo intuitivo è dovuto al fatto che tale integrale non dipende dal verso di percorrenza della curva di integrazione (cioè dall'orientazione).

Per gli integrali non orientati vale la seguente **proprietà di monotonia** (immediata conseguenza dell'analogia proprietà dell'integrale di Cauchy-Riemann): *Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ una curva parametrica di classe C^1 e siano $f(p)$ e $g(p)$ due funzioni continue in un aperto U di \mathbb{R}^k contenente il sostegno $\text{Im } \gamma$ di γ . Se $f(p) \leq g(p)$ per ogni p nel sostegno di γ , allora*

$$\int_{\gamma} f(p) ds \leq \int_{\gamma} g(p) ds.$$

Primo teorema della media per gli integrali curvilinei. *Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ un arco di curva (parametrica di classe C^1) e sia $f(p)$ una funzione continua in un aperto U di \mathbb{R}^k contenente il sostegno di γ . Allora la media di f lungo γ , ossia il rapporto*

$$\frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} f(p) ds$$

tra l'integrale curvilineo lungo γ di $f(p)$ e la lunghezza di γ , è un numero compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f . Quindi, essendo f continua, esiste un punto $c \in \text{Im } \gamma$ per il quale si ha

$$\int_{\gamma} f(p) ds = f(c)L(\gamma).$$

Dimostrazione. Denotiamo, rispettivamente, con m e M l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione $f(p)$ per $p \in \text{Im } \gamma$. Si ha

$$m \leq f(p) \leq M, \quad \forall p \in \text{Im } \gamma.$$

Quindi, per la proprietà di monotonia, risulta

$$\int_{\gamma} m ds \leq \int_{\gamma} f(p) ds \leq \int_{\gamma} M ds.$$

Dividendo i tre membri della suddetta disuguaglianza per la lunghezza

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds$$

della curva si ottiene la prima parte della tesi. La seconda segue dal teorema dei valori intermedi. \square

Secondo teorema della media per gli integrali curvilinei. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ un arco di curva (parametrica di classe C^1) e siano $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni integrabili in un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ contenente il sostegno di γ . Se g è positiva in U , allora (quando ha senso) la media ponderata di f in A (con peso g), ossia

$$\frac{\int_{\gamma} f(p)g(p) ds}{\int_{\gamma} g(p) ds},$$

è un numero compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f . Pertanto, se f è continua ed A è connesso, esiste un punto $c \in A$ per il quale si ha

$$\int_{\gamma} f(p)g(p) ds = f(c) \int_{\gamma} g(p) ds.$$

Dimostrazione. Denotiamo, rispettivamente, con m e M l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione $f(p)$ per $p \in \text{Im } \gamma$. Dato che $g(p) > 0$ per ogni $p \in \text{Im } \gamma$, di ha

$$mg(p) \leq f(p)g(p) \leq Mg(p), \quad \forall p \in \text{Im } \gamma.$$

Quindi, per la proprietà di monotonia, risulta

$$m \int_{\gamma} g(p) ds \leq \int_{\gamma} g(p)f(p) ds \leq M \int_{\gamma} g(p) ds.$$

Dividendo (quando ha senso³) i tre membri della suddetta disuguaglianza per $\int_{\gamma} g ds$ si ottiene la prima parte della tesi. La seconda segue dal teorema dei valori intermedi. \square

Ricordiamo che una curva parametrica $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ si dice *semplice* se esistono al più due punti con la stessa immagine, e quando ciò accade tali punti sono soltanto gli estremi a e b dell'intervallo di definizione (in tal caso, ricordiamo, la curva si dice *chiusa*).

Ricordiamo che una curva parametrica $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ si dice *regolare* se è di classe C^1 e la sua derivata $\gamma'(t)$ non si annulla mai (significa che le derivate delle sue funzioni componenti non si annullano mai simultaneamente).

³Visto che $g > 0$, basta che la lunghezza di γ sia maggiore di zero.

Definizione (di arco di curva regolare). Un sottoinsieme C di \mathbb{R}^k si dice un *arco (di curva regolare)* se è il sostegno (cioè l'immagine) di una curva parametrica semplice e regolare. Una qualunque curva parametrica semplice e regolare il cui sostegno sia un arco di curva regolare C si dice una *parametrizzazione* di C .

Si potrebbe dimostrare, ma non lo facciamo, che se un arco di curva regolare C ammette una parametrizzazione chiusa $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ (cioè tale che $\gamma(a) = \gamma(b)$), allora ogni altra parametrizzazione di C è chiusa. In tal caso si dice che C è un *arco di curva chiusa*.

Teorema (di indipendenza dalla parametrizzazione per integrali curvilinei non orientati). Se γ e σ sono due parametrizzazioni di uno stesso arco di curva regolare C , allora, data una qualunque funzione continua $f(p)$ definita su C , risulta

$$\int_{\gamma} f(p) ds = \int_{\sigma} f(p) ds.$$

La dimostrazione di questo teorema è una conseguenza della formula di cambiamento di variabile negli integrali.

Dimostrazione Siano $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^k$ due curve regolari equivalenti, e sia $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ una funzione continua suriettiva, C^1 su (a, b) con $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$, tale che $\gamma(t) = \sigma(\varphi(t))$. Allora⁴,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f ds &= \int_c^d f(\sigma(\tau)) \|\sigma'(\tau)\| d\tau = \text{sign}(\varphi') \int_a^b f(\sigma(\varphi(t))) \|\sigma'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} f ds. \end{aligned}$$

Infatti,

$$\text{sign}(\varphi'(t)) \|\sigma'(\varphi(t))\| \varphi'(t) = \|\sigma'(\varphi(t))\varphi'(t)\| = \|\gamma'(t)\|$$

per ogni $t \in [a, b]$. □

Il suddetto risultato giustifica la seguente

Definizione. Sia C un arco di curva regolare e sia $f(p)$ una funzione continua definita su C . Si definisce *l'integrale sull'arco di curva regolare C*

$$\int_C f(p) ds = \int_{\gamma} f(p) ds,$$

⁴Se con $\text{sign}(\varphi')$ si indica il segno di $\varphi'(t)$ che è costante per ogni $t \in [a, b]$, avremo che $\text{sign}(\varphi')$ vale 1 se γ e σ sono concordi e vale -1 se sono discordi. La formula di cambiamento di variabile si può scrivere così per una qualunque funzione integrabile g :

$$\int_c^d g(\tau) d\tau = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} g(\varphi(t)) dt = \text{sign}(\varphi') \int_a^b g(\varphi(t)) dt$$

infatti, se $\text{sign}(\varphi') = 1$ allora $\varphi(a) = c$ e $\varphi(b) = d$ mentre, se $\text{sign}(\varphi') = -1$ allora $\varphi(a) = d$ e $\varphi(b) = c$.

dove γ è una qualunque parametrizzazione di C . In particolare, se $f(p) \equiv 1$, si ottiene un numero che dipende soltanto da C , denotato $L(C)$ e detto *lunghezza di C* .

Ricordando il paragrafo 2.2.3, vediamo che $L(C)$ è l'estremo superiore dell'insieme delle lunghezze delle spezzate inscritte in C .⁵

Definizione (baricentro o centro di massa geometrico di una curva). Dato un arco di curva regolare C in \mathbb{R}^2 , il suo *baricentro* è quel punto (x_0, y_0) che ha per ascissa la media della funzione ascissa e per ordinata la media della funzione ordinata. In simboli:

$$x_0 = \frac{1}{L(C)} \int_C x ds, \quad y_0 = \frac{1}{L(C)} \int_C y ds.$$

Si osservi che, come conseguenza del primo teorema della media per gli integrali curvilinei, se la curva è contenuta in un rettangolo, allora anche il suo baricentro deve stare in detto rettangolo.

Determiniamo, per esempio, il baricentro della semicirconferenza C definita dalla parametrizzazione $x = r \cos t$ e $y = r \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$. Per ragioni di simmetria risulta $x_0 = 0$. Occorre quindi calcolare soltanto l'ordinata y_0 del centro di massa. La lunghezza $L(\gamma)$ della curva è πr e quindi

$$y_0 = \frac{1}{\pi r} \int_\gamma y ds = \frac{1}{\pi r} \int_\gamma y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{r^2}{\pi r} \int_0^\pi \sin t |dt| = \frac{2r}{\pi}.$$

Si osservi che $2r/\pi$ è un numero tra 0 ed r (in accordo col teorema della media).

Consideriamo un filo non omogeneo disposto lungo un arco di curva regolare C . La sua massa è

$$M(C) = \int_C \delta(p) ds$$

infatti, la densità (massa per unità di lunghezza) è una funzione $\delta(p)$ del generico punto $p \in C$. Talvolta l'espressione differenziale $\delta(p) ds$ si denota col simbolo dm , detto *elemento di massa*. Il suo centro di massa è dato da

$$x_0 = \frac{1}{M(C)} \int_C x ds, \quad y_0 = \frac{1}{M(C)} \int_C y ds.$$

Si osservi che, come conseguenza del secondo teorema della media per gli integrali curvilinei, anche nel caso di curve con densità variabile, se la curva è contenuta in un rettangolo allora anche il suo centro di massa deve stare in detto rettangolo.

⁵Dato C , sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ una curva semplice regolare tale che $\gamma([a, b]) = C$. Fissata una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ di $[a, b]$ l'oggetto che si ottiene unendo ogni punto (vertice) $\gamma(t_j)$, $j = 0, \dots, N$, al successivo mediante un segmento è detto spezzata (o poligonale) inscritta in C . La sua lunghezza è semplicemente la somma delle lunghezze dei segmenti che lo costituiscono. In pratica, la spezzata è l'immagine della curva ottenuta mediante concatenazione delle curve (parametrizzate regolari)

$$g_j: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad g_j(s) = s\gamma(t_j) + (1-s)\gamma(t_{j-1}),$$

per $j = 1, \dots, N$.

Il *momento d'inerzia* rispetto ad un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ di un filo omogeneo C di peso m , sostegno di una curva semplice e regolare in \mathbb{R}^2 , è il numero

$$I = \int_C d(p, p_0)^2 \delta ds,$$

dove $d(p, p_0)$ è la funzione distanza di un generico punto p dal punto di riferimento p_0 e $\delta = m/L(C)$ è la densità lineare del filo.

Se il filo non è omogeneo, il suddetto integrale dà ancora il momento d'inerzia del filo, ma in tal caso la densità è una funzione $\delta(p)$ del generico punto $p \in C$.

Analogamente, il *momento d'inerzia* di un filo rispetto ad una retta $\alpha \subseteq \mathbb{R}^3$ di un filo C (non necessariamente omogeneo) è il numero

$$I = \int_C d(p, \alpha)^2 dm,$$

dove $d(p, \alpha)$ è la funzione distanza di un generico punto p dalla retta di riferimento α .

Calcoliamo, ad esempio, il momento d'inerzia di una circonferenza omogenea di raggio r e massa m rispetto al suo centro. Tutti i punti della circonferenza hanno distanza r dal centro, e quindi il contributo di un elemento di massa dm è $dI = r^2 dm$. Se la nostra intuizione non sbaglia, sommando i vari contributi, il momento d'inerzia dovrebbe essere $I = mr^2$. Vediamo se è vero. Poniamo la circonferenza col centro nell'origine $0 \in \mathbb{R}^2$ e parametrizziamola nel modo seguente: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Si ha

$$I = \int_{\gamma} d(p, 0)^2 dm = \delta \int_{\gamma} (x^2 + y^2) ds = \frac{m}{2\pi r} \int_0^{2\pi} (r^2) r d\theta = mr^2.$$

Osserviamo che se C è un filo in \mathbb{R}^2 il suo momento d'inerzia rispetto ad un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è il momento d'inerzia della curva

$$C' = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C\}$$

rispetto alla retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0. \end{cases}$$

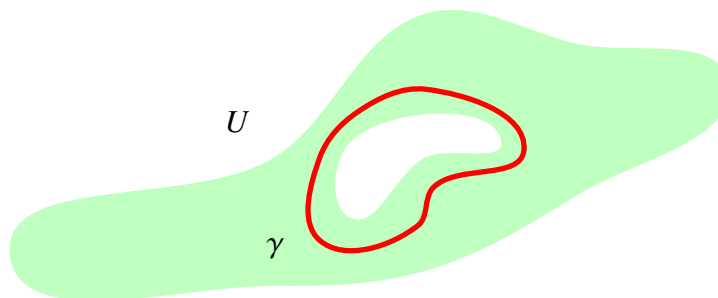
Esercizio. Calcolare il momento d'inerzia rispetto al centro di massa di un'asta omogenea di lunghezza l e massa m .

Esercizio. Dato un filo omogeneo, semicircolare, di raggio r e massa m , determinarne il momento d'inerzia rispetto al diametro congiungente i due estremi.

2.2.5 Insiemi semplicemente connessi

Cominciamo con una descrizione intuitiva.

Definizione (euristica di insieme semplicemente connesso). Un sottoinsieme connesso U di \mathbb{R}^2 (o, più in generale, di \mathbb{R}^k) si dice *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa contenuta in U può essere deformata con continuità riducendola ad un punto (*retratta*), senza che nella deformazione si tocchino punti del complementare di U (si pensi ad un elastico che si contrae, rimanendo sempre dentro U , fino a diventare un punto).



L'insieme U in figura non è semplicemente connesso perché γ non può essere retratta senza uscire da U .

Per dare una definizione rigorosa della nozione di insieme semplicemente connesso dobbiamo introdurre il concetto di curve *omotope*.

Definizione (curve omotope). Due curve $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$ sono dette omotope in D se esiste una funzione continua $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ tale che per ogni $t \in [a, b]$, $H(0, t) = \gamma_0(t)$ e $H(1, t) = \gamma_1(t)$. La funzione H si chiama *omotopia* di γ_0 e γ_1 .⁶

Intuitivamente, due curve γ_1 e γ_2 con sostegno in U sono omotope in U . Se γ_1 e γ_2 sono deformabili con continuità l'una nell'altra in modo che nella deformazione tutte le curve intermedie abbiano sostegno contenuto in U .

Siamo in grado di dare ora una definizione rigorosa di insieme semplicemente connesso.

Definizione Un sottoinsieme connesso U di \mathbb{R}^k si dice *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa contenuta in U è omotopa in U ad una curva costante (in U , ovvio!).

Ricordiamo che un sottoinsieme Q di \mathbb{R}^2 (o di \mathbb{R}^k) è *convesso*, se presi due qualunque punti di Q , il segmento che li congiunge è contenuto in Q . Ad esempio, i cerchi, i triangoli e i rettangoli sono convessi di \mathbb{R}^2 , le sfere (piene) e i parallelepipedi sono convessi di \mathbb{R}^3 . Ovviamente, l'intero spazio \mathbb{R}^2 è convesso, così come è convesso un semipiano. Si può dimostrare che gli insiemi convessi sono anche semplicemente connessi (esercizio!).

Esempi di insiemi non semplicemente connessi si ottengono togliendo dal piano un punto, o un numero finito di punti o, addirittura, un arbitrario insieme limitato. Se, invece, dallo spazio \mathbb{R}^3 si toglie un punto (o un numero finito di punti), ciò che resta è ancora un insieme semplicemente

⁶Abbiamo dato la definizione di omotopia di curve solo se le curve sono definite sullo stesso intervallo. Più in generale, data una qualunque curva $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ si può definire una sua riparametrizzazione su $[0, 1]$ ponendo

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\alpha + t(\beta - \alpha)).$$

Con questo artificio diciamo che due curve $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow D$ e $\gamma_1 : [c, d] \rightarrow D$ sono omotope, se lo sono le curve $\tilde{\gamma}_0(t) = \gamma_0(a + t(b - a))$ e $\tilde{\gamma}_1(t) = \gamma_1(c + t(d - c))$.

connesso (si pensi ad un elastico che si contrae senza mai toccare i punti rimossi). Se da \mathbb{R}^3 si toglie una retta, o una circonferenza (o un numero finito di rette e circonferenze) ciò che rimane non è semplicemente connesso (si pensi ad un elastico che circonda una retta o che è concatenato con una circonferenza).

Vedremo più avanti che (teorema di Poincaré) Se una forma differenziale è chiusa ed è definita in un insieme semplicemente connesso, allora è esatta.

2.2.6 Integrale curvilineo di una forma differenziale.

Sia $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ una forma differenziale in \mathbb{R}^2 e sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, una curva parametrica di classe C^1 . In base alla definizione generale di integrale curvilineo di un'espressione differenziale si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy = \int_a^b (A(x(t), y(t)) x'(t) + B(x(t), y(t)) y'(t)) dt.$$

In pratica, per calcolare l'integrale curvilineo di una forma differenziale, basta integrare, nell'intervallo in cui varia il parametro, la funzione che si ottiene sostituendo $x(t)$ al posto di x e $y(t)$ al posto di y ; ricordandosi però che $dx(t) = x'(t)dt$ e $dy(t) = y'(t)dt$. Il calcolo dell'integrale curvilineo di una forma differenziale in \mathbb{R}^3 o, più in generale, in \mathbb{R}^k è analogo.

Per esempio, calcoliamo

$$\int_{\gamma} x dx + (y + 2) dy,$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Differenziando le equazioni parametriche si ottiene $dx = -\sin \theta d\theta$ e $dy = \cos \theta d\theta$. Quindi, sostituendo si ottiene

$$\int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta + (\sin \theta + 2) \cos \theta) d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0.$$

Esercizio. Provare che se una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è costante, allora l'integrale lungo γ di una qualunque forma differenziale è nullo.

L'integrale curvilineo di un campo vettoriale $\mathbf{f}(p) = A(p)\mathbf{i} + B(p)\mathbf{j}$ lungo una curva γ si scrive nel seguente modo:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f}(p) \cdot d\mathbf{p},$$

dove $d\mathbf{p}$ sta per $dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$. Si osservi che esso coincide con l'integrale lungo γ della forma differenziale associata $\omega = A(p)dx + B(p)dy$, dove p denota il generico punto (x, y) . Si ha infatti

$$\int_{\gamma} \mathbf{f}(p) \cdot d\mathbf{p} = \int_{\gamma} A(p) dx + B(p) dy = \int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy.$$

Quando il campo vettoriale \mathbf{f} rappresenta una forza, il significato di detto integrale è di capitale importanza per la Fisica: rappresenta il lavoro compiuto da \mathbf{f} lungo la curva γ .

Teorema (fondamentale per gli integrali curvilinei). Sia ω una forma differenziale esatta su un aperto U di \mathbb{R}^k e sia f una sua primitiva. Se $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ è una curva C^1 a valori in U , allora risulta

$$\int_{\gamma} \omega = f(p_2) - f(p_1), \quad (2.1)$$

dove p_1 e p_2 sono, rispettivamente, il primo ed il secondo estremo di γ . In particolare, l'integrale curvilineo di una forma differenziale esatta non dipende dal cammino, ma soltanto dagli estremi della curva.

La formula (2.1) è detta *formula fondamentale per gli integrali curvilinei*.

Dimostrazione. Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df := \int_a^b df(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_a^b f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Il risultato segue immediatamente dal teorema fondamentale del calcolo integrale, tenendo conto che la funzione (reale di variabile reale) $\varphi(t) := f(\gamma(t))$ è una primitiva della funzione integranda $f'(\gamma(t)) \gamma'(t)$. \square

Corollario. Se ω è una forma differenziale esatta, allora l'integrale curvilineo di ω lungo una qualunque curva (parametrica) chiusa è nullo. Analogamente, se \mathbf{w} è un campo vettoriale conservativo, allora l'integrale curvilineo di \mathbf{w} lungo ogni curva chiusa è nullo.

In sostanza, il suddetto corollario afferma che “una condizione necessaria affinché una forma differenziale sia esatta è che l'integrale lungo ogni curva chiusa sia zero”. Tale condizione è anche sufficiente. Vale infatti il seguente

Teorema. (Dipendenza dagli estremi.) *Condizione sufficiente affinché una forma differenziale (continua) sia esatta è che l'integrale curvilineo della forma lungo una qualunque curva dipenda solo dagli estremi della traiettoria.*

Osserviamo che, analogamente, un campo vettoriale \mathbf{w} è conservativo se l'integrale curvilineo di \mathbf{w} dipende solo dagli estremi della traiettoria. Per semplicità dimostriamo il teorema soltanto in due dimensioni.

Dimostrazione. Basta far vedere che, data una forma $\omega = A(x, y)dx + b(x, y)dy$ in U aperto di \mathbb{R}^2 con la proprietà che l'integrale curvilineo di ω lungo una qualunque curva dipenda solo dagli estremi della traiettoria, è possibile costruire una primitiva di ω . Fissato un punto $O = (x_0, y_0) \in U$, per ogni $P = (x, y) \in U$ poniamo

$$f(x, y) = \int_{\gamma_{[O, P]}} \omega,$$

dove $\gamma_{[O, P]}$ è una qualunque (tanto l'integrale dipende solo dagli estremi) traiettoria nel dominio di ω con estremi O e P (in quest'ordine). Dimostreremo che $\omega = df$. Mostriamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ esiste ed è data da $A(x, y)$ per ogni $(x, y) \in U$. Per ogni $(x, y) \in U$ esiste un disco centrato in (x, y) e di raggio r opportunamente piccolo tutto contenuto in U (ricordiamo che U è aperto). Allora, se $h \in \mathbb{R}$ è tale che $|h| < r$, il segmento $[(x, y), (x + h, y)]$ è tutto contenuto in U . Grazie

alla proprietà additiva (rispetto alla curva) degli integrali curvilinei ed alla indipendenza dalla traiettoria, troviamo la seguente espressione per il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[(x,y), (x+h,y)]} \omega = \frac{1}{h} \int_0^1 A(x+th, y) h dt \quad (2.2)$$

Posto $s = ht$, l'ultimo membro diventa

$$\frac{1}{h} \int_0^h A(x+s, y) ds = \frac{g(h) - g(0)}{h},$$

dove si è posto $g(u) = \int_0^u A(x+u, y) du$. Per il teorema fondamentale del calcolo, g è derivabile in $(-r, r)$ e $g'(0) = A(x, y)$. Questo implica che possiamo passare al limite per $h \rightarrow 0$ nella (2.2) ottenendo $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = A(x, y)$. In modo del tutto analogo si dimostra che $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = B(x, y)$. Questo conclude la dimostrazione. \square

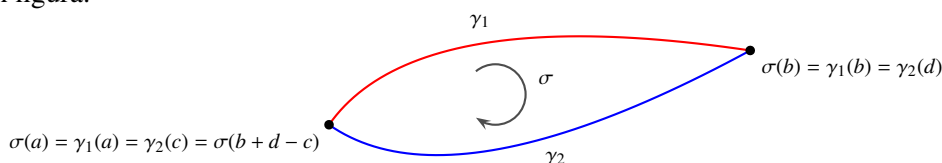
Corollario. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma differenziale (continua) sia esatta nell'aperto U è che l'integrale curvilineo della forma lungo una qualunque curva semplice chiusa contenuta in U sia zero. Analogamente, un campo vettoriale \mathbf{w} è conservativo se e solo se l'integrale curvilineo di \mathbf{w} lungo ogni curva semplice chiusa è nullo.*

Dimostrazione. Basta fare vedere che se ω ha la proprietà che l'integrale curvilineo di ω lungo una qualunque curva chiusa è zero allora l'integrale lungo una generica curva dipende solo dagli estremi della curva.

Siano $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow U$ due curve in U aventi gli stessi estremi. Consideriamo la curva σ ottenuta concatenando γ_1 con γ_2 percorsa in senso inverso. Cioè

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{per } t \in [a, b] \\ \gamma_2(b+d-t) & \text{per } t \in [b, b+d-c]. \end{cases}$$

come in figura:



Si ha che σ è una curva chiusa, infatti $\sigma(a) = \gamma_1(a) = \gamma_2(c) = \sigma(b+d-c)$. Allora, per l'additività,

$$0 = \int_{\sigma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

Da cui segue $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$. \square

Conviene osservare che se la forma è esatta allora l'integrale è nullo su qualunque curva chiusa (anche non semplice), ma per testare l'esattezza è sufficiente limitarsi alle curve semplici chiuse.

Su alcuni testi di Fisica un campo di forze viene detto conservativo se il suo integrale curvilineo lungo ogni curva chiusa è nullo. Il suddetto teorema mostra che tale definizione è equivalente a quella precedentemente data (cioè un campo è conservativo se è il gradiente di una funzione).

Notazione. L'integrale curvilineo di un'espressione differenziale ω esteso ad una curva chiusa γ viene spesso denotato con

$$\oint_{\gamma} \omega.$$

Ricordiamo che, come conseguenza del Teorema di Schwarz, ogni forma differenziale esatta (di classe C^1) è anche chiusa. Inoltre, se una forma chiusa è definita in un aperto semplicemente connesso, allora è anche esatta. Mostriamo con un esempio che negli aperti non semplicemente connessi possono esistere forme chiuse che non sono esatte. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Si ha

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Pertanto ω è una forma chiusa. Osserviamo che il dominio di ω è l'aperto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, che non è semplicemente connesso. Ciò non implica che la forma debba essere non esatta ("il dominio semplicemente connesso" è soltanto una condizione sufficiente affinché una forma chiusa sia esatta). Tuttavia, se fosse esatta, il suo integrale lungo una qualunque curva chiusa (con sostegno in U) dovrebbe essere zero. Proviamo ad integrarla lungo la circonferenza $\gamma_r(t)$ definita dalle seguenti equazioni parametriche:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Si ha

$$\begin{aligned} & \oint_{\gamma_r} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{r \sin t}{r^2} d(r \cos t) + \frac{r \cos t}{r^2} d(r \sin t) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

La forma differenziale non è pertanto esatta.

Per inciso osserviamo che il suddetto integrale non dipende dal raggio r della circonferenza $\gamma_r(t)$ considerata. Questo fatto ha una spiegazione teorica di cui diamo soltanto un'idea intuitiva. La dimostrazione rigorosa compete ad una moderna disciplina matematica, la Topologia, ed è basata sul seguente risultato (da cui si può dedurre il Teorema di Poincaré per le forme differenziali sugli aperti semplicemente connessi, che abbiamo già visto):

Lemma di Poincaré. *Se una forma differenziale chiusa è definita in un insieme convesso, allora è esatta.*

Per semplicità dimostriamo questo teorema soltanto in \mathbb{R}^2 .

Dimostrazione in \mathbb{R}^2 . Sia $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ una forma chiusa su un aperto semplicemente connesso $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Possiamo supporre, senza perdita di generalità che l'origine $O = (0, 0)$ appartenga ad U . Preso un generico punto $P = (x, y) \in U$, poniamo

$$f(x, y) = \int_{[O, P]} \omega = \int_0^1 (A(tx, ty)x + B(tx, ty)y) dt.$$

Mostriamo che f è una primitiva di ω . Per farlo calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, e facciamo vedere che coincidono rispettivamente con $A(x, y)$ e $B(x, y)$.

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (A(tx, ty)x + B(tx, ty)y) dt = \int_0^1 \left(A(tx, ty) + t \frac{\partial A}{\partial x}(tx, ty) + t \frac{\partial B}{\partial x}(tx, ty) \right) dt = \\ &\stackrel{\text{(per la chiusura di } \omega \text{)}}{=} \int_0^1 \left(A(tx, ty) + t \left(\frac{\partial A}{\partial x}(tx, ty) + \frac{\partial A}{\partial y}(tx, ty) \right) \right) dt = \\ &= \int_0^1 (A(tx, ty) + t \langle \nabla A(tx, ty), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle) dt \end{aligned}$$

Posto $g(t) = A(tx, ty)$, l'ultimo integrale si può scrivere anche come

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) + tg'(t) dt &= \int_0^1 g(t) dt + \int_0^1 tg'(t) dt = \\ &\stackrel{\text{(per parti)}}{=} \int_0^1 g(t) dt + [tg(t)]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 g(t) dt = g(1) = A(x, y). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato che $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = A(x, y)$. In modo completamente analogo si dimostra che $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = B(x, y)$. Questo conclude la dimostrazione. \square

Vediamo una spiegazione intuitiva di come dal Lemma di Poincaré si possa dedurre che l'integrale di una forma chiusa non muta se la curva viene "deformata con continuità". Supponiamo che ω sia una forma differenziale chiusa su un aperto U di \mathbb{R}^2 . Consideriamo l'integrale curvilineo di ω esteso ad una curva chiusa γ (con sostegno in U). Supponiamo di deformare (in una zona) la curva γ , trasformandola in una nuova curva γ_1 , in modo che la deformazione avvenga dentro un disco aperto C interamente contenuto in U . Se si considera la differenza dei due integrali curvilinei (quello esteso a γ meno quello esteso a γ_1), il risultato è come se si facesse un integrale curvilineo esteso ad una curva chiusa interamente contenuta nel disco C . Si osservi infatti che le due curve coincidono fuori da C , e quindi, facendo la differenza dei due integrali, il contributo dei tratti di curva che stanno fuori da C è nullo. D'altra parte, il disco C è un insieme convesso; dunque, essendo ω una forma chiusa, la sua restrizione a C è una forma esatta. Ciò prova che la differenza dei due integrali curvilinei, essendo equivalente ad un integrale lungo una curva chiusa contenuta in C , è zero. Possiamo concludere che se ω è una forma chiusa e γ è una curva chiusa, l'integrale curvilineo di ω esteso a γ non muta se si deforma γ in un piccolo tratto. È un fatto intuitivo, e dimostrabile rigorosamente, che se due curve chiuse, entrambe con sostegno in un aperto U di \mathbb{R}^2 , differiscono di poco (non solo in un piccolo tratto), allora è possibile deformare una nell'altra con

un numero finito di piccole deformazioni in modo che ciascuna di queste avvenga dentro un disco contenuto in U . Da ciò si deduce che se due curve differiscono di poco, l'integrale di una forma chiusa esteso a una curva o all'altra è lo stesso.

Immaginiamo ora di avere (in un aperto U di \mathbb{R}^2) una famiglia di curve chiuse $\gamma_\lambda(t)$ che dipendono con continuità da un parametro λ che varia in un intervallo (si pensi, ad esempio, alla famiglia di circonferenze $\gamma_r(t)$ considerate prima: in tal caso il parametro che distingue una curva da un'altra è il raggio r). Per la dipendenza continua da λ , nel passare da una curva ad un'altra della famiglia, si può dare al parametro una sequenza di valori in modo da ottenere delle curve intermedie con la proprietà che due qualunque curve consecutive siano sufficientemente vicine tra loro. Per quanto visto prima, se ω è una forma chiusa in U , passando da una curva alla curva successiva della sequenza, l'integrale curvilineo non cambia. Ciò prova, almeno intuitivamente, che l'integrale curvilineo di ω lungo una qualunque curva della famiglia non dipende dalla curva considerata.

Definizione (di curve omotope relativamente ai loro estremi). Sia $D \subseteq \mathbb{R}^k$. Due curve $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che $p := \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ e $q := \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ sono dette omotope in D relativamente a $\{p, q\}$ se esiste un'omotopia H tra le curve che lascia fermi gli estremi p e q . Vale a dire, esiste una funzione continua $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ tale che per ogni $t \in [a, b]$, $H(0, t) = \gamma_0(t)$ e $H(1, t) = \gamma_1(t)$ e, inoltre $H(s, 0) = p$ e $H(s, 1) = q$ per ogni $s \in [0, 1]$. La funzione H si chiama *omotopia* di γ_0 e γ_1 relativa a $\{p, q\}$.⁷

Le suddette “chiacchiere” si concretizzano nel seguente risultato:

Teorema (di invarianza per omotopia). Se ω è una forma chiusa in un aperto U di \mathbb{R}^k e se γ_1 e γ_2 sono due curve omotope in U relativamente ai loro estremi, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

In particolare, per le curve chiuse si ottiene il seguente

Corollario. Se ω è una forma chiusa in un aperto U di \mathbb{R}^k e se γ_1 e γ_2 sono due curve chiuse omotope in U , allora

$$\oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma_2} \omega.$$

In particolare, se una curva chiusa γ è omotopa (in U) ad una curva costante, risulta

$$\oint_{\gamma} \omega = 0.$$

Quindi, se U è semplicemente connesso l'integrale lungo ogni curva chiusa è nullo e, di conseguenza, ω è una forma esatta.

In definitiva, si ha il seguente risultato

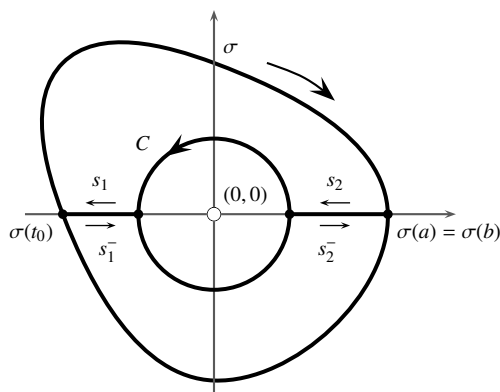
Teorema di Poincaré. Se una forma differenziale (continua) è chiusa ed è definita in un insieme semplicemente connesso, allora è esatta.

⁷Con lo stesso artificio usato per la nozione di omotopia, diciamo che due curve $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow D$ e $\gamma_1 : [c, d] \rightarrow D$, aventi gli stessi estremi $p := \gamma_0(a) = \gamma_1(c)$ e $q := \gamma_0(b) = \gamma_1(d)$ sono omotope in D relativamente a $\{p, q\}$, se lo sono le curve riparametrizzate $\tilde{\gamma}_0(t) = \gamma_0(a + t(b - a))$ e $\tilde{\gamma}_1(t) = \gamma_1(c + t(d - c))$.

Il teorema di Poincarè fornisce soltanto una condizione sufficiente affinché una forma sia esatta. Consideriamo, ad esempio, la forma

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

Questa forma è chiusa ma il suo dominio, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, non è semplicemente connesso. Come si può decidere se questa forma è esatta? Ricordiamo che una forma è esatta se e solo se l'integrale è nullo lungo qualunque semplice curva chiusa (contenuta nel dominio della forma, ovvio!). Facciamo vedere, in modo un po' euristico, che questo è vero per ω . Una dimostrazione rigorosa potrà essere fatta più avanti usando le formule di Gauss-Green. Osserviamo che l'integrale di ω lungo qualunque curva chiusa contenuta in un sottoinsieme semplicemente connesso del dominio di ω è necessariamente nullo per il corollario precedente. Basta fare vedere che la stessa affermazione vale anche per le curve che "girano attorno" una volta all'origine. Consideriamo una situazione come in figura: La curva σ è una generica curva che gira attorno all'origine, C è una circonferenza centrata nell'origine di raggio r opportunamente piccolo (cioè $C(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$), e s_1 ed s_2 sono segmenti (anch'essi parametrizzati) come in figura. Infine s_1^- ed s_2^- sono i segmenti s_1 ed s_2 , rispettivamente, percorsi in senso opposto. (Scrivere per esercizio le parametrizzazioni, essendo t_0 tale che $\sigma(t_0)$ appartiene all'asse x .)



Con riferimento alla figura, consideriamo la curva γ_- ottenuta concatenando in sequenza $\sigma|_{[a,t_0]}$, s_2^- , $C|_{[\pi,2\pi]}$ ed s_1^- . Siccome γ_- è contenuta nel semipiano $y \leq 0$ (privato dell'origine) che è un sottoinsieme semplicemente connesso del dominio di ω si ha che

$$0 = \int_{\gamma_-} \omega = \int_{\sigma|_{[a,t_0]}} \omega + \int_{s_1^-} \omega + \int_{C|_{[\pi,2\pi]}} \omega + \int_{s_2^-} \omega.$$

Si definisce poi la curva γ_+ concatenando le curve $\sigma|_{[t_0,b]}$, s_1 , $C|_{[0,\pi]}$ ed s_2 . In modo analogo si ha che

$$0 = \int_{\gamma_+} \omega = \int_{\sigma|_{[t_0,b]}} \omega + \int_{s_1} \omega + \int_{C|_{[0,\pi]}} \omega + \int_{s_2} \omega.$$

Sommando queste due identità e tenendo conto del fatto che

$$\int_{s_1} \omega = - \int_{s_1^-} \omega, \quad \text{e} \quad \int_{s_2} \omega = - \int_{s_2^-} \omega,$$

e che

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma|_{[a,t_0]}} \omega + \int_{\sigma|_{[t_0,b]}} \omega, \quad \text{e} \quad \int_C \omega = \int_{C|_{[0,\pi]}} \omega + \int_{C|_{[\pi,2\pi]}} \omega,$$

otteniamo

$$\int_{\sigma} \omega + \int_C \omega = 0.$$

(Si faccia caso alle orientazioni scelte.) Si ha pertanto che $\int_{\sigma} \omega$ è zero se e soltanto se è nullo l'integrale su una circonferenza centrata nell'origine. Con un calcolo diretto, si vede subito che $\int_C \omega = 0$. Questo ci permette di concludere che la forma ω è esatta.

Definizione (arco orientato). Un arco (di curva regolare) C si dice *orientato* se si è scelto uno dei due sensi di percorrenza. Se l'arco non è chiuso (ossia, è il sostegno di una curva semplice e regolare con estremi distinti), ciò equivale ad aver deciso quale dei due estremi è il primo e quale il secondo.

Si osservi che ogni parametrizzazione di un arco orientato percorre l'arco in modo *concorde* o *discordo* con l'orientazione scelta, e che due parametrizzazioni di uno stesso arco (non necessariamente orientato) possono essere *tra loro concordi* o *discordi*.

Concludiamo le disquisizioni sugli integrali curvilinei con il seguente importante risultato, di cui omettiamo la dimostrazione (è una conseguenza della formula di cambiamento di variabile negli integrali):

Teorema (indipendenza dalla parametrizzazione per integrali curvilinei orientati). Sia C un arco di curva regolare (non necessariamente orientato) e siano γ e σ due parametrizzazioni di C . Allora, data una forma differenziale ω su C , risulta

$$\int_{\gamma} \omega = \pm \int_{\sigma} \omega,$$

a seconda che le due parametrizzazioni siano tra loro concordi o discordi. Analogamente, dato un campo vettoriale \mathbf{w} su C , si ha

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{p} = \pm \int_{\gamma_2} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{p},$$

a seconda che γ e σ siano tra loro concordi o discordi.

Dimostrazione Facciamo la dimostrazione per curve in \mathbb{R}^2 . Siano $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ due curve regolari equivalenti con $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ e $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$, e sia $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ una funzione continua suriettiva, C^1 su (a, b) con $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$, tale che $\gamma(t) = \sigma(\varphi(t))$. Allora, se $\omega(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \omega &= \int_c^d [A(\sigma(\tau))\sigma_1'(\tau) + B(\sigma(\tau))\sigma_2'(\tau)] d\tau \\ &= \text{sign}(\varphi') \int_a^b [A(\sigma(\varphi(t)))\sigma_1'(\varphi(t)) + B(\sigma(\varphi(t)))\sigma_2'(\varphi(t))] dt \\ &= \text{sign}(\varphi') \int_a^b [A(\gamma(t))\gamma_1'(t) + B(\gamma(t))\gamma_2'(t)] dt = \text{sign}(\varphi') \int_{\gamma} \omega. \end{aligned}$$

Qui con $\text{sign}(\varphi')$ si intende il segno di $\varphi'(t)$ che è costante per ogni $t \in [a, b]$ (si veda anche la nota nella dimostrazione del teorema analogo per gli integrali curvilinei non orientati). Chiaramente $\text{sign}(\varphi')$ vale 1 se γ e σ sono concordi e vale -1 se sono discordi. \square

Il precedente teorema permette di definire il concetto di integrale di una forma differenziale (o di un campo vettoriale) su un arco orientato C senza bisogno che questo sia *a priori* parametrizzato (la definizione è lasciata per esercizio agli studenti). In pratica, per calcolare l'integrale su C basta scegliere una qualunque parametrizzazione γ di C ; se questa è concorde con l'orientazione, allora l'integrale sull'arco coincide con l'integrale sulla curva parametrica γ , altrimenti basterà cambiare di segno all'integrale su γ .

Esercizio. Studiare le seguenti forme differenziali:

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \quad \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dx - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dy;$$

$$x dx + y^2 dy + z dz; \quad (x + y) dx - y^2 dy; \quad \frac{y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali curvilinei di forme differenziali (con orientazione antioraria):

$$\oint_{\gamma} (x^2 + y) dx + xy dy, \quad \gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0\};$$

$$\oint_{\gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}, \quad \gamma = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}.$$

Esercizio. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{x}{y} dx + \frac{x+2}{y^2} dy,$$

dove γ è il segmento di primo estremo $(1, 1)$ e secondo estremo $(2, 3)$.

Esercizio. Verificare che la forma differenziale

$$\omega = \left(2xy + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(x^2 + \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dy$$

è esatta e determinarne una primitiva.

Esercizio. Calcolare

$$\int_{\gamma} (1 + ye^{xy}) dx + (xe^{xy} + \cos y) dy$$

lungo una qualunque curva di estremi $(-\pi, -\pi/2)$ e $(\pi/2, \pi)$.

Esercizio. Calcolare il lavoro compiuto dal campo di forze

$$\mathbf{f} = (x^2 - y^2) \mathbf{i} + 2xy \mathbf{j}$$

su una particella che percorre (una sola volta) in senso antiorario il quadrato di lato a e di vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) e $(0, a)$.

Esercizio. Determinare il centro di massa (geometrico) della curva γ definita dalle seguenti equazioni parametriche: $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

2.2.7 Determinazione di una primitiva di una forma esatta

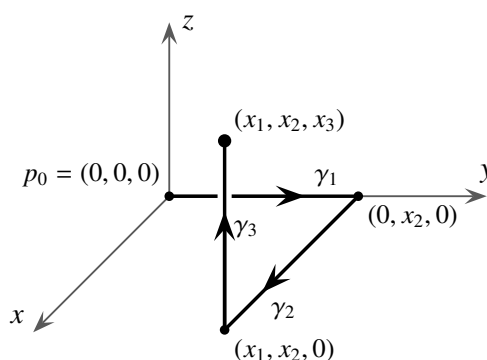
Supponiamo di sapere, per qualche motivo, che una forma assegnata ω è esatta, cioè che esiste una funzione f tale che $df = \omega$. Il problema che si pone naturalmente è la determinazione di una tale f .

Se la forma ω è esatta in un aperto connesso $U \subseteq \mathbb{R}^k$ allora, fissato $p_0 \in U$, per ogni arbitrario punto $x = (x_1, \dots, x_k) \in U$ esiste una curva $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow U$ con $\gamma_x(0) = p_0$ e $\gamma_x(1) = x$. Sappiamo che l'integrale curvilineo $\int_{\gamma_x} \omega$ è indipendente dalla scelta di γ_x (purché gli estremi siano p_0 e x). Possiamo porre

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega.$$

La stessa dimostrazione fatta per il teorema di dipendenza dagli estremi mostra che f è una primitiva di ω .

Quale è la scelta più appropriata per la curva γ_x ? Dipende dalla forma e dal dominio. Spesso una scelta “buona” è il segmento $[p_0, x]$ (come nella dimostrazione del lemma di Poincaré), oppure una spezzata come, per esempio (qui si è preso $p_0 = (0, 0, 0)$),



In questo esempio γ_1 , γ_2 e γ_3 sono i segmenti che costituiscono la spezzata.

Un altro approccio, più diretto e formale, al problema di determinare una primitiva consiste nello sfruttare il fatto che, se

$$\omega = \sum_{i=1}^k A_i(x_1, \dots, x_k) dx_i,$$

allora deve essere

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_k) = A_1(x_1, \dots, x_k), \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_k) = A_k(x_1, \dots, x_k). \end{cases}$$

Si consideri il seguente esempio:

Esempio. La forma $\omega = (6xy - ze^{xz})dx + (3x^2 + z)dy + (y - xe^{xz})dz$ è esatta in \mathbb{R}^3 . Per trovarne una primitiva f osserviamo che deve essere

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6xy - ze^{xz}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3x^2 + z \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y - xe^{xz}. \end{cases}$$

Integrando la prima equazione rispetto ad x otteniamo

$$f(x, y, z) = 3x^2y - e^{xz} + g(y, z)$$

dove $g(y, z)$ è un'arbitraria funzione di y e z (quindi costante rispetto ad x). Derivando rispetto ad y e z , allora, la seconda e la terza equazione diventano

$$\begin{cases} 3x^2 + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = 3x^2 + z \\ -xe^{xz} + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = y - xe^{xz}. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = z \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = y. \end{cases}$$

Integrando la prima di queste ultime equazioni rispetto ad y otteniamo

$$g(y, z) = zy + h(z)$$

dove $h(z)$ è un'arbitraria funzione di z . Sostituendo nella seconda, otteniamo $h'(z) = 0$ quindi h è una costante e $g(y, z) = zy + c$. In conclusione $f(x, y, z) = 3x^2y - e^{xz} + zy + c$ con c costante arbitraria.

Esempio. Si consideri la forma

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2}dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy.$$

Con il metodo visto nell'esempio precedente si ottiene la seguente primitiva per ω in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$: $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. Quindi ω è esatta. Come già osservato in precedenza, ω è chiusa ma il suo dominio non è semplicemente connesso. Non è dunque possibile dedurre direttamente l'esattezza della forma dal teorema di Poincaré.

Capitolo 3

Integrali doppi

3.1 Integrale doppio su rettangoli

3.1.1 Partizioni puntate e funzioni integrabili

Una *partizione* di un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ è una coppia $p = (p_1, p_2)$ di partizioni degli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$, rispettivamente.

Date due partizioni, $p_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ e $p_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ di $[c, d]$, il rettangolo R viene suddiviso in nm sottorettangoli

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

di area $\mu(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. In ogni sottorettangolo R_{ij} scegliamo un punto c_{ij} . L'insieme s dei punti c_{ij} si dice una *scelta di punti* nella partizione $p = (p_1, p_2)$ di R . Ogni rettangolo R_{ij} della partizione col punto c_{ij} scelto si dice un *rettangolo puntato*. La coppia $\alpha = (p, s)$, costituita dalla partizione $p = (p_1, p_2)$ di R e dalla scelta s , si dice una *partizione puntata* di R . Il *parametro di finezza* di $\alpha = (p, s)$, denotato con $|\alpha|$, è la massima ampiezza dei lati di tutti i possibili rettangoli individuati dalla partizione p .

Sia ora assegnata una funzione $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Ad ogni partizione puntata $\alpha = (p, s)$ di $R = [a, b] \times [c, d]$ possiamo associare il numero

$$S_f(\alpha) = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} f(c_{ij})\mu(R_{ij}),$$

dove, ricordiamo, $\mu(R_{ij})$ denota l'area del generico sottorettangolo R_{ij} individuato dalla partizione (la lettera μ , cioè la m greca, significa *misura*, e in \mathbb{R}^2 si chiama area o misura bidimensionale) e c_{ij} è il punto scelto in R_{ij} . Si ha così una funzione reale $S_f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ definita nell'insieme \mathcal{P} delle partizioni puntate del rettangolo R .

Per meglio comprendere il significato del numero $S_f(\alpha)$ individuato dalla partizione puntata α , è bene osservare che se la funzione f è positiva, ogni termine $f(c_{ij})\mu(R_{ij})$ della sommatoria rappresenta il volume di un parallelepipedo di altezza $f(c_{ij})$ che ha per base il rettangolo R_{ij} . Quindi, se

tutti i rettangoli R_{ij} sono abbastanza piccoli, c'è da aspettarsi che il numero $S_f(\alpha)$ rappresenti una buona approssimazione del volume del solido

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

costituito dai punti che stanno sopra il rettangolo R e sotto il grafico $z = f(x, y)$ della funzione f .

Intuitivamente l'integrale doppio (secondo Cauchy-Riemann) in R della funzione $f(x, y)$ è, quando esiste, il valore limite che si ottiene facendo tendere a zero i lati dei sottorettangoli individuati dalle possibili partizioni puntate di R . Diamo la definizione precisa.

Definizione (integrale doppio in un rettangolo). Sia $f(x, y)$ una funzione reale definita (almeno) in un rettangolo R con i lati paralleli agli assi cartesiani. Si dice che un numero $I \in \mathbb{R}$ è l'*integrale doppio di f in R* se, fissato un arbitrario "errore" $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, comunque si assegni una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha|$ minore di δ , la distanza $|S_f(\alpha) - I|$ tra la somma $S_f(\alpha)$ e il numero I è minore di ε . Se ciò accade, si scrive

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow 0} S_f(\alpha) = I$$

e la funzione f si dice *integrabile* in R (secondo Cauchy-Riemann).¹

L'integrale doppio di una funzione $f(x, y)$ in un rettangolo R si denota con uno dei seguenti simboli:

$$\int_R f, \quad \int_R f \, d\mu, \quad \int_R f(p) \, d\mu, \quad \int_R f(x, y) \, dx dy,$$

$$\iint_R f, \quad \iint_R f \, d\mu, \quad \iint_R f(p) \, d\mu, \quad \iint_R f(x, y) \, dx dy.$$

Si osservi che il numero

$$I = \iint_R f(x, y) \, dx dy$$

non dipende dai simboli usati per indicare le variabili. Ad esempio al posto di x e y si possono usare le lettere u e v (il limite di $S_f(\alpha)$ per $|\alpha| \rightarrow 0$ non cambia).

Un'interpretazione geometrica della nozione di integrale doppio per funzioni non negative è il volume dell'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

¹È da notare che questo limite è una nozione un po' diversa da quella usuale di limite per funzioni di più variabili. Come già detto, $\lim_{|\alpha| \rightarrow 0} S_f(\alpha) = I$ significa che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$ t.c. $|S_f(\alpha) - I| < \varepsilon$ per ogni partizione puntata α con la proprietà che $|\alpha| < \delta$. La stessa dimostrazione che si fa per i limiti di funzioni di una variabile mostra che le usuali proprietà di unicità, linearità e permanenza del segno continuano a valere per questo tipo di limiti.

3.1.2 Proprietà elementari

Osservazione. Dalla definizione di integrale doppio segue che, dato $k \in \mathbb{R}$, la funzione costante $f(x, y) \equiv k$ è integrabile in ogni rettangolo R e risulta

$$\iint_R k \, dx dy = k\mu(R).$$

Infatti, data una partizione puntata α come nella definizione di integrale doppio, si ha

$$S_k(\alpha) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} k\mu(R_{ij}) = k \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \mu(R_{ij}) = k\mu(R).$$

Dunque,

$$\iint_R k \, dx dy = \lim_{|\alpha| \rightarrow 0} S_f(\alpha) = k\mu(R).$$

Dalla precedente definizione segue facilmente che l'integrale doppio, quando esiste, è unico (unicità del limite). Inoltre, dalla linearità del limite si deduce che se f e g sono due funzioni integrabili in un rettangolo R ed a e b sono due numeri, allora anche la funzione $af + bg$ è integrabile e si ha

$$\int_R (af + bg) \, d\mu = a \int_R f \, d\mu + b \int_R g \, d\mu,$$

cioè l'integrale gode della **proprietà di linearità**. Infatti, data una partizione puntata α come nella definizione di integrale doppio, si ha

$$S_{af+bg}(\alpha) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} [af(c_{ij}) + bg(c_{ij})]\mu(R_{ij}) = a \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} f(c_{ij})\mu(R_{ij}) + b \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} g(c_{ij})\mu(R_{ij}).$$

Allora,

$$\int_R (af + bg) \, d\mu = \lim_{|\alpha| \rightarrow 0} S_{af+bg}(\alpha) = a \lim_{|\alpha| \rightarrow 0} S_f(\alpha) + b \lim_{|\alpha| \rightarrow 0} S_b(\alpha) = a \int_R f \, d\mu + b \int_R g \, d\mu.$$

Questa proprietà implica che l'integrale è un *funzionale lineare* sullo spazio vettoriale delle funzioni integrabili (nel rettangolo R).

Sempre dalla definizione di integrale (usando la permanenza del segno del limite) si deduce che se f è integrabile in un rettangolo R e $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in R$, allora

$$\int_R f \, d\mu \geq 0, \tag{3.1}$$

e da ciò segue (tenendo conto della linearità) la seguente proprietà dell'integrale doppio:

Proprietà di monotonia. Siano f e g due funzioni integrabili in un rettangolo R . Se $f(x, y) \leq g(x, y), \forall (x, y) \in R$, allora

$$\int_R f \, d\mu \leq \int_R g \, d\mu.$$

Per verificare la validità della proprietà di monotonia basta applicare la (3.1) alla funzione $g(x, y) - f(x, y)$ e tenere conto della linearità dell'integrale.

Esercizio. Usando la definizione dimostrare le seguenti proprietà dell'integrale:

- Se f è integrabile su R allora $|f|$ lo è, e

$$\left| \iint_R f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_R |f(x, y)| \, dx dy;$$

- Se f è integrabile su R allora

$$\left| \iint_R f(x, y) \, dx dy \right| \leq \mu(R) \sup_{(x, y) \in R} |f(x, y)|.$$

3.1.3 Insiemi trascurabili, Teoremi di integrabilità ed equivalenza

Ricordiamo che un insieme si dice *numerabile* se ha la stessa cardinalità dei numeri naturali (cioè se può essere messo in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N}). È noto che l'insieme dei razionali è numerabile, ma non lo è l'insieme dei reali.

Definizione. Un sottoinsieme C di \mathbb{R}^2 si dice *trascurabile* (in \mathbb{R}^2), o di *misura (bidimensionale) nulla* secondo Lebesgue (si legge “lebeg”), se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia contabile (cioè finita o numerabile) di rettangoli che copre C (ossia, la cui unione contiene C) ed ha area totale minore di ε (nel senso che la somma, o la serie, delle aree dei rettangoli è minore di ε).

Esercizio. Dimostrare che un segmento è un insieme trascurabile.

Svolgimento. Siano $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ gli estremi del segmento s . Ogni punto di s può essere scritto come $(1 - t)P_0 + tP_1$ per una opportuna scelta di $t \in [0, 1]$. Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{4\|P_0 - P_1\|^2}{n} < \varepsilon$ e, per $k = 1, \dots, n$, consideriamo i quadrati Q_k (con i lati paralleli agli assi) centrati nei punti $q_k = (1 - \frac{k}{n})P_0 + \frac{k}{n}P_1$ ed aventi lato uguale a $\frac{2\|P_0 - P_1\|}{n}$. Osserviamo che

$$s \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} Q_k.$$

L'area di ciascuno dei Q_k è $\frac{4\|P_0 - P_1\|^2}{n^2}$ e la somma delle aree dei Q_k è data da

$$\sum_{k=1}^n \frac{4\|P_0 - P_1\|^2}{n^2} = \frac{4\|P_0 - P_1\|^2}{n} < \varepsilon.$$

Quindi s è trascurabile.

Si potrebbe dimostrare che il grafico ($y = \varphi(x)$ o $x = \psi(y)$) di una funzione continua (definita in un intervallo chiuso e limitato) è un insieme trascurabile di \mathbb{R}^2 . Inoltre l'unione di un numero finito (o, addirittura, di un'infinità numerabile) di insiemi trascurabili è ancora un insieme trascurabile. In particolare gli insiemi costituiti da un numero finito (o da un'infinità numerabile) di punti sono trascurabili.

Teorema di integrabilità. Una funzione $f(x, y)$ è integrabile in un rettangolo R se e solo se (in detto rettangolo) è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

Una prima conseguenza del teorema di integrabilità è che la somma, il prodotto e la composizione di funzioni integrabili è ancora integrabile (il quoziente potrebbe essere una funzione non limitata, e quindi non integrabile). Facciamo notare, inoltre, che se una funzione è continua in un rettangolo chiuso R , allora è anche integrabile (in tale rettangolo), essendo limitata (per il Teorema di Weierstrass) ed avendo un insieme vuoto (quindi trascurabile) di punti di discontinuità. Più in generale, se una funzione ha un numero finito (o un'infinità numerabile) di punti di discontinuità, allora, purché sia limitata, è integrabile (la limitatezza, questa volta, non è assicurata).

Teorema di equivalenza. Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni integrabili in un rettangolo R . Se dette funzioni differiscono soltanto in un insieme trascurabile di punti di R , allora

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \iint_R g(x, y) \, dx dy.$$

Osservazione. Per integrare una funzione $f(x, y)$ in un rettangolo R non occorre che questa sia necessariamente definita in tutti i punti del rettangolo. Ad esempio, se è definita in tutto R tranne un numero finito di punti, può essere estesa assegnandole dei valori arbitrari in detti punti (per esempio il valore zero). In base al teorema di equivalenza, due differenti estensioni hanno lo stesso integrale.

In pratica tutte le funzioni che uno studente di ingegneria può incontrare nello svolgere gli esercizi hanno un insieme trascurabile di punti di discontinuità. Il motivo è dovuto al fatto che ogni "ragionevole funzione" si ottiene combinando tra loro le note funzioni elementari con operazioni di somma, prodotto, quoziente, composizione, restrizione ad un intervallo e inversione, ed ogni funzione elementare, se non è continua, ha al più un insieme trascurabile di punti di discontinuità. Quindi, nella pratica, il compito di verificare se una funzione è integrabile (in un rettangolo) si riduce a controllare se (in detto rettangolo) è limitata (cioè, se esiste una costante che la maggiora in valore assoluto).

Esempio. La funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

è integrabile in un rettangolo (chiuso) R se e solo se R non contiene il punto $(0, 0)$. Infatti, se R non contiene l'origine, allora, essendo continua in tutti punti del suo dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, è continua anche in R ed è quindi integrabile (in detto rettangolo). Se invece R contiene l'origine, allora la funzione non può essere limitata in tale rettangolo, dato che $f(x, y) \rightarrow +\infty$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Si fa notare che in questo caso la non integrabilità non dipende dal fatto che non è definita in $(0, 0)$: può essere estesa assegnandole un valore qualunque nell'origine, ma ogni estensione non potrà renderla limitata (casomai la renderà discontinua in un punto, ma che importa: un punto è trascurabile).

Esercizio. Determinare il dominio della funzione

$$F(\lambda) = \iint_{R(\lambda)} \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx dy,$$

dove $R(\lambda)$ è il quadrato $[\lambda - 1, \lambda + 1] \times [\lambda - 1, \lambda + 1]$.

Suggerimento. Trovare l'insieme dei numeri $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il suddetto integrale ha senso (cioè rappresenta un numero). Per esempio, $F(0)$ è un numero reale ben definito? Cosa si può dire riguardo a $F(2)$? Ha senso?

3.1.4 Teorema di riduzione

Il risultato che segue riconduce il calcolo di un integrale doppio (in un rettangolo) a due successive integrazioni semplici.

Teorema di Riduzione (o di Fubini) per gli integrali doppi. Sia $f(x, y)$ una funzione reale integrabile su un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$. Allora, quando ha senso, risulta

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx. \quad (3.2)$$

Più esplicitamente,

- Se per ogni $y \in [c, d]$ la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è integrabile, allora la funzione $y \mapsto \int_a^b f(x, y) \, dx$ è integrabile in $[c, d]$ e

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy;$$

- Se per ogni $x \in [a, b]$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è integrabile, allora la funzione $x \mapsto \int_c^d f(x, y) \, dy$ è integrabile in $[a, b]$ e

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Gli integrali che compaiono al secondo e terzo membro della formula (3.2) si chiamano *integrali iterati*.

In sostanza, il Teorema di riduzione afferma che (quando è possibile) per calcolare l'integrale doppio di $f(x, y)$ in $[a, b] \times [c, d]$ si integra prima in $[a, b]$ la funzione $f(x, y)$ rispetto alla variabile x , ottenendo così una funzione

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx,$$

e poi si integra $g(y)$ nell'intervallo $[c, d]$. Ovviamente occorre che tali operazioni abbiano senso; cioè che per ogni $y \in [c, d]$ la funzione parziale $x \mapsto f(x, y)$ sia integrabile (in $[a, b]$) e che la funzione $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ che si ottiene dopo aver eseguito la prima integrazione sia a sua volta integrabile.

In modo equivalente, quando ha senso, si può prima integrare rispetto alla variabile y , ottenendo una funzione della sola x , e integrare poi rispetto alla x .

Osservazione. Il fatto che la funzione f del teorema di riduzione sia integrabile in R non implica automaticamente l'integrabilità delle funzioni "parziali" $x \mapsto f(x, y)$ e $y \mapsto f(x, y)$ (si veda l'esercizio seguente). Questa deve essere dimostrata per potere applicare il teorema. Naturalmente, se

f è continua (e pertanto integrabile) allora sono continue (e pertanto integrabili) anche le funzioni parziali.

Esercizio Si consideri la funzione $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1/2 \text{ e } y \text{ è razionale,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Verificare che f è integrabile su $[0, 1] \times [0, 1]$ ma $\int_0^1 f(1/2, y) dy$ non è definito.

Per convenzione un'espressione del tipo $\varphi(x) dx$ si può scrivere anche $dx \varphi(x)$. Tenendo conto di ciò, la tesi del Teorema di riduzione si può esprimere nel modo seguente:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Osservazione. Una formula utile che segue dalla proprietà di linearità (degli integrali di una variabile) e dal teorema di riduzione è la seguente: Sia $R = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo e siano $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni (di una variabile) integrabili, allora

$$\iint_R f(x)g(y) dx dy = \int_a^b \left(f(x) \int_c^d g(y) dy \right) dx = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy.$$

Esercizio. Calcolare

$$\iint_R xy dx dy,$$

dove $R = [0, 1] \times [-1, 2]$.

3.2 Integrale doppio su un arbitrario insieme limitato

3.2.1 Definizione e proprietà elementari

Definizione (di estensione standard). Dato un insieme A di \mathbb{R}^2 e data $f(x, y)$ definita (almeno) in A , la funzione

$$\hat{f}_A(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin A \end{cases}$$

si chiama *estensione standard di f (relativa ad A)*.

Spesso risulterà evidente dal contesto rispetto a quale insieme A si sta considerando l'estensione standard di una funzione f . In tal caso scriveremo \hat{f} al posto di \hat{f}_A .

Osservazione. Se f è una funzione integrabile su un rettangolo R e R' è un rettangolo tale che $R \subseteq R'$ allora, dalla definizione di integrale, tenendo conto che \hat{f}_R è nulla in $R' \setminus R$, segue subito che

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \iint_{R'} \hat{f}_R(x, y) \, dx dy.$$

Definizione (di integrale doppio in un arbitrario insieme limitato). Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili definita (almeno) in un sottoinsieme limitato A di \mathbb{R}^2 . Consideriamo un (arbitrario) rettangolo R contenente A . Diremo che f è *integrabile in A* se è integrabile in R la sua estensione standard \hat{f} . In tal caso l'integrale di f in A si definisce nel modo seguente:

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy := \iint_R \hat{f}(x, y) \, dx dy.$$

La suddetta definizione è ben posta. Infatti l'osservazione precedente implica che il secondo integrale non dipende dal rettangolo R contenente A . Per vederlo, consideriamo due rettangoli R_1 ed R_2 entrambi contenenti A (ma non necessariamente tali che uno dei due contenga l'altro). Prendiamo R' un rettangolo contenente $R_1 \cup R_2$. Per l'osservazione,

$$\iint_{R_1} \hat{f}_A(x, y) \, dx dy = \iint_{R'} \hat{f}_A(x, y) \, dx dy = \iint_{R_2} \hat{f}_A(x, y) \, dx dy.$$

Da cui segue che $\iint_A f(x, y) \, dx dy$ non dipende dalla scelta di R .

Esercizio. Dimostrare che le proprietà di linearità e monotonia sono ancora valide nel caso generale.

Esercizio. Dimostrare, nel caso generale, che se f è integrabile su A allora anche $|f|$ lo è, e

$$\left| \iint_A f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| \, dx dy.$$

Teorema (additività rispetto all'insieme di integrazione). *Supponiamo che una funzione $f(x, y)$ sia integrabile sia in un insieme A che in un insieme B , con $A \cap B = \emptyset$. Allora f è integrabile in $A \cup B$ e*

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) \, dx dy = \iint_A f(x, y) \, dx dy + \iint_B f(x, y) \, dx dy.$$

Dimostrazione. Fissiamo un rettangolo R contenente $A \cup B$ e consideriamo, rispettivamente, le estensioni standard $\hat{f}_{A \cup B}$, \hat{f}_A e \hat{f}_B di f relative agli insiemi $A \cup B$, A e B . Dal fatto che $A \cap B = \emptyset$ si deduce facilmente che $\hat{f}_{A \cup B} = \hat{f}_A + \hat{f}_B$. Quindi

$$\int_{A \cup B} f = \int_R \hat{f}_{A \cup B} = \int_R (\hat{f}_A + \hat{f}_B) = \int_R \hat{f}_A + \int_R \hat{f}_B = \int_A f + \int_B f,$$

e ciò prova la tesi. □

3.2.2 Formule di riduzione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme del tipo

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

dove $\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue. Si dice che l'insieme A *presenta il caso semplice rispetto all'asse y* , o che è *y-sempllice*, perché ogni retta parallela a tale asse lo interseca in un intervallo (di estremi $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, per $x \in [a, b]$). Supponiamo che $f(x, y)$ sia una funzione integrabile in A . Dato un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ contenente A , per definizione l'integrale di f in A è

$$\iint_R \hat{f}(x, y) dx dy,$$

dove \hat{f} è l'estensione standard di f (relativa ad A). Dal Teorema di riduzione (Fubini) si ha

$$\iint_R \hat{f}(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d \hat{f}(x, y) dy.$$

D'altra parte

$$\int_c^d \hat{f}(x, y) dy = \int_c^{\varphi_1(x)} \hat{f}(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \hat{f}(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^d \hat{f}(x, y) dy,$$

e tenendo conto che \hat{f} è nulla fuori da A , si ottiene

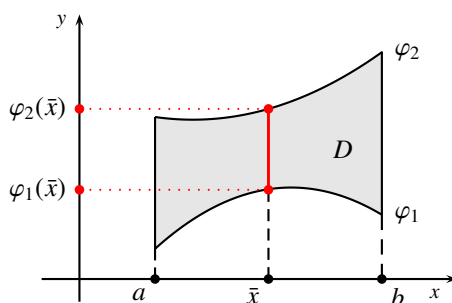
$$\int_c^d \hat{f}(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \hat{f}(x, y) dy.$$

Poiché in A le due funzioni f ed \hat{f} coincidono, si ha

$$\int_c^d \hat{f}(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Si ottiene così la seguente importante **formula di riduzione** (valida quando l'insieme di integrazione è *y-sempllice*):

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$



Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme del tipo

$$A = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

dove $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue ed $f(x, y)$ è integrabile in A , si ha l'altra **formula di riduzione**, valida quando A è x -semplice:

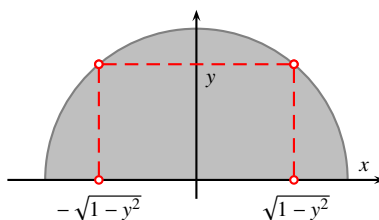
$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

Esempio. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D y \sqrt{1-y^2} dx dy$$

dove D è un semidisco di raggio 1, centrato nell'origine e contenuto nel semipiano $y \geq 0$.

Svolgimento. La difficoltà dei calcoli varia a seconda di come si svolge l'integrale. Il modo migliore, in questo caso, è "affettare" D parallelamente all'asse x come in figura:



In questo modo il teorema di riduzione ci dà

$$\iint_D y \sqrt{1-y^2} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y \sqrt{1-y^2} dx \right) dy = \int_0^1 2y(1-y^2) dy = \frac{1}{2}.$$

Procedendo invece ad affettare D parallelamente all'asse y , il teorema di riduzione dà

$$\iint_D y \sqrt{1-y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \sqrt{1-y^2} dy \right) dx$$

che naturalmente fornisce lo stesso risultato ma con qualche calcolo in più.

3.2.3 Misura di Peano-Jordan

Definizione. Un sottoinsieme limitato A di \mathbb{R}^2 si dice *misurabile (secondo Peano-Jordan)* quando è integrabile in A la funzione $f(x, y) \equiv 1$. In tal caso la *misura (bidimensionale)* di A , detta anche *area*, è il numero

$$\mu(A) = \iint_A dx dy.$$

Purtroppo, non tutti i sottoinsiemi limitati del piano sono misurabili. Si consideri, ad esempio, l'insieme A dei punti di \mathbb{R}^2 con entrambe le coordinate razionali comprese tra 0 e 1. Ossia

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Si potrebbe provare che la funzione \hat{f} che vale 1 in A e 0 nel complementare di A è discontinua in tutti i punti dell'intero quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, che ovviamente non è trascurabile. Pertanto \hat{f} non è integrabile e, di conseguenza, A non è misurabile (secondo Peano-Jordan). Lo è, però, secondo una più moderna teoria dell'integrazione dovuta al matematico francese Lebesgue. È bene precisare che l'importanza della teoria di Lebesgue non è dovuta al fatto che ci permette di misurare insiemi strani: sono le sue proprietà e i teoremi che ne conseguono che la rendono particolarmente utile, specialmente per le applicazioni alla Fisica e all'Ingegneria. In un certo senso la teoria dell'integrazione di Lebesgue sta a quella di Cauchy-Riemann come i numeri reali stanno ai razionali. I numeri razionali (gli unici noti al tempo di Pitagora) sono infatti sufficienti per misurare, con l'approssimazione che si desidera, tutte le grandezze fisiche che ci interessano, ma senza i numeri reali non ci sarebbero importanti risultati come il Teorema di Weierstrass, il Teorema di Rolle, ecc.

Osservazione. (*Insiemi trascurabili ed insiemi di misura nulla.*) Osserviamo che un insieme di misura nulla (quindi misurabile) è necessariamente trascurabile. Viceversa, un insieme trascurabile che sia anche misurabile ha automaticamente misura nulla. Non è vero, però, che un insieme trascurabile sia misurabile. L'insieme A introdotto sopra è un esempio di questo fatto.

Sia A un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^2 . Consideriamo la cosiddetta *funzione caratteristica* di A . Ossia la funzione $\mathbb{1}_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che vale 1 in A e 0 fuori di A . Non è difficile verificare che l'insieme dei punti di discontinuità di $\mathbb{1}_A$ coincide con ∂A . Si può pertanto concludere che A è misurabile se e solo se la sua frontiera è trascurabile. Ad esempio, è misurabile ogni insieme limitato la cui frontiera è unione finita di grafici ($y = \varphi(x)$ o $x = \psi(y)$) di funzioni continue.

Osservazione. Un risultato utile si ottiene dalle proprietà di monotonia e linearità. Se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile ed f è integrabile su A allora, posto $M = \sup_{(x,y) \in A} |f(x,y)|$, si ha $|\hat{f}_A(x,y)| \leq M \mathbb{1}_A(x,y)$. Dunque

$$\begin{aligned} \left| \iint_A f(x,y) \, dx dy \right| &= \left| \iint_R \hat{f}_A(x,y) \, dx dy \right| \leq \iint_R |\hat{f}_A(x,y)| \, dx dy \leq \\ &\leq \iint_R |M \mathbb{1}_A(x,y)| \, dx dy = M \iint_R \mathbb{1}_A(x,y) \, dx dy = M \mu(A), \end{aligned}$$

dove R è un rettangolo contenente A . Si ha cioè che

$$\left| \iint_A f(x,y) \, dx dy \right| \leq \mu(A) \sup_{(x,y) \in A} |f(x,y)|.$$

In particolare, se $\mu(A) = 0$ allora $\iint_A f(x,y) \, dx dy = 0$.

Ci è stato probabilmente insegnato che, data una funzione continua (anche solo a tratti) non negativa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, l'area del suo sottografico, cioè della regione piana

$$D := \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

è data da $\mu(D) = \int_a^b f(x) dx$. In che modo questa affermazione si accorda con la definizione di misura data sopra? La risposta è nel teorema di riduzione (Fubini) o, più precisamente, nelle fomule di riduzione:

$$\mu(D) = \iint_D dx dy = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Vediamo ora un'altra conseguenza del teorema di riduzione. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ limitato ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva e integrabile². Definiamo

$$I_t := \{x \in I : f(x) \geq t\} \quad \text{e} \quad g(t) := \mu_1(I_t),$$

supponendo che gli insiemi I_t siano misurabili per ogni t (eccettuato al più un insieme di misura 1-dimensionale nulla). Sia ora $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua, crescente e C^1 in $(0, +\infty)$, con $\phi(0) = 0$. Siccome f è integrabile è limitata e

$$s := \sup_{x \in I} \phi(f(x)) \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_0^s \phi'(t) g(t) dt &= \int_0^s \left(\phi'(t) \int_I \mathbb{1}_{I_t}(x) dx \right) dt = \\ &\stackrel{\text{(per Fubini)}}{=} \int_I \left(\int_0^s \phi'(t) \mathbb{1}_{I_t}(x) dt \right) dx = \int_I \left(\int_0^{f(x)} \phi'(t) dt \right) dx = \int_I \phi(f(x)) dx. \end{aligned}$$

Cioè

$$\int_I \phi(f(x)) dx = \int_0^s \mu_1(\{x \in I : f(x) \geq t\}) \phi'(t) dt. \quad (3.3)$$

Questa formula è una versione di una conseguenza immediata del teorema di Fubini: il cosiddetto *Principio di Cavalieri*³. In modo euristico, secondo questo principio l'area di una sottoinsieme limitato A del piano è la "somma" delle lunghezze delle sezioni ottenute tagliando questa parte di piano con tutte le rette parallele ad una direzione data.

Per capire il motivo per cui la (3.3) è una versione del principio di Cavalieri si ponga $\phi(t) = t$. Otteniamo

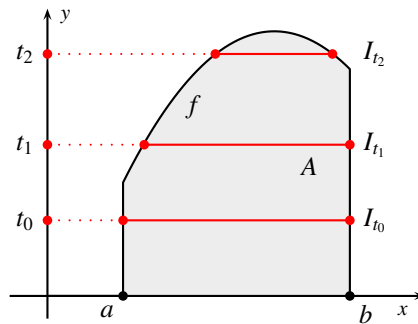
$$\int_I f(x) dx = \int_0^s \mu_1(\{x \in I : f(x) \geq t\}) dt. \quad (3.4)$$

Ricordando l'interpretazione geometrica dell'integrale a destra nella formula sopra come l'area A della parte di piano compresa tra il grafico di f e l'asse x (detta anche *sottografico* di f), possiamo

²Ricordiamo che, per definizione la misura 1-dimensionale di un sottoinsieme limitato S di \mathbb{R} è data da $\mu_1(S) = \int_{\inf S}^{\sup S} \mathbb{1}_S(x) dx$. Inoltre, per una funzione φ integrabile su S , $\int_S \varphi(x) dx = \int_{\inf S}^{\sup S} \hat{\varphi}(x) dx$, dove $\hat{\varphi}(x)$ è l'estensione di φ nulla fuori di S .

³Bonavventura Cavalieri (1598-1647) scoprì ed utilizzò questo criterio per calcolare l'area di alcune figure ed il volume di alcuni solidi. Si veda anche la discussione in merito nella parte sugli integrali tripli.

descrivere questo risultato in modo euristico dicendo che $\mu(A)$ è l'integrale delle lunghezze I_t delle sezioni di A con rette parallele all'asse x .



Il diagramma mostra A_t per tre valori di t . L'area della parte ombreggiata si può calcolare integrando le lunghezze degli insiemi A_t .

3.2.4 Teoremi della media

Primo teorema della media per gli integrali doppi. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile in un insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^2$ di misura non nulla. Allora la media di f in A , ossia

$$\frac{1}{\mu(A)} \iint_A f(p) d\mu,$$

è un numero compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f . In particolare, se f è continua ed A è connesso, allora (per il Teorema dei valori intermedi) esiste un punto $c \in A$ per il quale si ha

$$\iint_A f(p) d\mu = f(c)\mu(A).$$

Dimostrazione. Denotiamo, rispettivamente, con m e M l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(p)$ per $p \in A$. Si ha

$$m \leq f(p) \leq M, \quad \forall p \in A.$$

Quindi, per la proprietà di monotonia, risulta

$$\iint_A m d\mu \leq \iint_A f(p) d\mu \leq \iint_A M d\mu.$$

Dividendo i tre membri della suddetta disuguaglianza per l'area

$$\mu(A) = \iint_A d\mu$$

di A si ottiene la tesi. □

Secondo teorema della media per gli integrali doppi. Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni integrabili in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Se g è positiva in A , allora (quando ha senso) la media ponderata di f in

A (con peso g), ossia

$$\frac{\iint_A f(p)g(p) d\mu}{\iint_A g(p) d\mu},$$

è un numero compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f . Pertanto, se f è continua ed A è connesso, esiste un punto $c \in A$ per il quale si ha

$$\iint_A f(p)g(p) d\mu = f(c) \iint_A g(p) d\mu.$$

Dimostrazione. Denotiamo, rispettivamente, con m e M l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(p)$ per $p \in A$. Dato che $g(p) > 0$ in A , risulta

$$mg(p) \leq f(p)g(p) \leq Mg(p), \quad \forall p \in A.$$

Quindi, dalla proprietà di monotonia, si ottiene

$$m \iint_A g(p) d\mu \leq \iint_A f(p)g(p) d\mu \leq M \iint_A g(p) d\mu.$$

Dividendo (quando ha senso) i tre membri della precedente disuguaglianza per

$$\iint_A g(p) d\mu$$

si ottiene la tesi. □

Si osservi che il secondo teorema della media si riduce al primo quando $g(p)$ è costante.

Definizione Dato un insieme di misura non nulla $A \subseteq \mathbb{R}^2$, il suo *centro di massa geometrico* o *baricentro* è il punto (x_c, y_c) che ha per ascissa la 'media' delle ascisse e per ordinata la 'media' delle ordinate. Si ha pertanto

$$x_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A x dx dy, \quad y_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A y dx dy.$$

Si osservi che dal primo teorema della media segue

$$\inf_{(x,y) \in A} x \leq x_c \leq \sup_{(x,y) \in A} x \quad \text{e} \quad \inf_{(x,y) \in A} y \leq y_c \leq \sup_{(x,y) \in A} y.$$

Quindi, se A è contenuto in un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$, allora $a \leq x_c \leq b$ e $c \leq y_c \leq d$.

Se un sottoinsieme (limitato) $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rappresenta una piastra (non necessariamente omogenea) di densità superficiale $\delta(x, y)$, le coordinate del centro di massa sono date da *centro di massa! di una piastra*

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_A x \delta(x, y) dx dy, \quad y_c = \frac{1}{m} \iint_A y \delta(x, y) dx dy,$$

dove

$$m = \iint_A \delta(x, y) dx dy$$

è la massa della piastra.

Dal secondo teorema della media, prendendo $g(x, y) = \delta(x, y)$ e $f(x, y) = x$ per il calcolo di x_c , o $f(x, y) = y$ per y_c , segue che se la piastra A è contenuta in un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$, allora anche il suo centro di massa sta in R . Infatti,

$$a \leq \inf_{(x,y) \in A} x \leq \frac{\overbrace{\iint_A x \delta(x, y) dx dy}^{=x_c}}{\iint_A \delta(x, y) dx dy} \leq \sup_{(x,y) \in A} x \leq b$$

$$c \leq \inf_{(x,y) \in A} y \leq \frac{\overbrace{\iint_A y \delta(x, y) dx dy}^{=y_c}}{\iint_A \delta(x, y) dx dy} \leq \sup_{(x,y) \in A} y \leq d$$

Esempio. Determiniamo il centro di massa (geometrico) del semicerchio

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$$

Per ragioni di simmetria risulta $x_c = 0$. Occorre quindi calcolare soltanto l'ordinata y_c . L'area $\mu(A)$ del semicerchio è $\pi r^2/2$ e quindi

$$y_c = \frac{2}{\pi r^2} \iint_A y dx dy = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y dy = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4r}{3\pi}.$$

Si osservi che $4r/3\pi$ è un numero tra 0 ed r (in accordo col teorema della media); anzi, è addirittura minore di $r/2$ (per quale ragione deve essere così?).

Il *momento d'inerzia* rispetto ad un punto $c \in \mathbb{R}^2$ di una piastra omogenea A di peso m è il numero

$$I = \iint_A d(p, c)^2 \delta d\mu,$$

dove $d(p, c)$ è la funzione distanza di un generico punto p dal punto di riferimento c e $\delta = m/\mu(A)$ è la densità superficiale della piastra.

Se la piastra non è omogenea il suddetto integrale dà ancora il momento d'inerzia della piastra, ma in tal caso la densità è una funzione $\delta(p)$ del generico punto $p \in A$. Come nel caso di un filo, talcolta l'espressione $\delta(p) d\mu$ si denota col simbolo dm , detto *elemento di massa*.

Analogamente, il *momento d'inerzia* rispetto ad una retta $\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ di una piastra A (non necessariamente omogenea) è il numero

$$I = \iint_A d(p, \alpha)^2 dm,$$

dove $d(p, \alpha)$ è la funzione distanza di un generico punto p dalla retta di riferimento α .

3.2.5 Teorema di cambiamento di variabili

Ricordiamo che la matrice jacobiana in un punto p di una funzione φ si denota $\varphi'(p)$. Quindi, se φ è una funzione da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 , $\det \varphi'(u, v)$ rappresenta il determinante della matrice jacobiana di φ nel punto $p = (u, v)$, detto *jacobiano* di φ in (u, v) . Ovviamente $|\det \varphi'(u, v)|$ denota il valore assoluto dello jacobiano di φ in (u, v) .

Ricordiamo inoltre che un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^k$ si dice compatto se è limitato e chiuso.

Teorema (cambiamento di variabili per integrali doppi). *Sia*

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$$

un'applicazione continua da un compatto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ in \mathbb{R}^2 . Supponiamo che A e $\varphi(A)$ siano misurabili e che φ sia C^1 e iniettiva nell'interno $\mathring{A} = A \setminus \partial A$ di A . Allora, data una funzione $f(x, y)$ continua su $\varphi(A)$, risulta

$$\iint_{\varphi(A)} f(x, y) dx dy = \iint_A f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) |\det \varphi'(u, v)| du dv.$$

Per capire meglio questo teorema facciamo alcune osservazioni su come l'area di un rettangolo viene trasformata da una trasformazione di coordinate φ . Questo servirà a capire meglio il senso del fattore $|\det \varphi'(u, v)|$ nella formula di trasformazione.

Consideriamo dapprima il caso in cui φ è affine cioè esistono $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ ed $A = (a_{ij})$, matrice 2×2 , tale che $\varphi(u, v) = w + A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Prendiamo il rettangolo R (nel piano uv , con i lati paralleli agli assi) determinato dai due punti "opposti" (u_0, v_0) e $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$. La sua immagine, mediante φ è il parallelogramma P di vertici

$$(x_0, y_0) := \varphi(u_0, v_0), \quad (x_0, y_0) + A \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x_0, y_0) + A \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix}, \quad (x_0, y_0) + A \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}.$$

Per trovare l'area di P basta calcolare il valore assoluto del determinante della matrice formata dai vettori che specificano due dati adiacenti. Per esempio,

$$A \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\Delta u \\ a_{21}\Delta u \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}\Delta v \\ a_{22}\Delta v \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mu(P) = |\det(A)| |\Delta u| |\Delta v| = |\det(A)| \mu(R)$. Se $\det(A) = 0$ allora P degenera su un segmento o un punto.

Consideriamo ora il caso più generale in cui φ sia una mappa differenziabile in (u_0, v_0) . Per la formula di Taylor, i vertici di R vanno a finire nei punti

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &:= \varphi(u_0, v_0), & (x_0, y_0) + \varphi'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} + o(\Delta u), \\ (x_0, y_0) + \varphi'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix} + o(\Delta v), & (x_0, y_0) + \varphi'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} + o(\| \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \|). \end{aligned}$$

Quindi, *in prima approssimazione*, R viene trasformato nel parallelogramma determinato dal vertice (x_0, y_0) e dai vettori

$$(x_0, y_0) + \varphi'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x_0, y_0) + \varphi'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix}.$$

Che ha volume $|\det(\varphi'(u_0, v_0))||\Delta u||\Delta v|$.

Un esempio di cambiamento di coordinate è la trasformazione in coordinate polari. Ogni punto $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ è individuato da due numeri, ρ e θ , detti coordinate polari, e le coordinate cartesiane di p sono legate alle polari dalle seguenti due equazioni (di cambiamento di coordinate):

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

(per individuare l'origine basta $\rho = 0$, cioè l'origine non è individuata in modo unico dalle coordinate polari). Il determinante jacobiano di tale trasformazione, come si verifica subito, è dato da ρ .

A titolo di esempio, calcoliamo il momento d'inerzia (rispetto al centro) di un disco omogeneo di massa m e raggio r . Denotiamo con D il disco e poniamolo, per semplicità, nel piano xy col centro nell'origine degli assi. Poiché il disco è omogeneo, la sua densità superficiale è $\delta = m/\pi r^2$. Occorre calcolare

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dm,$$

dove $dm = \delta dx dy$ è l'elemento di massa. Data la simmetria circolare della funzione integranda $x^2 + y^2$ e del dominio di integrazione D , è conveniente individuare i punti di D mediante le coordinate polari ed esprimere la funzione f in tali coordinate. I punti di D si ottengono (tutti quanti) facendo variare ρ tra 0 e r e θ tra 0 e 2π ; cioè facendo variare la coppia di numeri (ρ, θ) nel rettangolo compatto $A = [0, r] \times [0, 2\pi]$ del piano $\rho\theta$. Abbiamo quindi definito un'applicazione $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ la cui immagine $\varphi(A)$ coincide col dominio d'integrazione

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Dalla formula di cambiamento di variabile per gli integrali doppi si ha

$$I = \delta \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \delta \iint_A \rho^2 |\rho| d\rho d\theta = \delta \iint_A \rho^3 d\rho d\theta.$$

Si osservi che le ipotesi del teorema di cambiamento di variabili sono soddisfatte. Infatti A è compatto, $D = \varphi(A)$, φ è continua in A , è C^1 nell'interno di A (è addirittura C^∞) ed è iniettiva nell'interno di A (anche se non lo è nella frontiera). Concludendo, per il Teorema di Fubini, si ha

$$I = \delta \iint_A \rho^3 d\rho d\theta = \frac{m}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} m r^2.$$

Esercizio. Calcolare l'area dell'ellisse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

di semiassi a e b .

Suggerimento. Usare il seguente cambiamento di coordinate:

$$x = r a \cos \varphi, \quad y = r b \sin \varphi, \quad (r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Esercizio. Determinare il baricentro del cerchio forato

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}.$$

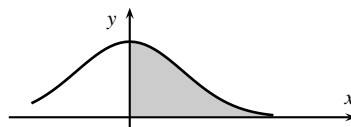
Suggerimento. Usare la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'insieme di integrazione.

Esercizio. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$ usando le coordinate polari.

La formula di cambiamento di variabili per gli integrali doppi permette anche di ottenere la seguente formula importante nel calcolo delle probabilità:



$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (3.5)$$

Significato geometrico della formula (3.5): l'area del sottografico di e^{-x^2} , per $x \geq 0$.

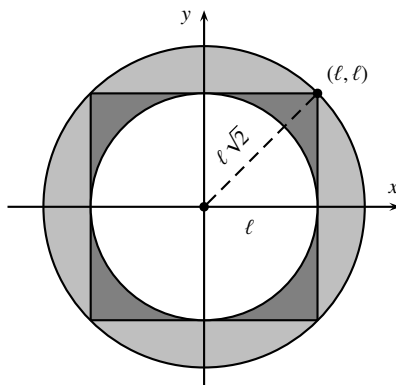
Per ottenere questa formula, poniamo $R_\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq \ell\}$ e calcoliamo

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \iint_{R_\ell} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy. \quad (3.6)$$

Posto $B_\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \ell\}$, osserviamo che

$$\iint_{B_\ell} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \leq \iint_{R_\ell} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \leq \iint_{B_{\ell\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy, \quad (3.7)$$

perché l'integrando $e^{-(x^2+y^2)}$ è positivo e $B_\ell \subseteq R_\ell \subseteq B_{\ell\sqrt{2}}$.



Il primo e l'ultimo integrale in questa catena di disuguaglianze possono essere calcolati rapidamente passando a coordinate polari:

$$\iint_{B_s} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{[0,2\pi] \times [0,s]} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta = 2\pi \int_0^s \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi(1 - e^{-s^2}),$$

per $s > 0$. Quindi $\lim_{s \rightarrow +\infty} \iint_{B_s} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$. Facendo tendere ℓ a $+\infty$ nella (3.7) e usando il teorema del confronto (carabinieri) si ottiene che il limite (3.6) esiste. L'integrale al centro della (3.7) si può riscrivere usando il teorema di Fubini (ricordiamo che $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} e^{-y^2}$):

$$\iint_{R_\ell} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\ell}^{\ell} \left(\int_{-\ell}^{\ell} e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy = \int_{-\ell}^{\ell} e^{-x^2} dx \int_{-\ell}^{\ell} e^{-y^2} dy = \left(2 \int_0^{\ell} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Quindi

$$\pi = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \iint_{R_\ell} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \left(2 \int_0^{\ell} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(2 \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \int_0^{\ell} e^{-x^2} dx \right)^2,$$

da cui segue

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \int_0^{\ell} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

come volevasi dimostrare.

3.2.6 Integrali doppi dipendenti da un parametro (integrali doppi parametrici)

Riprendiamo ora quanto fatto nel capitolo 1 estendendolo al caso degli integrali doppi.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato. Data $f: D \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua limitata, definiamo $G: D \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$G(x) := \iint_{\Omega} f(x, y) dy_1 dy_2, \quad x \in D.$$

Per quanto riguarda la continuità di G , nel caso in cui Ω è un rettangolo otteniamo subito la seguente

Proposizione. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $\Omega = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia f limitata e continua. Se G è come sopra, allora è continua.

Dimostrazione. Osserviamo che la funzione $h: D \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y_1) := \int_c^d \hat{f}(x, y_1, y_2) dy_2$$

è continua per il teorema di continuità per integrali parametrici del capitolo 1. Siccome, per il teorema di riduzione (Fubini)

$$G(x) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y_1, y_2) dy_2 \right) dy_1 = \int_a^b h(x, y_1) dy_1,$$

si ha che G è continua ancora una volta per il teorema di continuità per integrali parametrici del capitolo 1. \square

Se chiediamo che Ω sia un insieme più generale, la situazione si complica un po'. Nel caso in cui Ω sia misurabile e f sia uniformemente continua⁴ possiamo facilmente modificare la dimostrazione del lemma di continuità per integrali parametrici del capitolo 1. Denotiamo con $B_r^n(x_0)$ la palla in \mathbb{R}^n di centro x_0 e raggio r .

Lemma (di continuità per integrali parametrici doppi). *Sia $f: B_r^n(x_0) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Allora $G: B_r^n(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ data da*

$$G(x) := \iint_{\Omega} f(x, y) \, dy_1 \, dy_2,$$

è continua.

Dimostrazione. Osserviamo che f , essendo uniformemente continua, può essere estesa con continuità alla chiusura del suo dominio⁵ dunque f , come restrizione di una funzione continua su un compatto, è limitata.

Presi x ed x_0 in $B_r^n(x_0)$.

$$\begin{aligned} |G(x) - G(x_0)| &= \left| \iint_{\Omega} f(x, y) \, dy_1 \, dy_2 - \iint_{\Omega} f(x_0, y) \, dy_1 \, dy_2 \right| \\ &\leq \iint_{\Omega} |f(x, y) - f(x_0, y)| \, dy_1 \, dy_2. \end{aligned}$$

Per l'uniforme continuità si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$ per ogni coppia di coppie (x, y) e (x_0, y) in $B_r^n(x_0) \times \Omega$ (con la stessa y come secondo elemento) tali che $|x - x_0| < \delta$.

Dunque, fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta > 0$ tale che

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{\mu_2(\Omega)},$$

dove $\mu_2(\Omega)$ denota la misura 2-dimensionale di Ω . Si ha che

$$|G(x) - G(x_0)| \leq \iint_{\Omega} \frac{\varepsilon}{\mu_2(\Omega)} \, dy_1 \, dy_2 = \frac{\varepsilon}{\mu_2(\Omega)} \mu_2(\Omega) = \varepsilon.$$

Cioè la continuità. \square

⁴Cosa questa che succede, per esempio, se D è limitato e f è la restrizione di una funzione continua su $\overline{D} \times \overline{\Omega}$. Ricordiamo, infatti, che Ω è limitato e dunque $\overline{D} \times \overline{\Omega}$, essendo limitato e chiuso, è compatto. Una funzione continua su un compatto è sempre uniformemente continua, e l'uniforme continuità si conserva per restrizioni.

⁵Questo dovrebbe essere un fatto noto allo studente. In generale, data una funzione uniformemente continua $\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, basta porre per ogni $x \in \overline{A}$,

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{x_n \rightarrow x} \varphi(x_n)$$

dove $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una qualunque successione in A convergente a $x \in \overline{A}$. L'esistenza di tale limite segue dalla completezza di \mathbb{R} e dal fatto che $\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forma una successione di Cauchy. Si verifica che la funzione $\tilde{\varphi}$ così definita è un'estensione continua della φ .

Il lemma ci permette rapidamente di considerare domini aperti.

Teorema (di continuità per integrali parametrici doppi). *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f: D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua e limitata con Ω misurabile. Allora $G: D \rightarrow \mathbb{R}$ data da*

$$G(x) := \iint_{\Omega} f(x, y) dy_1 dy_2,$$

è continua.

Dimostrazione. Basta osservare che per ogni $x_0 \in D$ si può trovare $r > 0$ tale che $B_r^n(x_0) \subseteq D$. Allora, per il lemma, G è continua in x_0 . La tesi segue dall'arbitrarietà di x_0 . \square

Una conseguenza immediata è che se f , D e Ω sono come nel teorema, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \iint_{\Omega} f(x, y) dy_1 dy_2 = \iint_{\Omega} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy_1 dy_2 = \iint_{\Omega} f(x_0, y) dy_1 dy_2,$$

formula che esprime il passaggio al limite sotto il segno di integrale.⁶

Studiamo ora la derivabilità e la differenziabilità della funzione G .

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e siano Ω e f come nel teorema di continuità. Posto $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$, supponiamo che per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$ la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ di f esista e che sia uniformemente continua per ogni $(x_1, \dots, x_n, y) = (x, y) \in D \times \Omega$. Essenzialmente la stessa dimostrazione fatta nel capitolo 1 mostra che vale il seguente teorema:

Teorema (di derivabilità per integrali parametrici doppi). *Siano f , G , Ω e D come sopra, allora la derivata parziale di G rispetto ad x_i esiste continua ed è data da:*

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) := \iint_{\Omega} f(x, y) dy_1 dy_2, \quad \forall x \in D.$$

Osserviamo che se si suppone che f abbia tutte le derivate $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ uniformemente continue, $i = 1, \dots, n$, allora tutte le derivate $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ esistono continue in D . Ne segue che G è una funzione C^1 in D . Indicheremo questa affermazione con il nome di *teorema di differenziabilità per integrali parametrici doppi*.

Se con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ si indica la matrice jacobiana di f rispetto alla prima variabile (vettoriale) x , allora per la matrice jacobiana $G'(x)$ si ha la seguente espressione

$$G'(x) = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy_1 dy_2$$

dove l'integrazione è da intendersi elemento per elemento.

⁶Come nel capitolo 1 ricordiamo che esistono teoremi più forti di passaggio al limite sotto il segno di integrale ma vanno oltre lo scopo di queste lezioni.

3.3 Integrali doppi generalizzati

Ci limitiamo ad insiemi aperti. **Le funzioni considerate in questo paragrafo sono sempre continue.**

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto non necessariamente limitato. Diremo che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione *localmente integrabile* in A se e solo se è integrabile in ogni sottoinsieme chiuso, limitato e misurabile (secondo Peano-Jordan) di A . Diremo poi che f è *assolutamente integrabile* in A se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $B_\varepsilon \subseteq A$ chiuso, limitato e misurabile tale che

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx dy - \iint_{B_\varepsilon} f(x, y) \, dx dy \right| < \varepsilon,$$

per ogni D chiuso, limitato e misurabile tale che $B_\varepsilon \subseteq D \subseteq A$.

Teorema Se la funzione f è assolutamente integrabile, allora anche $|f|$ lo è.

Teorema Se f è assolutamente integrabile su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ allora esiste un numero, denotato con $\iint_A f(x, y) \, dx dy$, con la proprietà che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste C_ε chiuso, limitato e misurabile tale che

$$\left| \iint_A f(x, y) \, dx dy - \iint_{C_\varepsilon} f(x, y) \, dx dy \right| < \varepsilon$$

per ogni A chiuso, limitato e misurabile tale che $C_\varepsilon \subseteq D \subseteq A$. Inoltre

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_n} f(x, y) \, dx dy,$$

dove $\{A_n\}$ è una successione di insiemi aperti limitati e misurabili tali che $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Teorema Se il supporto di f è limitato, allora f è assolutamente integrabile.

Teorema Supponiamo che f sia una funzione non negativa localmente integrabile sull'aperto A . Allora f è assolutamente integrabile se e soltanto se esiste $M > 0$ tale che

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx dy \right| \leq M$$

per ogni D limitato, chiuso e misurabile contenuto in A . In questo caso,

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \sup \left\{ \iint_D f(x, y) : D \text{ limitato e chiuso contenuto in } A \right\}$$

Teorema Supponiamo che f sia una funzione non negativa localmente integrabile sull'aperto A . Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi aperti limitati misurabili tali che $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Allora f è assolutamente integrabile e

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_n} f(x, y) \, dx dy$$

se questo limite esiste ed è finito.

Si può anche dimostrare che f è assolutamente integrabile su A (aperto misurabile) se e solo se lo sono le sue parti positiva e negativa⁷. In tale caso, si ha

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A f^+(x, y) dx dy - \iint_A f^-(x, y) dx dy.$$

Vediamo un po' di esempi.

Esempio Studiamo l'integrale doppio generalizzato

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. Consideriamo, per ogni $r > 1$,

$$I_r = \iint_{C_r} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha},$$

dove $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < r^2\}$. Passando a coordinate polari, si ottiene,

$$I_r = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^r \rho^{1-2\alpha} d\rho = \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha} (r^{2(1-\alpha)} - 1) & \text{se } \alpha \neq 1, \\ 2\pi \ln r & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Consideriamo il limite di I_r per $r \rightarrow \infty$. Si ha che

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_r = \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha} & \text{Se } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{Se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Dunque la funzione è assolutamente integrabile su D se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio Studiare l'integrale generalizzato

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Esempio Calcoliamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Per il teorema precedente, si può calcolare questo integrale come il seguente limite:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

⁷Ogni funzione f può essere scritta come differenza di funzioni non negative: posto

$$f^+(x) := \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f^-(x) := \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

si ottiene $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Le funzioni f^+ ed f^- sono dette rispettivamente *parte positiva* e *parte negativa* di f .

Ora, con un cambiamento di variabili, si vede che

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi(1 - e^{-r^2}).$$

Dunque,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-r^2}) = \pi.$$

Osserviamo che questo ci permette di calcolare (in modo un po' più semplice di come avevamo fatto sopra) l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$. Infatti, (**Attenzione!** giustificare bene, per esercizio, i prossimi passaggi)

$$\pi = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2.$$

Dunque $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Osserviamo anche che

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

quindi $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Esercizio Calcolare

$$\iint_D e^{-xy} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

3.4 Formule di Gauss-Green nel piano

3.4.1 Curve e catene di Jordan

Ricordiamo che una curva parametrica $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ si dice semplice se esistono al più due punti con la stessa immagine, e quando ciò accade tali punti sono soltanto gli estremi a e b dell'intervallo di definizione (in tal caso la curva si dice chiusa).

Un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 si dice una *curva di Jordan* (si pronuncia “giordàn”, con l'accento tonico sull'ultima sillaba) se è il sostegno (cioè l'immagine) di una curva semplice e chiusa. Il più banale esempio di curva di Jordan è costituito da una circonferenza. Un altro semplice esempio è dato dalla frontiera di un rettangolo.

Enunciamo, senza dimostrazione, un famoso risultato topologico dovuto al matematico francese Camille Jordan (1838-1922). Risultato tanto intuitivo quanto non banale da provare (come molti teoremi di Topologia).

Teorema di Jordan. *Il complementare di una curva di Jordan è unione di due aperti connessi, disgiunti, la cui frontiera è la curva stessa. Uno dei due aperti, detto “insieme dei punti racchiusi dalla curva”, è limitato; l’altro, detto “insieme dei punti esterni alla curva”, è illimitato.*

Una curva di Jordan si dice una *catena di Jordan* se è decomponibile nell’unione di un numero finito di archi regolari (la decomposizione, ovviamente, non è unica). Ad esempio, la frontiera di un triangolo è una catena di Jordan, così come lo è una circonferenza. Non tutte le curve di Jordan sono catene. Esistono infatti curve di Jordan così irregolari da non contenere archi regolari. Una di queste è la frontiera frastagliata della cosiddetta isola di Koch (un noto frattale).

Definizione. Un sottoinsieme **compatto** X di \mathbb{R}^2 si dice una *placca piana* se la sua frontiera ∂X è una catena di Jordan. Più in generale, diremo che un insieme **compatto e connesso** $X \subseteq \mathbb{R}^2$ è una *lamina (piana)* se la sua frontiera ∂X è costituita da un numero finito di catene di Jordan a due a due disgiunte. La frontiera (siamo in \mathbb{R}^2) di una lamina si dice anche *bordo*.

Ovviamente una placca è anche una lamina, ma non viceversa. Ad esempio, una corona circolare è una insieme delimitato da due catene di Jordan (nella fattispecie, due circonferenze concentriche), e quindi è una lamina (con un buco), ma non è una placca; mentre i quadrati, i cerchi e i triangoli, essendo delimitati da una sola catena di Jordan, sono placche, oltre che lamine (senza buchi). Le lamine, insomma, non sono altro che placche con eventuali fori. I fori, però, devono essere fatti bene: devono essere delimitati da catene di Jordan a due a due disgiunte (non deve capitare che due fori abbiano punti di frontiera a comune). In una placca, un foro come l’isola di Koch non fa una lamina: la frontiera non è una catena di Jordan.

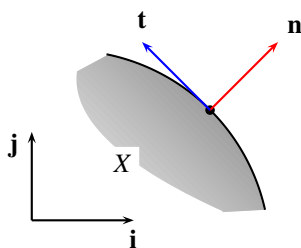
Si osservi che le placche sono insiemi connessi (è una conseguenza del Teorema di Jordan). Si potrebbe provare, ma non lo facciamo, che sono addirittura semplicemente connessi. Le lamine, invece, se hanno dei buchi, non sono insiemi semplicemente connessi (si ricorda, però, che per definizione sono insiemi connessi, e anche compatti).

Una singola catena di Jordan può essere orientata in due modi, a seconda del senso di percorrenza: orario o antiorario. Quindi, un insieme costituito da n catene di Jordan a due a due disgiunte (come, ad esempio, il bordo di una lamina) può essere orientato in 2^n modi (due per ogni curva).

In modo un po’ informale, data una lamina $X \subseteq \mathbb{R}^2$, definiamo l’*orientazione indotta* da X sulla sua frontiera (detta anche *orientazione canonica del bordo*) nel modo seguente. Osserviamo che per ogni punto di ∂X , eccettuati al più i punti che corrispondono alle “giunzioni” degli archi di curva da cui è costituito ∂X , risulta univocamente determinato il vettore \mathbf{n} di \mathbb{R}^2 ortogonale al bordo di X e orientato in modo da puntare verso l’esterno di X . L’orientazione del vettore tangente \mathbf{t} (in quei punti) è scelta in modo tale che la coppia di vettori (\mathbf{n}, \mathbf{t}) formi una base positivamente orientata del piano (vale a dire che l’orientazione è coerente con quella stabilita dalla scelta dei vettori \mathbf{i} e \mathbf{j} degli assi). In altre parole, se $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j}$, si chiede che

$$\det \begin{pmatrix} n_1 & t_1 \\ n_2 & t_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Notiamo che l’orientazione del bordo di una placca dipende da come sono state scelte quelle degli assi (cioè dall’orientazione del piano).



La base $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle$ di \mathbb{R}^2 corrisponde a $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle$ mediante una rotazione.

Per convenzione, con la scelta consueta dei versori \mathbf{i} e \mathbf{j} , data una lamina $X \subseteq \mathbb{R}^2$, l'orientazione indotta da X sulla sua frontiera si ottiene percorrendo ∂X in modo che X si trovi sul lato sinistro e il complementare di X sul lato destro. Per esempio, l'orientazione indotta da una corona circolare sulla sua frontiera è antioraria sulla circonferenza esterna e oraria su quella interna. In parole povere il bordo di una lamina X si percorre in senso antiorario lungo la curva di Jordan che racchiude X (in base al Teorema di Jordan) e in senso orario lungo la frontiera degli eventuali fori.

Per comprendere meglio la suddetta costruzione (non ortodossa) di orientazione indotta, si pensi al concetto di riva sinistra (o destra) di un fiume. D'altra parte, bisogna accontentarsi dell'idea intuitiva, perché la definizione formale richiederebbe concetti topologici troppo avanzati per il livello del corso. Purtroppo, le definizioni informali dei concetti non consentono dimostrazioni formali dei teoremi che utilizzano detti concetti.

Da ora in poi, per semplicità di linguaggio, diremo che una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}^s$ è C^n (o C^∞) su un insieme A di \mathbb{R}^k (non necessariamente aperto) se è C^n (o C^∞) su un aperto U contenente A . Ad esempio, la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ è C^∞ nel quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ perché in realtà è C^∞ in tutto \mathbb{R}^2 , che è un aperto contenente Q .

3.4.2 Formule di Gauss-Green e teorema della circuitazione

Il seguente risultato rappresenta per gli integrali doppi quello che per gli integrali semplici è la formula fondamentale del calcolo integrale. Sotto opportune ipotesi, infatti, l'integrale doppio dipende soltanto da ciò che accade sulla frontiera dell'insieme di integrazione (così come un integrale semplice dipende soltanto dai valori assunti negli estremi dell'intervallo di integrazione da una primitiva della funzione integranda).

Teorema (formule di Gauss-Green nel piano). *Siano $A(x, y)$ e $B(x, y)$ due funzioni di classe C^1 su una lamina $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Allora*

$$\begin{aligned} \iint_X \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_{\partial X} B(x, y) dy, \\ \iint_X \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dx dy &= - \int_{\partial X} A(x, y) dx, \end{aligned} \tag{3.8}$$

dove l'orientazione di ∂X è quella indotta da X .

Osserviamo che le formule (3.8) possono essere riscritte in termini di integrali non orientati nel seguente modo

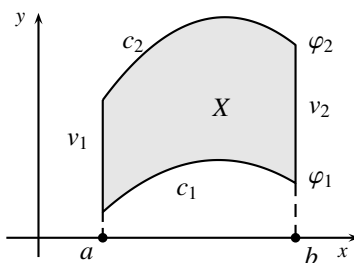
$$\iint_X \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\partial X} \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \cdot \tau ds, \quad \iint_X \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{\partial X} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \tau ds$$

La dimostrazione di questo teorema nel caso generale richiede un certo sforzo. Noi ci limitiamo al caso importante dei domini semplici con frontiera “liscia”.

Dimostrazione per domini y-semplfici. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$X = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

con $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni C^1 tali che $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.



Consideriamo le seguenti 4 curve regolari:

$$\begin{aligned} c_1 &: c_1(t) = (t, \varphi_1(t)), \quad t \in [a, b] \\ c_2 &: c_2(t) = (t, \varphi_2(t)), \quad t \in [a, b] \\ v_1 &: v_1(t) = (a, t), \quad t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] \\ v_2 &: v_2(t) = (b, t), \quad t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] \end{aligned}$$

La frontiera ∂X , con l'orientazione positiva, è costituita dalla concatenazione $c_1 \circ v_2 \circ c_2^- \circ v_1^-$ dove l'esponente “-” indica che la curva è percorsa in senso inverso rispetto alla parametrizzazione. Allora,

$$\int_{\partial X} A(x, y) dx = \int_a^b A(t, \varphi_1(t)) dt - \int_a^b A(t, \varphi_2(t)) dt. \quad (3.9)$$

perché l'integrale in dx lungo le curve verticali v_1 e v_2 sono ovviamente nulli. Usando le formule di riduzione ed il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\iint_X \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b (A(x, \varphi_2(x)) - A(x, \varphi_1(x))) dx$$

Confrontando con la (3.9) otteniamo la seconda delle (3.8).

Similmente,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial X} B(x, y) dy \\ &= \int_a^b B(t, \varphi_1(t)) \varphi_1'(t) dt + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} B(b, t) dt - \int_a^b B(t, \varphi_2(t)) \varphi_2'(t) dt - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} B(a, t) dt. \quad (3.10) \\ &= \int_a^b (B(t, \varphi_1(t)) \varphi_1'(t) - B(t, \varphi_2(t)) \varphi_2'(t)) dt + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} B(b, t) dt - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} B(a, t) dt. \end{aligned}$$

Usando ancora le formule di riduzione e la (1.4) (a pagina 6) otteniamo

$$\begin{aligned} \iint_X \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b (B(t, \varphi_1(t)) \varphi_1'(t) - B(t, \varphi_2(t)) \varphi_2'(t)) dt + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} B(b, t) dt - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} B(a, t) dt. \end{aligned}$$

Confrontando con la (3.10) otteniamo la prima delle (3.8). □

La dimostrazione per i domini x -semplici è lasciata agli studenti. Una volta che ciò sia stato fatto, la proprietà di additività rispetto al dominio di integrazione permetterà di dedurre la validità delle (3.8) per domini che possano essere rappresentati come unione finita di domini x - e y -semplici.

Il risultato che segue ha un'importante interpretazione fisica (che gli studenti avranno modo di incontrare, in una formulazione più generale, studiando elettromagnetismo) e si ottiene sommando le due formule di Gauss-Green.

Teorema (della circuitazione nel piano). *Siano $A(x, y)$ e $B(x, y)$ due funzioni di classe C^1 su una lamina $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Allora*

$$\boxed{\int_{\partial X} A dx + B dy = \iint_X \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy,}$$

dove l'orientazione di ∂X è quella indotta da X .

La formula del teorema può anche essere scritta usando gli integrali non orientati:

$$\int_{\partial X} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \iint_X \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy.$$

Osservazione. Dal teorema della circuitazione, ponendo $A = 0$ o $B = 0$, si ottengono, come casi particolari, le due formule di Gauss-Green.

Come aiuto per la memoria si osservi che *formalmente*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A & B \end{pmatrix} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$$

quindi la formula del teorema di circuitazione si può scrivere come segue:

$$\int_{\partial X} A dx + B dy = \iint_X \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A & B \end{pmatrix} dx dy,$$

Sia $v: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale C^1 sulla lamina piana $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ allora, per il teorema della circuitazione,

$$\int_{\partial X} v \cdot \tau ds = \int_{\partial X} v_1 dx + v_2 dy = \iint_X \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy,$$

dove τ è il versore tangente a ∂X coerente con l'orientazione positiva. Come vedremo nel Capitolo 5, questa formula è un caso particolare del teorema della circuitazione nello spazio. Infatti, il membro destro di questa eguaglianza è il flusso attraverso X (vista come superficie nello spazio) del campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Osservazione. Se si scelgono A e B in modo che la funzione

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$$

valga 1, allora l'integrale curvilineo

$$\int_{\partial X} A dx + B dy = \int_{\partial X} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \tau ds$$

rappresenta l'area di X . I casi più importanti sono i seguenti (ma si potrebbero fare infinite altre scelte):

Scelta per A e B	Formula per l'area	espressa in ds
$A = -y/2, B = x/2$	$\mu(X) = \frac{1}{2} \int_{\partial X} x dy - y dx$	$\frac{1}{2} \int_{\partial X} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \tau ds$
$A = 0, B = x$	$\mu(X) = \int_{\partial X} x dy$	$\int_{\partial X} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \tau ds$
$A = -y, B = 0$	$\mu(X) = - \int_{\partial X} y dx$	$\int_{\partial X} \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \tau ds$

Tra i tre casi, il secondo (quello con $A = 0$ e $B = x$) è particolarmente significativo in termodinamica, dove al posto della x c'è p (la pressione) e al posto della y c'è v (il volume). In tal caso l'integrale curvilineo dà il lavoro compiuto in un ciclo termodinamico; lavoro che coincide

con l'area racchiusa dal ciclo stesso (gli studenti avranno modo di incontrare tali concetti in altri corsi).

Esercizio. Calcolare l'area di un cerchio mediante un integrale curvilineo.

Esercizio. Calcolare l'area di un'ellisse mediante un integrale curvilineo.

Esercizio svolto Si consideri nel piano la curva γ di equazione polare $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, con f una funzione 2π -periodica. La curva è ovviamente chiusa. Si calcoli l'area della parte D di piano da essa racchiusa, mostrando che

$$\mu(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

Svolgimento. Posto $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, abbiamo che la curva γ ha equazioni parametriche

$$\gamma(\theta) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Usando la prima delle formule nella tabella otteniamo

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (f(\theta) \cos \theta (f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta) - f(\theta) \sin \theta (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [f(\theta)]^2 ((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [f(\theta)]^2 d\theta. \end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare.

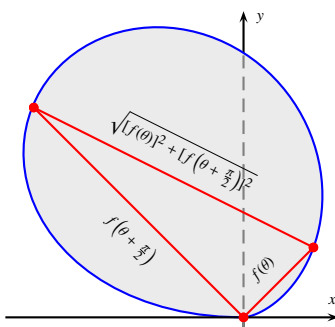
Dato un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ il suo *diametro* è per definizione dato da

$$\text{diam}(D) := \sup \{ \|p - q\| : p, q \in D \}.$$

Osservazione. Si consideri la curva C descritta dall'equazione polare $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, con $f(\theta) = f(\theta + \pi)$ (in modo tale che C è una curva chiusa). Chiaramente C è contenuta nel semipiano $y \geq 0$. Procedendo come nell'esercizio sopra, posta D la regione racchiusa da C , si ottiene

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\theta)]^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi [f(\theta)]^2 d\theta \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([f(\theta)]^2 + [f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)]^2 \right) d\theta. \end{aligned}$$

L'ultime eguaglianza si ottiene con un cambiamento di variabile. Osserviamo che $[f(\theta)]^2 + [f(\theta + \frac{\pi}{2})]^2$ è il quadrato dell'ipotenusa del triangolo rettangolo individuato dall'origine e dai punti (in coordinate polari) $(f(\theta), \theta)$ e $(f(\theta + \frac{\pi}{2}), \theta + \frac{\pi}{2})$,



Si ha che

$$\text{diam}(D)^2 \geq [f(\theta)]^2 + [f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)]^2.$$

Combinando questa disuguaglianza con la formula ottenuta per $\mu(D)$, si ottiene la seguente disuguaglianza che lega $\mu(D)$ con $\text{diam}(D)$ detta *disuguaglianza isodiametrica*:

$$\mu(D) \leq \pi \left(\frac{\text{diam}(D)}{2} \right)^2$$

Osserviamo che la procedura qui descritta può essere generalizzata (usando se necessario un cambiamento di coordinate) a qualunque regione piana limitata. Notiamo inoltre che il minore o uguale che compare nella disuguaglianza isodiametrica non può essere sostituito da un minore stretto. Infatti, se D è un disco di diametro d , abbiamo esattamente $\mu(D) = \pi d^2/4$.

Osservazione. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ una lamina. Possiamo trovare una formula per il suo baricentro che usa soltanto integrali curvilinei. Questo tipo di relazione è utile quando X è data in termini della sua frontiera. Come nel caso dell'osservazione precedente riguardante l'area si possono fare scelte diverse per A e B . Di seguito presentiamo una formula che ci sarà utile più avanti.

Sappiamo che

$$x_C = \frac{1}{\mu(X)} \iint_X x \, dx \, dy \quad \text{e} \quad y_C = \frac{1}{\mu(X)} \iint_X y \, dx \, dy$$

Scegliendo $A(x, y) = -xy$ e $B(x, y) = x^2$ abbiamo, con facili calcoli,

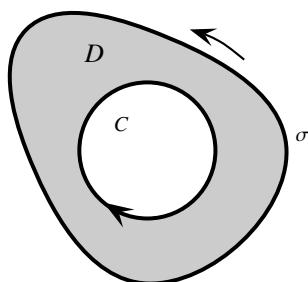
$$x_C = \frac{1}{3\mu(X)} \oint_{\partial X^+} x^2 \, dy - xy \, dx. \tag{3.11}$$

Analogamente, per $A(x, y) = y^2$ e $B(x, y) = -xy$,

$$y_C = \frac{1}{3\mu(X)} \oint_{\partial X^+} xy \, dy - y^2 \, dx.$$

Se calcoliamo $\mu(X)$ con una delle formule per l'area ottenuta nell'osservazione precedente, otteniamo il baricentro di X in termini di integrali curvilinei lungo la frontiera.

Osserviamo che se $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ è una forma chiusa su un dominio D (non semplicemente connesso) la cui frontiera è costituita dalle curve (di Jordan) σ e C , come in figura



allora, con le orientazioni indicate,

$$0 = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \oint_{\partial D^+} \omega = \oint_{\sigma} \omega + \oint_C \omega.$$

Questo permette di calcolare in modo comodo, facendo un cambiamento di curva, alcuni integrali curvilinei. Per esempio, applichiamo queste considerazioni alla forma

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

Prendendo C come una circonferenza di raggio positivo arbitrario centrata nell'origine, vediamo che l'integrale curvilineo su una qualunque curva di Jordan che racchiuda l'origine deve essere zero. Come abbiamo già visto questo implica che ω è esatta.

3.4.3 Teorema della divergenza nel piano e formule di integrazione per parti

Sia $v: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale C^1 , $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, dato da

$$v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y)),$$

si definisce la *divergenza* come segue:

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

(Vedremo più avanti una definizione più generale.) Con questa notazione, se $X \subseteq U$ è una lamina,

$$\iint_X \operatorname{div} v \, dx \, dy = \int_{\partial X} v_2 \, dx - v_1 \, dy \quad (3.12)$$

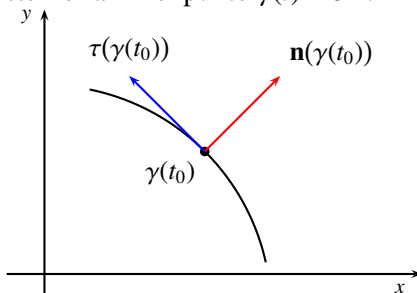
dove l'orientazione di ∂X è quella indotta da X . Osserviamo che se $t \mapsto \gamma(t)$ è uno degli archi di curva regolari che delimitano X (con l'orientazione indotta da X) allora

$$t \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} =: \tau(\gamma(t))$$

è il versore tangente che punta nel 'verso positivo' mentre

$$t \mapsto \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} -\gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t) \end{pmatrix} =: \mathbf{n}(\gamma(t))$$

rappresenta il versore normale ‘esterno’ a X nel punto $\gamma(t) \in \partial X$.⁸



Con questa notazione vale la seguente identità tra espressioni differenziali: $v_2 dx - v_1 dy = v \cdot \mathbf{n} ds$. Allora, se si denota con \mathbf{n} il versore normale esterno in ogni punto di ∂X , la formula (3.12) diventa

$$\boxed{\iint_X \operatorname{div} v \, dx \, dy = \int_{\partial X} v \cdot \mathbf{n} \, ds.} \quad (3.13)$$

che è nota come *Teorema della Divergenza* nel piano. La quantità a secondo membro è detta anche *flusso di v attraverso ∂X* (con l'orientazione scelta).

Se nelle formule di Gauss-Green si pone $A(x, y) = B(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ con u e v funzioni C^1 su X , si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_X v(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\partial X} u(x, y)v(x, y) \, dy - \iint_X u(x, y) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \, dx \, dy, \\ \iint_X v(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \, dx \, dy &= - \int_{\partial X} u(x, y)v(x, y) \, dx - \iint_X u(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \, dx \, dy, \end{aligned}$$

che ricordano da vicino la formula di integrazione per parti incontrata in Analisi Matematica 1.

Con un'operazione simile a quello che abbiamo fatto per il teorema della divergenza, possiamo scrivere le due formule precedenti in modo più sintetico: Per $i = 1, 2$,

$$\boxed{\iint_X v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{\partial X} u(x)v(x) \mathbf{n}_i \, ds - \iint_X u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \, dx_1 \, dx_2,}$$

dove $x = (x_1, x_2)$ e \mathbf{n}_i denota la i -sima componente della normale esterna a X . Questa è la cosiddetta formula di integrazione per parti per gli integrali doppi.

Notiamo che posto $v(x) \equiv 0$ nella formula precedente otteniamo la seguente versione delle formule di Gauss-Green:

$$\boxed{\iint_X \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{\partial X} u(x) \mathbf{n}_i \, ds, \quad i = 1, 2.}$$

⁸Notiamo che, per ogni t , la matrice di cambiamento di coordinate

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mapsto (\tau(\gamma(t)), \mathbf{n}(\gamma(t)))$$

è ortogonale, in particolare è una rotazione (cioè non c'è ribaltamento del piano) infatti, $\det(\tau \mid \mathbf{n}) = 1$.

Questa formula, che ricorda da vicino il teorema fondamentale del calcolo, ha il pregio di chiarire il significato dei segni che compaiono nelle (3.8).

Osserviamo che le formule di integrazione per parti, il teorema della divergenza, quello di circolazione e le formule di Green sono, in effetti, tutte affermazioni equivalenti tra di loro nel senso che ognuna di esse si può ottenere da una qualunque delle altre (non è difficile da verificare).

3.4.4 Appendice: la formula di coarea nel piano

Citiamo infine la formula seguente detta di *coarea*⁹. La si può interpretare come una specie di versione “curvilinea” del teorema di riduzione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e $g : A \rightarrow [a, b]$ una funzione C^2 su A . Sia inoltre $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora

$$\iint_A f(x) \|\nabla g(x)\| dx_1 dx_2 = \int_a^b \left(\int_{g^{-1}(t)} f(x) ds \right) dt.$$

Qui $x = (x_1, x_2)$ e l'integrale che compare dentro la parentesi a secondo membro è un integrale curvilineo di prima specie sulla curva $g^{-1}(t)$. Si può infatti dimostrare¹⁰ che l'insieme dei t appartenenti ad $[a, b]$ tali che $g^{-1}(t)$ non è (localmente) il sostegno di una curva regolare ha misura nulla. Per tali t infatti deve esistere $x \in A$ tale che $g'(x) = 0$.

Una conseguenza interessante è la seguente: Chiamata $B(\bar{x}, r)$ la palla di centro \bar{x} e raggio r e posto $g(x) = \|x - \bar{x}\|$ si ha

$$\iint_{B(\bar{x}, r)} f(x) dx_1 dx_2 = \iint_{B(\bar{x}, r) \setminus \{\bar{x}\}} f(x) dx_1 dx_2 = \int_0^r \left(\int_{\partial B(\bar{x}, \rho)} f(x) ds \right) d\rho.$$

Qui, $x = (x_1, x_2)$.

Per esempio, calcoliamo il momento di inerzia rispetto all'origine di un semidisco di centro l'origine e raggio 4 avente densità $\delta(x, y) = y$. Per $\rho \in [0, 4]$, ricordando la definizione d'integrale curvilineo, si ha

$$\int_{\partial B(\bar{x}, \rho)} y(x^2 + y^2) ds = \int_0^\pi \rho^4 \sin(\theta) d\theta = 2\rho^4,$$

quindi il momento di inerzia richiesto vale

$$\int_0^4 2\rho^4 d\rho = \frac{2048}{5}.$$

Esercizio. Calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^6 + y^6} dx dy,$$

⁹Si tratta in effetti di un caso piuttosto particolare della “vera” formula di coarea.

¹⁰Vale il seguente caso particolare del **Lemma di Sard**: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^n . Se $C = \{x \in A : g'(x) = 0\}$ allora $\mu(g(C)) = 0$.

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$. (Suggerimento: Usare la formula di coarea con $f(x, y) \equiv 1$ e $g(x, y) = x^4 + y^4$).

Capitolo 4

Integrali tripli

4.1 Integrali tripli su parallelepipedi

4.1.1 Partizioni puntate, funzioni integrabili e proprietà fondamentali

Una *partizione* di un parallelepipedo

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$$

è una terna $p = (p_1, p_2, p_3)$ di partizioni degli intervalli $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ e $[a_3, b_3]$, rispettivamente. Date tre partizioni, $p_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_1}\}$ di $[a_1, b_1]$, $p_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{n_2}\}$ di $[a_2, b_2]$ e $p_3 = \{z_0, z_1, \dots, z_{n_3}\}$ di $[a_3, b_3]$, il parallelepipedo Q viene suddiviso in $n_1 n_2 n_3$ sottoparallelepipedi

$$Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

di volume $\mu(Q_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$. In ogni parallelepipedo Q_{ijk} scegliamo un punto c_{ijk} . L'insieme s dei punti c_{ijk} si dice una *scelta di punti* nella partizione $p = (p_1, p_2, p_3)$ di Q . Ogni parallelepipedo Q_{ijk} della partizione col punto c_{ijk} scelto si dice un *parallelepipedo puntato*. La coppia $\alpha = (p, s)$, costituita dalla partizione $p = (p_1, p_2, p_3)$ di Q e dalla scelta s , si dice una *partizione puntata* di Q . Il parametro di finezza di $\alpha = (p, s)$, denotato con $|\alpha|$, è la massima ampiezza dei lati di tutti i possibili parallelepipedi individuati dalla partizione p .

Sia $f(x, y, z)$ una funzione definita in Q . Ad ogni partizione puntata $\alpha = (p, s)$ di Q possiamo associare il numero

$$S_f(\alpha) = \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{K}} f(c_{ijk}) \mu(Q_{ijk}),$$

dove la terna di indici (i, j, k) varia nell'insieme

$$\mathcal{K} = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2, 1 \leq k \leq n_3\}.$$

Intuitivamente l'integrale triplo (secondo Cauchy-Riemann) in Q della funzione f è, quando esiste, il valore limite che si ottiene facendo tendere a zero i lati dei sottoparallelepipedi individuati

dalle possibili partizioni puntate di Q . Diremo infatti che il numero I è l'integrale triplo di f in Q se, fissato un "errore" $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, comunque si assegni una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha|$ (cioè la massima lunghezza dei spigoli degli elementi della partizione) minore di δ , la somma $S_f(\alpha)$ sopra definita dista da I meno di ε . Se ciò accade, si scrive

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow 0} S_f(\alpha) = I$$

e la funzione f si dice *integrabile* (in Q) secondo Cauchy-Riemann. Il numero I si chiama *integrale (triplo)* di $f(x, y, z)$ in Q e si denota con uno dei seguenti simboli:

$$\int_Q f, \quad \int_Q f \, d\mu, \quad \int_Q f(p) \, d\mu, \quad \int_Q f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

$$\iiint_Q f, \quad \iiint_Q f \, d\mu, \quad \iiint_Q f(p) \, d\mu, \quad \iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

È ovvio che il numero

$$I = \iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz$$

non dipende dai simboli usati per indicare le variabili. Ad esempio al posto di x, y e z si possono usare le lettere u, v e w (il limite di $S_f(\alpha)$ per $|\alpha| \rightarrow 0$ non cambia).

Un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 si dice *trascurabile* (in \mathbb{R}^3) se per ogni $\varepsilon > 0$ può essere ricoperto con una famiglia (al più) numerabile di parallelepipedi di volume totale minore di ε . Si potrebbe dimostrare che il grafico di una funzione continua di due variabili su un compatto ($z = g(x, y)$, o $x = g(y, z)$, o $y = g(z, x)$) è un insieme trascurabile di \mathbb{R}^3 . Inoltre l'unione di un numero finito (o, addirittura, di un'infinità numerabile) di insiemi trascurabili è ancora un insieme trascurabile. In particolare gli insiemi costituiti da un numero finito (o da un'infinità numerabile) di punti sono trascurabili.

Analogamente a quanto si è visto per gli integrali doppi, **una funzione $f(x, y, z)$ è integrabile in un parallelepipedo Q se e solo se è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile** (Teorema di Integrabilità). Inoltre, **alterando il valore della funzione integranda su un insieme trascurabile, il valore dell'integrale non cambia** (Teorema di Equivalenza).

Dalla definizione segue facilmente che l'integrale, quando esiste, è unico (unicità del limite). Inoltre, dalle note proprietà del limite si deduce che se f e g sono due funzioni integrabili in un parallelepipedo Q ed α e β sono due numeri, allora anche la funzione $\alpha f + \beta g$ è integrabile e si ha

$$\iiint_Q (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \iiint_Q f \, d\mu + \beta \iiint_Q g \, d\mu,$$

cioè l'integrale gode della **proprietà di linearità**. Più precisamente: l'integrale è un *funzionale lineare* sullo spazio vettoriale delle funzioni integrabili (nel parallelepipedo Q).

Sempre dalla definizione di integrale si deduce che se f è integrabile in Q e $f(x, y, z) \geq 0$, $\forall (x, y, z) \in Q$, allora

$$\iiint_Q f \, d\mu \geq 0,$$

e da ciò segue (tenendo conto della linearità) la seguente proprietà dell'integrale triplo:

Proprietà di monotonia. Siano f e g due funzioni integrabili in un parallelepipedo Q . Se $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in Q$, allora

$$\iiint_Q f \, d\mu \leq \iiint_Q g \, d\mu.$$

4.1.2 Teorema di riduzione

Il risultato che segue riconduce il calcolo di un integrale triplo a due successive integrazioni: una semplice seguita da una doppia, o una doppia seguita da una semplice.

Teorema riduzione (o di Fubini) per gli integrali tripli. Sia $f(x, y, z)$ una funzione reale integrabile su un parallelepipedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Allora, quando ha senso, risulta

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_R dx dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz, \quad (4.1)$$

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{a_3}^{b_3} dz \iint_R f(x, y, z) \, dx dy, \quad (4.2)$$

dove R denota il rettangolo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ nel piano xy . Più esplicitamente,

- Se per ogni $y \in [a_3, b_3]$ la funzione $z \mapsto f(x, y, z)$ è integrabile, allora la funzione $(x, y) \mapsto \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz$ è integrabile in R e

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_R dx dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz;$$

- Se per ogni $(x, y) \in R$ la funzione di due variabili $(x, y) \mapsto f(x, y, z)$ è integrabile in R , allora la funzione $z \mapsto \iint_R f(x, y, z) \, dx dy$ è integrabile in $[a_3, b_3]$ e

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{a_3}^{b_3} dz \iint_R f(x, y, z) \, dx dy.$$

La prima formula del Teorema di Fubini afferma che per calcolare l'integrale triplo di $f(x, y, z)$ in Q è possibile integrare prima in $[a_3, b_3]$ la funzione $f(x, y, z)$ rispetto alla variabile z , ottenendo così una funzione

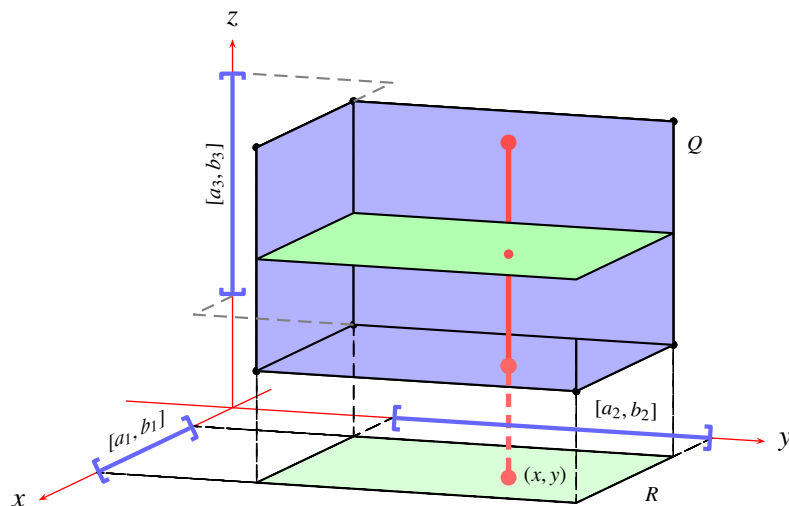
$$g(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz,$$

ed integrare poi $g(x, y)$ nel rettangolo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

La seconda formula afferma che si ottiene lo stesso risultato facendo prima l'integrale doppio in $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ della funzione $f(x, y, z)$ rispetto alle variabili x ed y , ottenendo così una funzione

$$h(z) = \iint_R f(x, y, z) \, dx dy,$$

ed integrando poi $h(z)$ nell'intervallo $[a_3, b_3]$.



I diversi modi di affettare il rettangolo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$: in rosso per (4.1), in verde per (4.2).

Ovviamente, nel Teorema di Fubini (per gli integrali tripli) i ruoli delle variabili x , y e z possono essere permutati, ottenendo altre quattro formule di riduzione. In tutto sono sei: due se l'integrale è semplice rispetto a z (come nell'enunciato), due se è rispetto ad y e due se è rispetto ad x .

4.2 Integrali tripli su un arbitrario insieme limitato

4.2.1 Estensione standard di una funzione e definizione di integrale

Definizione. Dato un insieme A di \mathbb{R}^3 e data $f(x, y, z)$ definita (almeno) in A , la funzione

$$\hat{f}_A(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in A \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \notin A \end{cases}$$

si chiama *estensione standard di f (relativa ad A)*.

Spesso risulterà evidente dal contesto rispetto a quale insieme A si sta considerando l'estensione standard di una funzione f . In tal caso scriveremo \hat{f} al posto di \hat{f}_A .

Sia $f(x, y, z)$ una funzione di tre variabili definita in un sottoinsieme limitato A di \mathbb{R}^3 . Consideriamo un (arbitrario) parallelepipedo Q contenente A . Diremo che f è *integrabile in A* se è integrabile in Q la sua estensione standard \hat{f} . In tal caso l'integrale di f in A si definisce nel modo seguente:

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz := \iiint_Q \hat{f}(x, y, z) dx dy dz.$$

Dal fatto che \hat{f} è nulla fuori da A si può dedurre che il secondo integrale non dipende dal parallelepipedo Q contenente A . Pertanto, la suddetta definizione è ben posta.

Teorema (additività rispetto all'insieme di integrazione). *Supponiamo che una funzione $f(x, y, z)$ sia integrabile sia in un insieme A che in un insieme B , con $A \cap B = \emptyset$. Allora f è integrabile in*

$A \cup B$ e

$$\iiint_{A \cup B} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz.$$

Dimostrazione. Fissiamo un parallelepipedo Q contenente $A \cup B$ e consideriamo, rispettivamente, le estensioni standard $\hat{f}_{A \cup B}$, \hat{f}_A e \hat{f}_B di f relative agli insiemi $A \cup B$, A e B . Dal fatto che $A \cap B = \emptyset$ si deduce facilmente che $\hat{f}_{A \cup B} = \hat{f}_A + \hat{f}_B$. Quindi

$$\iiint_{A \cup B} f = \iiint_Q \hat{f}_{A \cup B} = \iiint_Q (\hat{f}_A + \hat{f}_B) = \iiint_Q \hat{f}_A + \iiint_Q \hat{f}_B = \iiint_A f + \iiint_B f,$$

e ciò prova la tesi. \square

4.2.2 Formule di riduzione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme del tipo

$$A = \{(x, y, z) : (x, y) \in B, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\},$$

dove $\varphi_1, \varphi_2: B \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue definite in un sottoinsieme compatto B di \mathbb{R}^2 . Si dice che A presenta il caso semplice rispetto all'asse z , o che è z -semplice, perché ogni retta parallela a tale asse lo interseca in un intervallo (di estremi $\varphi_1(x, y)$ e $\varphi_2(x, y)$, per $(x, y) \in B$). Supponiamo che $f(x, y, z)$ sia una funzione integrabile in A . Per definizione, dato un parallelepipedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ contenente A , l'integrale di f in A è

$$\iiint_Q \hat{f}(x, y, z) dx dy dz.$$

Dal Teorema di Fubini si ha

$$\iiint_Q \hat{f}(x, y, z) dx dy dz = \iint_R dx dy \int_{a_3}^{b_3} \hat{f}(x, y, z) dz,$$

dove $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Ossia,

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_R g(x, y) dx dy,$$

dove $g: R \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da

$$g(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} \hat{f}(x, y, z) dz.$$

Osserviamo ora che, per la definizione di \hat{f} , la funzione $g(x, y)$ è nulla se $(x, y) \notin B$. Di conseguenza,

$$\iint_R g(x, y) dx dy = \iint_B g(x, y) dx dy + \iint_{R \setminus B} g(x, y) dx dy = \iint_B g(x, y) dx dy.$$

Tenendo conto che, dato $(x, y) \in B$, la funzione parziale $z \mapsto \hat{f}(x, y, z)$ è nulla se z non appartiene all'intervallo $[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$, si ha

$$g(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} \hat{f}(x, y, z) dz = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \hat{f}(x, y, z) dz = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Si ottiene così la seguente importante **formula di riduzione**, detta anche **formula degli spaghetti** (paralleli all'asse z), valida per gli insiemi che presentano il caso semplice rispetto all'asse z :

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_B dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

dove B è la proiezione ortogonale di A sul piano xy e $\varphi_1, \varphi_2: B \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni i cui grafici delimitano A .

Ovviamente si hanno altre due formule degli spaghetti: una con spaghetti paralleli all'asse x e l'altra con spaghetti paralleli all'asse y . I dettagli sono lasciati allo studente.

Il Teorema di Fubini in \mathbb{R}^3 ci dice che per calcolare un integrale triplo si può eseguire prima un integrale doppio e poi un integrale semplice. Da tale teorema si deduce un'altra formula di riduzione per il calcolo di un integrale triplo in un insieme limitato A : la formula delle fette. Anche in questo caso, in realtà, si avranno tre formule, a seconda che le fette siano perpendicolari all'asse z , all'asse x o all'asse y .

Riportiamo la formula delle fette perpendicolari all'asse z . Il compito di scrivere le altre due è lasciato per esercizio allo studente.

Sia $f(x, y, z)$ una funzione integrabile in un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Fissato $z \in \mathbb{R}$, denotiamo con

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$$

la "fetta" (eventualmente vuota) che si ottiene "tagliando" A col piano perpendicolare all'asse z e passante per il punto $(0, 0, z)$. Sia $[a, b]$ un qualunque intervallo contenente la proiezione ortogonale di A sull'asse z (la scelta più conveniente si ottiene prendendo $a = \inf\{z : (x, y, z) \in A\}$ e $b = \sup\{z : (x, y, z) \in A\}$). Allora vale la seguente **formula delle fette**:

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{A_z} f(x, y, z) dx dy.$$

Dimostrazione della formula delle fette. Siano, rispettivamente, R ed $[a, b]$ un rettangolo nel piano xy e un intervallo nell'asse z scelti in modo che il parallelepipedo $Q = R \times [a, b]$ contenga A . Per definizione, si ha

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_Q \hat{f}(x, y, z) dx dy dz,$$

e per il Teorema di Fubini risulta

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_R \hat{f}(x, y, z) dx dy.$$

Poiché, fissato $z \in [a, b]$, la funzione $\hat{f}(x, y, z)$ è nulla fuori da A_z , si ottiene

$$\iint_R \hat{f}(x, y, z) \, dx dy = \iint_{A_z} f(x, y, z) \, dx dy.$$

Pertanto

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{A_z} f(x, y, z) \, dx dy,$$

e la formula è provata. □

4.2.3 Misura (volume) di un insieme in \mathbb{R}^3

Definizione. Un sottoinsieme limitato A di \mathbb{R}^3 si dice *misurabile (secondo Peano-Jordan)* quando è integrabile in A la funzione $f(x, y, z) \equiv 1$. In tal caso, la *misura (tridimensionale)* di A , detta anche *volume*, è il numero

$$\mu_3(A) = \iiint_A dx dy dz.$$

Osservazione. Come nel caso degli insiemi trascurabili 2-dimensionali, osserviamo che un insieme di misura nulla (quindi misurabile) è trascurabile. Viceversa, un insieme trascurabile che sia anche misurabile ha automaticamente misura nulla. *Non* è vero, però, che un insieme trascurabile sia misurabile.

Principio di Cavalieri in 3 dimensioni. Dalla formula delle fette si deduce che il volume $\mu_3(A)$ di un solido A la cui proiezione ortogonale sull'asse z risulti contenuta in un intervallo $[a, b]$ si ottiene integrando tra a e b l'area $\mu_2(A_z)$ della generica fetta A_z . Se l'intervallo $[a, b]$ è troppo grande, alcune fette A_z sono vuote, e quindi, per tali fette, risulta $\mu_2(A_z) = 0$ (pertanto, tanto vale scegliere $a = \inf\{z : (x, y, z) \in A\}$ e $b = \sup\{z : (x, y, z) \in A\}$).

Il teorema di Fubini (in 3 dimensioni) permette di ottenere una formula utile per gli integrali doppi. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato misurabile ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva e integrabile. Definiamo

$$A_t := \{x \in A : f(x) \geq t\} \quad \text{e} \quad g(t) := \mu(A_t).$$

Supponiamo che la misura 2-dimensionale di A_t sia ben definita per tutti i t eccettuato, al più, un insieme di misura 1-dimensionale nulla. Sia ora $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua, crescente e C^1 in $(0, +\infty)$ con $\phi(0) = 0$. Siccome f è integrabile su A e ϕ è continua, esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sup_{(x,y) \in A} \phi(f(x, y)) \leq s.$$

Allora

$$\int_0^s \phi'(t) g(t) \, dt = \int_0^s \left(\phi'(t) \iint_A \mathbb{1}_{A_t}(x, y) \, dx_1 dx_2 \right) dt$$

che, per il teorema di Fubini è dato da

$$\iint_A \left(\int_0^s \phi'(t) \mathbb{1}_{A_t}(x, y) dt \right) dx dy = \iint_A \left(\int_0^{f(x, y)} \phi'(t) dt \right) dx dy = \iint_A \phi(f(x, y)) dx dy.$$

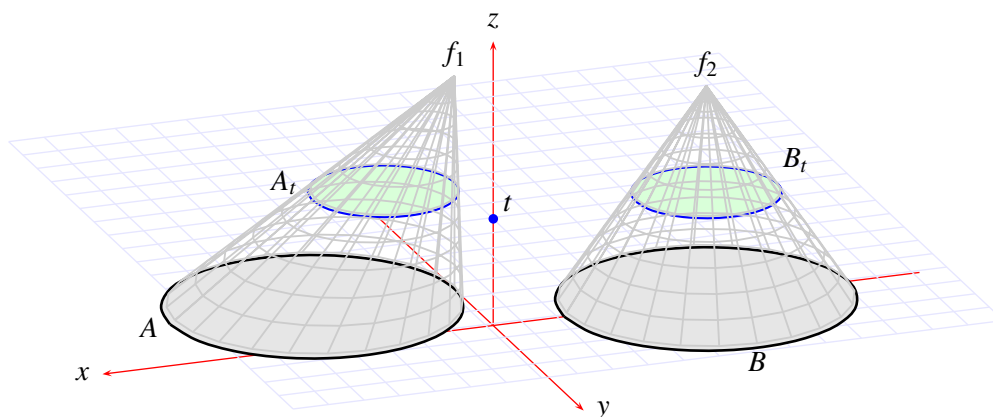
Cioè

$$\iint_A \phi(f(x, y)) dx dy = \int_0^s \mu(\{(x, y) \in A : f(x, y) \geq t\}) \phi'(t) dt.$$

Questa formula, per $\phi(t) = t$, si riduce al principio di Cavalieri in 3 dimensioni. Infatti, otteniamo la seguente formula:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_0^s \mu(\{(x, y) \in A : f(x, y) \geq t\}) dt. \quad (4.3)$$

Ricordando l'interpretazione geometrica dell'integrale a destra nella formula sopra come il volume V della parte di spazio compresa tra il grafico di f e il piano xy (detta anche *sottografico* di f), possiamo descrivere questo risultato in modo euristico dicendo che V è la "somma" delle aree delle sezioni A_t ottenute tagliando questa parte di spazi con i piani di equazione $z = t$. Un'altra interpretazione della formula (4.3) è la seguente: Consideriamo due solidi S_1 ed S_2 che sono il sottografico delle funzioni positive integrabili $f_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$ ed $f_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\mu(A_t) = \mu(B_t)$ per ogni $t \geq 0$ (eccettuato eventualmente un insieme di misura 1-dimensionale nulla) allora i volumi dei due solidi sono uguali.



Osservazione. Fissiamo $1 \leq n < m \leq 3$ e consideriamo la catena di inclusioni $\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, dove \mathbb{R}^n è incluso in (o ampliato a) \mathbb{R}^{n+1} mediante l'aggiunta di una direzione ortogonale a tutto \mathbb{R}^n . Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, questo lo si può vedere come un sottoinsieme di \mathbb{R}^m , $m > n$, identificandolo con il seguente insieme:

$$\{(x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n \text{ zeri}}) \in \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_n) \in S\}.$$

Osserviamo che se S è trascurabile rispetto a μ_n , allora lo è rispetto μ_m per ogni $m > n$. In effetti, se S è misurabile rispetto a μ_n , anche con $\mu_n(S) > 0$, allora è μ_m -misurabile per ogni $m > n$ e $\mu_m(S) = 0$.

4.2.4 Cambiamento di variabili in \mathbb{R}^3

In modo del tutto analogo al caso degli integrali doppi, vale il seguente risultato:

Teorema (di cambiamento di variabili per gli integrali tripli). *Sia*

$$\varphi(u, v, w) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))$$

un'applicazione continua da un compatto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ in \mathbb{R}^3 . Supponiamo che A e $\varphi(A)$ siano misurabili e che φ sia C^1 e iniettiva nell'interno $\mathring{A} = A \setminus \partial A$ di A . Allora, data una funzione $f(x, y, z)$ continua su $\varphi(A)$, risulta

$$\iiint_{\varphi(A)} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_A f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) |\det \varphi'(u, v, w)| \, du dv dw.$$

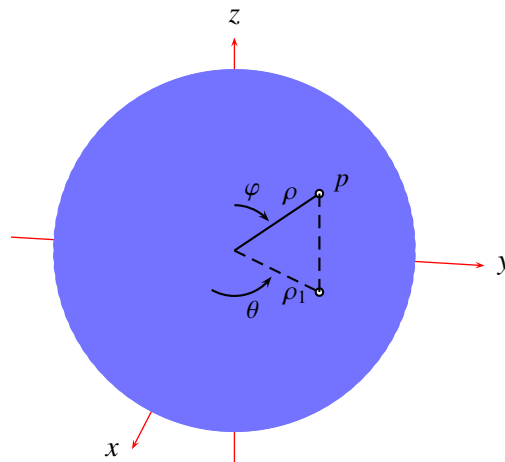
Ancora in modo analogo al caso 2-dimensionale, si ha che il valore assoluto del determinante jacobiano $|\det \varphi'(u, v, w)|$ (ricordiamo che $\varphi'(u, v, w)$ rappresenta la matrice jacobiana della trasformazione) si può interpretare come un fattore di distorsione dei volumi.

Esercizio. Calcolare il volume di un cono circolare retto di altezza h e raggio di base r .

Esercizio. Calcolare il volume di una sfera di raggio r col metodo delle fette.

Esercizio. Calcolare il volume di una sfera di raggio r col metodo degli spaghetti.

Coordinate sferiche. Ogni punto di $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ è identificabile mediante la sua distanza dall'origine e una coppia di angoli come nel disegno



Si ha $\rho_1 = \rho \sin \varphi$ e quindi

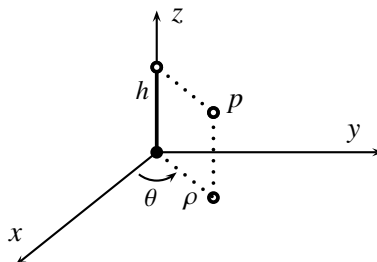
$$\begin{cases} x = \rho_1 \cos \theta = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho_1 \sin \theta = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

Il determinante jacobiano della trasformazione in coordinate sferiche è dato da

$$\det \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \\ -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ \rho \cos \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix} = \rho^2 \sin \varphi$$

Esercizio. Calcolare il volume di una sfera mediante le coordinate sferiche.

Coordinate cilindriche. Un altro metodo per identificare i punti di $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ è il seguente: Per ogni punto $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ di coordinate (x, y, z) si considera la sua proiezione $p' = (x, y, 0)$ sul piano xy . Allora p è identificato in modo unico dalle coordinate polari di p' e dalla sua altezza z rispetto al piano xy .



Si ha dunque che

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = h \end{cases}$$

Il determinante jacobiano della trasformazione in coordinate cilindriche è dato da

$$\det \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho$$

I seguenti esercizi chiedono di estendere ciò che abbiamo fatto nel caso degli integrali doppi (in \mathbb{R}^2) alle analoghe nozioni per gli integrali tripli (in \mathbb{R}^3).

Esercizio. Enunciare i due teoremi della media per gli integrali tripli.

Esercizio. Provare i due teoremi della media per gli integrali tripli.

Esercizio. Definire il concetto di centro di massa di un solido $A \subseteq \mathbb{R}^3$ di densità $\delta(x, y, z)$. Cosa si può dedurre dai teoremi della media per ciò che riguarda la posizione del centro di massa?

Esercizio. Determinare il centro di massa di una semisfera (omogenea) di raggio r (ossia, determinare la distanza del centro di massa dal centro della sfera).

Esercizio. Definire il concetto di momento d'inerzia rispetto ad una retta di un solido $A \subseteq \mathbb{R}^3$ di densità $\delta(x, y, z)$.

Esercizio. Calcolare il momento d'inerzia di una sfera (omogenea) di massa m e raggio r rispetto ad una retta passante per il centro.

Esercizio. Calcolare il volume della sfera n -dimensionale generalizzando la nozione di integrale triplo.

4.2.5 Il teorema di Pappo-Guldino per i volumi dei solidi di rotazione

Consideriamo, nel semipiano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$ la regione

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z \in [z_0, z_1], f_1(z) \leq x \leq f_2(z)\},$$

con f_1 ed f_2 funzioni continue su $[z_0, z_1]$ e tali che $f_1(z) \leq f_2(z)$ per ogni $z \in [z_0, z_1]$. Calcoliamo il volume del solido \mathcal{V} generato dalla rotazione di angolo θ_0 (qui θ_0 è un angolo compreso tra 0 e 2π) attorno all'asse z della regione D .

Il volume cercato è dato da

$$\mu(\mathcal{V}) = \iiint_{\mathcal{V}} dx dy dz$$

Questo integrale è facile da fare usando le coordinate cilindriche:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = \zeta.$$

Infatti,

$$\iiint_{\mathcal{V}} dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}} \rho d\rho d\theta d\zeta,$$

dove

$$\mathcal{D} = \{(\rho, \theta, \zeta) : \theta \in [0, \theta_0], \zeta \in [z_0, z_1], f_1(\zeta) \leq \rho \leq f_2(\zeta)\}.$$

Con facili calcoli,

$$\iiint_{\mathcal{D}} \rho d\rho d\theta d\zeta = \frac{\theta_0}{2} \int_{z_0}^{z_1} [(f_2(z))^2 - (f_1(z))^2] dz.$$

Ricordando le formule per il baricentro della figura piana D , si ha che per la sua ascissa x_C vale la seguente relazione:

$$\mu_2(D)x_C = \iint_{D_0} x dx dz = \frac{1}{2} \int_{z_0}^{z_1} [(f_2(z))^2 - (f_1(z))^2] dz,$$

dove $D_0 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, 0, z) \in D\}$ e μ_2 indica la misura 2-dimensionale cioè l'area.

Confrontando le due formule abbiamo che

$$\mu(\mathcal{V}) = \iiint_{\mathcal{V}} dx dy dz = \theta_0 x_C \mu_2(D),$$

Osserviamo che $\theta_0 x_C$ è la lunghezza dell'arco di circonferenza percorso dal baricentro nella rotazione (da $\theta = 0$ a $\theta = \theta_0$). Cioè il volume di \mathcal{V} è il prodotto della lunghezza dell'arco percorso dal baricentro per la superficie della regione D . Questa affermazione è nota come *secondo teorema di Pappo-Guldino*. Una formula alternativa è la seguente: $\mu(\mathcal{V}) = \theta_0 d \mu_2(D)$ dove d è la distanza del baricentro dall'asse di rotazione.

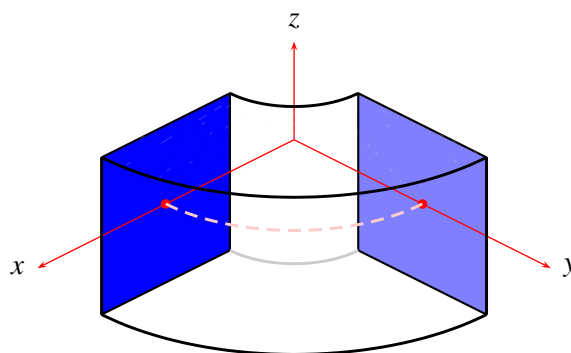
Dal momento che D è un sottoinsieme del piano xz , si ha $d = \frac{1}{\mu_2(D)} \iint_D x dx dz$. Dunque,

$$\mu(\mathcal{V}) = \theta_0 \iint_D x dx dz.$$

Questa formula può essere utile quando non si abbia un'espressione nota a priori per il centro di massa.

La dimostrazione fatta vale solo per regioni D che siano z -semplici. Più avanti ne vedremo una che vale per regioni descritte da una curva semplice chiusa.

Esempio. Calcoliamo il volume del solido \mathcal{V} generato dalla rotazione di un quarto di giro attorno all'asse z del quadrato di vertici $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(3, 0, 1)$ e $(3, 0, -1)$.



Usando la formula del secondo teorema di Pappo-Guldino si ottiene che il volume è dato dal prodotto dell'area del quadrato, che vale 4, e la lunghezza del percorso del baricentro del quadrato, che vale $\frac{\pi}{2}x_C$. Per motivi di simmetria $(x_C, y_C, z_C) = (2, 0, 0)$ quindi, $\mu(\mathcal{V}) = 4\pi$.

4.2.6 Integrali tripli dipendenti da un parametro (integrali tripli parametrici)

Riprendiamo ora quanto fatto nel capitolo 1 e nel paragrafo 3.2.6 estendendolo al caso degli integrali tripli.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato. Data $f: D \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua limitata, definiamo $G: D \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$G(x) := \iiint_{\Omega} f(x, y) dy_1 dy_2 dy_3, \quad x \in D.$$

Per quanto riguarda la continuità di G , nel caso in cui Ω è un parallelepipedo otteniamo come nel paragrafo 3.2.6 la seguente proposizione:

Proposizione. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia f limitata e continua. Se G è come sopra, allora è continua.

Se chiediamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ sia un insieme più generale, possiamo procedere come nel paragrafo 3.2.6 ottenendo:

Teorema (di continuità per integrali parametrici tripli). Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f: D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua e limitata con Ω misurabile. Allora $G: D \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$G(x) := \iiint_{\Omega} f(x, y) dy_1 dy_2 dy_3,$$

è continua.

Una conseguenza immediata è che se f , D e Ω sono come nel teorema, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \iiint_{\Omega} f(x, y) \, dy_1 \, dy_2 \, dy_3 = \iiint_{\Omega} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \, dy_1 \, dy_2 \, dy_3 = \iiint_{\Omega} f(x_0, y) \, dy_1 \, dy_2 \, dy_3.$$

Studiamo ora la derivabilità e la differenziabilità della funzione G . Procediamo esattamente come nel paragrafo 3.2.6.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e siano Ω e f come nel teorema di continuità. Posto $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$, supponiamo che per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$ la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ di f esista e che sia uniformemente continua per ogni $(x_1, \dots, x_n, y) = (x, y) \in D \times \Omega$. Essenzialmente la stessa dimostrazione fatta nel capitolo 1 mostra che vale il seguente teorema:

Teorema (di derivabilità per integrali parametrici tripli). *Siano f , G , Ω e D come sopra, allora la derivata parziale di G rispetto ad x_i esiste continua ed è data da:*

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) := \iiint_{\Omega} f(x, y) \, dy_1 \, dy_2 \, dy_3, \quad \forall x \in D.$$

Osserviamo che se si suppone che f abbia tutte le derivate $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ uniformemente continue, $i = 1, \dots, n$, allora tutte le derivate $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ esistono continue in D . Ne segue che G è una funzione C^1 in D . Indicheremo questa affermazione con il nome di *teorema di differenziabilità per integrali parametrici tripli*.

Se con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ si indica la matrice jacobiana di f rispetto alla prima variabile (vettoriale) x , allora per la matrice jacobiana $G'(x)$ si ha la seguente espressione

$$G'(x) = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy_1 \, dy_2 \, dy_3$$

dove l'integrazione è da intendersi elemento per elemento.

Capitolo 5

Integrali di superficie

5.1 Superfici parametrizzate.

Una *superficie parametrizzata* è un'applicazione continua $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita su una placca piana. La superficie φ si dice *semplice* se è iniettiva; si dice *regolare* se è di classe C^1 e la sua matrice jacobiana ha rango due in ogni punto.¹

Questo vuole dire che, se φ è come sopra, i vettori colonna della matrice jacobiana

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u,v)}$$

sono linearmente indipendenti per ogni $(u, v) \in X$. Per comodità indicheremo tali vettori con i simboli

$$\varphi_u(u, v) := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \quad \text{e} \quad \varphi_v(u, v) := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v).$$

Con questa notazione possiamo anche scrivere la matrice jacobiana nella seguente forma “a blocchi”:

$$\varphi'(u, v) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right).$$

Chiaramente $\varphi_u(u, v)$ e $\varphi_v(u, v)$ sono, rispettivamente, i vettori che si ottengono derivando (nel punto (u, v)) le curve parametriche “ v costante” e “ u costante”.

La condizione di indipendenza lineare di φ_u e φ_v può anche essere espressa richiedendo che il prodotto vettoriale $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)$ sia un vettore non nullo.² Ovvero che $\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\| \neq 0$.

¹Si dice che $\varphi \in C^1(X)$ se esiste un'estensione C^1 di φ definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ contenente X . Cioè esiste U aperto di \mathbb{R}^2 ed una funzione $\hat{\varphi}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\hat{\varphi} \in C^1(U)$ tale che $\hat{\varphi}(u, v) = \varphi(u, v)$ per ogni $(u, v) \in X$.

²Un'altra notazione usata per il prodotto vettoriale di v_1 e v_2 è $v_1 \times v_2$.

Osserviamo che

$$\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} \mathbf{i} - \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} \mathbf{j} + \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \mathbf{k}.$$

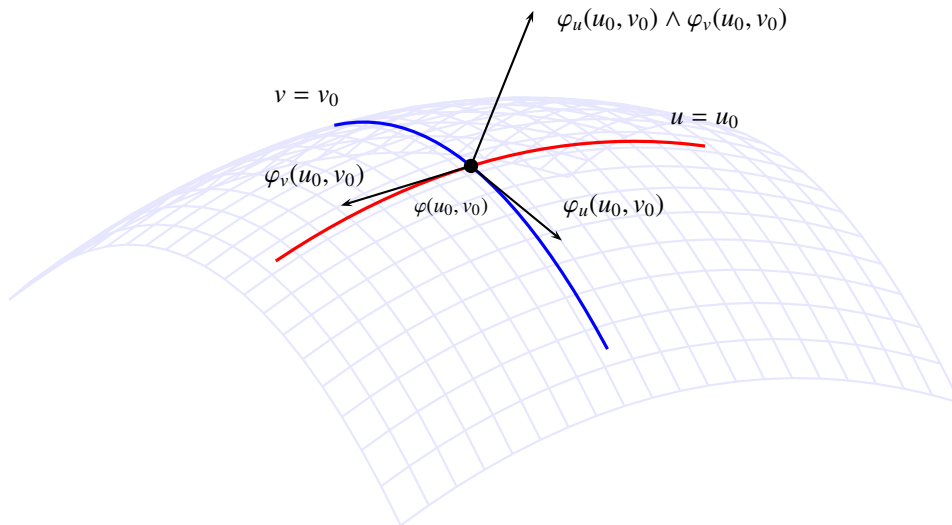
Un calcolo diretto³ mostra che

$$\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|^2 = \det([\varphi'(u, v)]^T \varphi'(u, v)).$$

Osserviamo infine che, essendo φ_u e φ_v vettori tangenti a curve contenute nella superficie, sono tangenti alla superficie. Se la superficie è regolare, il piano passante per $\varphi(u, v)$ e parallelo ai vettori $\varphi_u(u, v)$ e $\varphi_v(u, v)$ è unicamente determinato da questi visto che sono linearmente indipendenti ed è detto piano tangente alla superficie in $\varphi(u, v)$. Infine, osserviamo che, sempre se φ è regolare, $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)$ è ortogonale per ogni $(u, v) \in X$ sia a $\varphi_u(u, v)$ sia a $\varphi_v(u, v)$. Pertanto è ortogonale al piano tangente in $\varphi(u, v)$.

Esercizio. Quale è il significato geometrico degli elementi della matrice $[\varphi'(u, v)]^T \varphi'(u, v)$? Mostrare che

$$\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|^2 = \det([\varphi'(u, v)]^T \varphi'(u, v)) = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2. \quad (5.1)$$



Esempio. Scriviamo l'equazione del piano tangente $\Pi_{(x_0, y_0, z_0)}$ alla superficie regolare φ nel punto $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

³Si può anche dedurre dalla formula di Cauchy-Binet: Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, allora, per $m \geq n$,

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \det(A_{\{1, \dots, n\}, \{i_1, \dots, i_n\}}) \det(B_{\{i_1, \dots, i_n\}, \{1, \dots, n\}}),$$

e $\det(AB) = 0$ se $m < n$. In altre parole il determinante di AB è dato dalla somma dei prodotti di tutti gli $\binom{m}{n}$ sotto-determinanti di A , ottenuti scegliendo n colonne di A (senza alterare l'ordine), con i corrispondenti sotto-determinanti di B ottenuti scegliendo le n righe corrispondenti di B .

Se (x, y, z) è un punto di $\Pi_{(x_0, y_0, z_0)}$ allora il vettore $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$ è ortogonale al vettore $\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)$. Quindi,

$$\left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}, \varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0) \right\rangle = 0.$$

Da cui segue che, se $\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, allora

$$w_1(x - x_0) + w_2(y - y_0) + w_3(z - z_0) = 0$$

è l'equazione cartesiana del piano $\Pi_{(x_0, y_0, z_0)}$.

Un modo alternativo (ma completamente equivalente) per scrivere il piano tangente consiste nell'imporre che il vettore $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$ appartenga al piano generato dai vettori $\varphi_u(u_0, v_0)$ e $\varphi_v(u_0, v_0)$, cioè che sia loro combinazione lineare. Un modo sintetico di scrivere questo è il seguente:

$$\det \left(\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \mid \varphi_u(u_0, v_0) \mid \varphi_v(u_0, v_0) \right) = 0,$$

dove $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0)$.

Un esempio importante di superficie parametrizzata è la *funzione grafico*. Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 , con X lamina piana. Poniamo $\varphi^f(x, y) := (x, y, f(x, y))$. Vediamo che φ^f è una superficie parametrizzata regolare. Infatti

$$\varphi_u^f(x, y) \wedge \varphi_v^f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix},$$

che è non nullo. Osserviamo che

$$\|\varphi_u^f(x, y) \wedge \varphi_v^f(x, y)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1}.$$

Si osservi che l'immagine di φ^f è il grafico di f .

Esercizio. Scrivere l'equazione del piano tangente a φ^f .

Un sottoinsieme Σ di \mathbb{R}^3 è una *placca (di superficie regolare)* se è il sostegno (cioè l'immagine) di una superficie parametrica semplice e regolare $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^3$, detta *parametrizzazione* della placca. L'immagine $\varphi(\partial X)$ della frontiera di X si dice *bordo* di Σ e si denota $\partial\Sigma$.

Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una placca e φ una sua parametrizzazione. Dato $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0)$, il vettore

$$\mathbf{n}(x_0, y_0, z_0) := \frac{\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)}{\|\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)\|}$$

è detto *versore normale* alla placca.

Se Σ è il grafico di una funzione f , possiamo parametrizzare Σ con la funzione grafico di f . Sia $z_0 = f(x_0, y_0)$, si ha che

$$\mathbf{n}(x_0, y_0, z_0) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

è il versore normale a Σ in (x_0, y_0, z_0) .

Siano X_1 e X_2 placche piane e $\varphi: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\psi: X_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ due superfici parametrizzate regolari. Supponiamo che esista una funzione $g: X_1 \rightarrow X_2$ iniettiva, suriettiva e C^1 nell'interno di X_1 , tale che

$$\psi(g(u, v)) = \varphi(u, v) \quad (5.2)$$

e $\det(g'(u, v)) \neq 0$ per ogni $(u, v) \in X_1$. In questo caso, si dice che le φ e ψ sono *regolarmente equivalenti*. Chiaramente, superfici parametrizzate regolarmente equivalenti descrivono la stessa placca.

Vediamo che relazione vige, per ogni $(u, v) \in X_1$, tra i vettori normali $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)$ e $\psi_\xi(\xi, \eta) \wedge \psi_\eta(\xi, \eta)$ dove $(\xi, \eta) = g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$. Derivando la (5.2) otteniamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial g_2}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial g_2}{\partial v}.$$

Calcoliamo il prodotto vettoriale di questi due vettori usando la proprietà di linearità e di anticommutatività

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial g_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial g_1}{\partial v}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial g_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial g_2}{\partial v}}_{= \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix}} + \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial g_2}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial g_1}{\partial v}}_{= -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix}} + \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial g_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial g_2}{\partial v}}_{=0} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(\frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{\partial g_1}{\partial v} \frac{\partial g_2}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \det(g'(u, v)) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right). \quad (5.3)$$

5.1.1 Elemento d'area e integrale superficiale

Un'espressione differenziale (scalare) di grado due su un aperto U di \mathbb{R}^k è una funzione continua $\omega: U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. In altre parole, è una "legge" che ad ogni terna (p, v_1, v_2) di $U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ (ossia, ad ogni coppia di vettori applicati nello stesso punto) associa (in modo continuo) un numero reale $\omega(p, v_1, v_2)$.

Ovviamente il prodotto $f\omega$ di una funzione (continua) $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ per un'espressione differenziale ω su U (di grado due) è ancora un'espressione differenziale su U (di grado due): ad ogni terna (p, v_1, v_2) di $U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ associa il numero $f(p)\omega(p, v_1, v_2)$.

Tra tutte le espressioni differenziali di grado due, la più importante è l'*elemento di area* $d\sigma$, ossia quell'espressione differenziale che ad ogni coppia di vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ (applicati nello stesso punto) associa l'area del parallelogramma da questi individuato. In altre parole $d\sigma(p, v_1, v_2) = \|v_1 \wedge v_2\|$. Si osservi che sia l'elemento di lunghezza ds sia l'elemento d'area $d\sigma$ non dipendono dal punto di applicazione (ma soltanto dai vettori liberi).

Definizione. Sia $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrica di classe C^1 ed ω un'espressione differenziale di grado due su un aperto U contenente l'immagine di φ . L'integrale di ω su φ si definisce nel seguente modo:

$$\int_{\varphi} \omega = \iint_X \omega(\varphi(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)) dudv.$$

In particolare, se l'espressione ω è l'elemento di area $d\sigma$, il suddetto integrale si chiama *area della superficie parametrica* φ . Cioè

$$\text{Area}(\varphi) = \int_{\varphi} d\sigma.$$

Per giustificare la definizione di area si invita lo studente a controllare che quando φ è lineare ed X è un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$, l'integrale di $d\sigma$ su φ coincide con l'area del parallelogramma immagine di φ .

Teorema. Se $\varphi: X_1 \rightarrow \Sigma$ e $\psi: X_2 \rightarrow \Sigma$ sono due parametrizzazioni di una stessa placca di superficie ed f è una funzione continua definita su un aperto contenente Σ , allora

$$\int_{\varphi} f d\sigma = \int_{\psi} f d\sigma.$$

In particolare l'area di Σ non dipende dalla parametrizzazione.

Dimostrazione Sia $g: X_1 \rightarrow X_2$ una funzione continua suriettiva, C^1 nell'interno di X_2 con $g'(u, v)$ invertibile per ogni $(u, v) \in X_2$, tale che $\varphi = \psi \circ g$. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\psi} f d\sigma &= \iint_{X_2} f(\psi(\xi, \eta)) \|\psi_{\xi}(\xi, \eta) \wedge \psi_{\eta}(\xi, \eta)\| d\xi d\eta \\ &= \iint_{X_1} f(\psi(g(u, v))) \|\psi_{\xi}(g(u, v)) \wedge \psi_{\eta}(g(u, v))\| |\det g'(u, v)| dudv \\ &= \iint_{X_1} f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\| dudv = \int_{\varphi} f d\sigma, \end{aligned}$$

per la formula (5.3). □

In base al suddetto teorema ha senso quindi definire l'area di una placca Σ come l'integrale dell'espressione differenziale $d\sigma$ esteso ad una qualunque parametrizzazione $\varphi: X \rightarrow \Sigma$ di Σ . Integrale che, vista l'indipendenza dalla parametrizzazione, potrà anche essere scritto nella forma

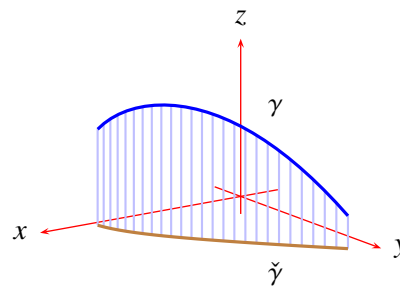
$$\text{Area}(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\sigma.$$

Più in generale, data una funzione continua $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, tramite la formula di cambiamento di variabili per gli integrali doppi, si potrebbe dimostrare che l'integrale lungo una parametrizzazione di Σ dell'espressione differenziale $\omega = g d\sigma$, ottenuta moltiplicando g per l'elemento di area $d\sigma$, non dipende dalla parametrizzazione scelta. Pertanto, analogamente al caso dell'area, col simbolo

$$\int_{\Sigma} g d\sigma$$

si intenderà l'integrale dell'espressione differenziale $g d\sigma$ lungo una qualunque parametrizzazione della placca Σ .

Esercizio. Sia γ una arco di curva in \mathbb{R}^3 . Da ogni punto di γ conduciamo il segmento perpendicolare al piano di equazione $z = 0$. Supponiamo che questo segmento non incontri nuovamente la curva. L'unione di questi segmenti costituisce una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Se ne esprima l'area in termini di un integrale curvilineo.



Una superficie S come nell'esercizio.

Svolgimento. Sia $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di γ . Possiamo scrivere una parametrizzazione $\varphi: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di S come segue:

$$\varphi(u, v) = (\psi_1(u), \psi_2(u), v\psi_3(u)).$$

Con facili calcoli si vede che

$$\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\| = \sqrt{(\psi'_1(u)\psi_3(u))^2 + (\psi'_2(u)\psi_3(u))^2} = |\psi_3(u)| \sqrt{(\psi'_1(u))^2 + (\psi'_2(u))^2}.$$

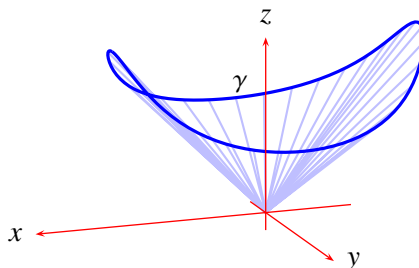
Allora

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \int_S d\sigma = \iint_{[a,b] \times [0,1]} \|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\| \, dudv \\ &= \iint_{[a,b] \times [0,1]} |\psi_3(u)| \sqrt{(\psi'_1(u))^2 + (\psi'_2(u))^2} \, dudv = \int_a^b |\psi_3(u)| \sqrt{(\psi'_1(u))^2 + (\psi'_2(u))^2} \, du = \int_{\tilde{\gamma}} h \, ds, \end{aligned}$$

dove $\tilde{\gamma}$ è la proiezione ortogonale di γ sul piano xy e h è la funzione che ad ogni $(x, y) \in \tilde{\gamma}$ associa la distanza dal piano $z = 0$ dell'unico punto di γ la cui proiezione, su tale piano, è $(x, y, 0)$. Chiaramente $u \mapsto (\psi_1(u), \psi_2(u), 0)$, $u \in [a, b]$, è una parametrizzazione di $\tilde{\gamma}$.

Esercizio. Si consideri, nel piano $z = 0$, la circonferenza C di centro l'origine e raggio 1. Sia $f(x, y) = x^2 - y^2$. Allora, il grafico della restrizione di f a C è un'arco di curva γ in \mathbb{R}^3 . Sia S la superficie ottenuta unendo con un segmento ogni punto di γ con la sua proiezione ortogonale sul piano $z = 0$. Calcolarne l'area.

Esercizio. Sia γ un arco di curva in \mathbb{R}^3 . Da ogni punto di γ conduciamo il segmento per l'origine $(0, 0, 0)$. L'unione di questi segmenti costituisce una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Se ne esprima l'area in termini di un integrale curvilineo.



Svolgimento. Sia $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di γ . Possiamo scrivere una parametrizzazione $\varphi: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di S come segue:

$$\varphi(u, v) = (v\psi_1(u), v\psi_2(u), v\psi_3(u)).$$

Quindi,

$$\varphi_u(u, v) = v\psi'(u) = \begin{pmatrix} v\psi'_1(u) \\ v\psi'_2(u) \\ v\psi'_3(u) \end{pmatrix}, \quad \varphi_v(u, v) = \begin{pmatrix} \psi_1(u) \\ \psi_2(u) \\ \psi_3(u) \end{pmatrix}$$

Notiamo che $\varphi_v(u, v)$ è uguale al vettore $\psi(u) - O$ che possiamo anche scrivere come $\psi(u)^T$. Usando la formula (5.1) abbiamo che

$$\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|^2 = v^2 (\|\psi(u)\|^2 \|\psi'(u)\|^2 - \langle \psi(u)^T, \psi'(u) \rangle^2)$$

Si noti che la parametrizzazione φ è regolare con l'unica eccezione dell'origine O .

Denotiamo con P il generico punto di γ e con \mathbf{t} il vettore tangente in P indichiamo inoltre con \mathbf{p} il versore $(P - O)/\|P - O\|$. Allora,

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \int_S d\sigma = \iint_{[a,b] \times [0,1]} \|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\| \, dudv \\ &= \iint_{[a,b] \times [0,1]} v \sqrt{\|\psi(u)\|^2 \|\psi'(u)\|^2 - \langle \psi(u)^T, \psi'(u) \rangle^2} \, dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b |\psi'(u)| \sqrt{\|\psi(u)\|^2 - \left\langle \psi(u)^T, \frac{\psi'(u)}{\|\psi'(u)\|} \right\rangle^2} \, du = \frac{1}{2} \int_\gamma \|P - O\| \sqrt{1 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{t} \rangle^2} \, ds. \end{aligned}$$

Osserviamo che \mathbf{p} può essere pensato come un punto sulla sfera di centro l'origine e raggio 1. In un certo senso, il fattore $\sqrt{1 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{t} \rangle^2}$ "misura" quanto la curva γ si discosta dallo stare su una sfera (di raggio

costante). Osserviamo, in particolare, che se γ giace su una sfera di centro l'origine e raggio R allora

$$\text{Area}(S) = \frac{R}{2} \int_{\gamma} ds = \frac{R \cdot \text{lunghezza}(\gamma)}{2}.$$

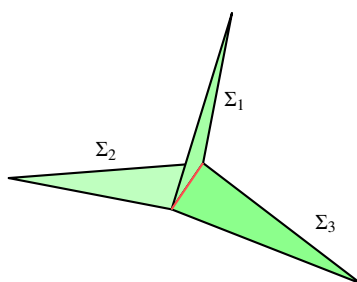
5.1.2 Superfici a placche

Definizione. Un sottoinsieme Σ di \mathbb{R}^3 si dice una *superficie a placche* (o *superficie generalmente regolare*) se è unione finita di placche “ben collegate”; ossia, tali che

- l'intersezione di due placche qualunque o è vuota, o è un sol punto, o è un arco di curva (regolare a tratti) facente parte del bordo di entrambe;
- tre o più placche si incontrano al più in un punto (del loro bordo).

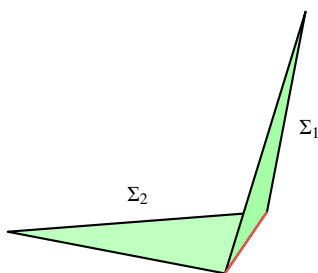
Ad esempio, una superficie sferica è unione di due placche (emisfero nord e emisfero sud) che si intersecano lungo il comune bordo (l'equatore).

Un altro esempio è costituito dalla superficie di un cubo: è unione di sei placche (sei facce quadrate).



Le tre placche Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 non sono ben collegate .

Il *bordo* $\partial\Sigma$ di una superficie a placche Σ è l'unione degli archi di curva che delimitano una sola placca (un arco di curva che delimita due placche non fa parte del bordo di Σ).



Il bordo della superficie a placche $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ è rappresentato in nero. La parte in rosso è l'intersezione delle due placche ben collegate Σ_1 e Σ_2 .

Una superficie a placche si dice *chiusa* se il suo bordo è vuoto (ad esempio, la superficie di un cubo).

Ovviamente, se Σ è una superficie a placche, costituita dalle placche $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$, e $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, l'integrale dell'espressione $g d\sigma$ sulla superficie Σ si definisce nel seguente modo:

$$\int_{\Sigma} g d\sigma = \int_{\Sigma_1} g d\sigma + \int_{\Sigma_2} g d\sigma + \dots + \int_{\Sigma_n} g d\sigma.$$

In particolare, l'area di una superficie a placche è la somma delle aree delle placche che compongono la superficie.

Esercizio. Calcolare l'area di una sfera di raggio R parametrizzandola in coordinate sferiche ($x = R \sin \varphi \cos \theta$, $y = R \sin \varphi \sin \theta$, $z = R \cos \theta$; $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$).

5.1.3 Osservazione sulla nozione di area, la lanterna di Schwarz

Nel paragrafo 2.2.3 abbiamo definito la lunghezza di una curva come l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte. È naturale chiedersi se una definizione simile possa essere data per l'area di una superficie.

Sfortunatamente, la situazione non è così semplice. Il seguente esempio (noto come *Lanterna di Schwarz*) fa capire perchè:

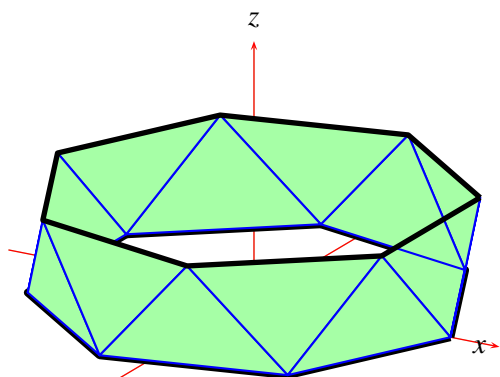
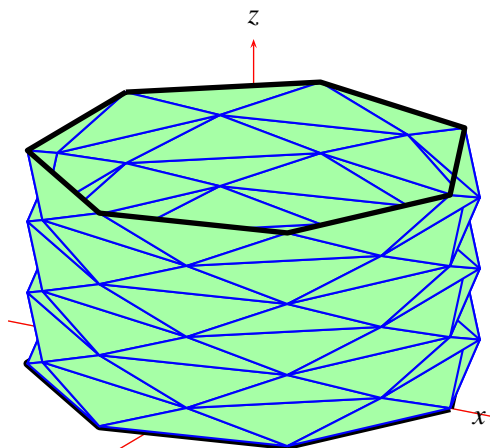
Si consideri una superficie cilindrica circolare retta \mathcal{S} di raggio r ed altezza h . Possiamo pensare che l'asse z sia l'asse del cilindro che supponiamo verticale e che la base del cilindro sia sul piano $z = 0$. Dati due numeri interi positivi n ed m , costruiamo una superficie poliedrale inscritta in \mathcal{S} con $2nm$ facce. Per farlo affettiamo orizzontalmente il cilindro in m 'bande' di uguale altezza. Questo lo possiamo fare considerando i piani p_j , $j = 0, \dots, m$ di equazione $z = jh/m$ e definendo la banda \mathcal{S}_j come la parte di \mathcal{S} compresa tra i piani p_{j-1} e p_j , con $j = 1, \dots, m$. Il bordo di \mathcal{S}_j è costituito dalle due circonferenze

$$C_{0,j} : \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ z = \frac{(j-1)h}{m}. \end{cases} \quad \text{e} \quad C_{1,j} : \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ z = \frac{jh}{m}. \end{cases}$$

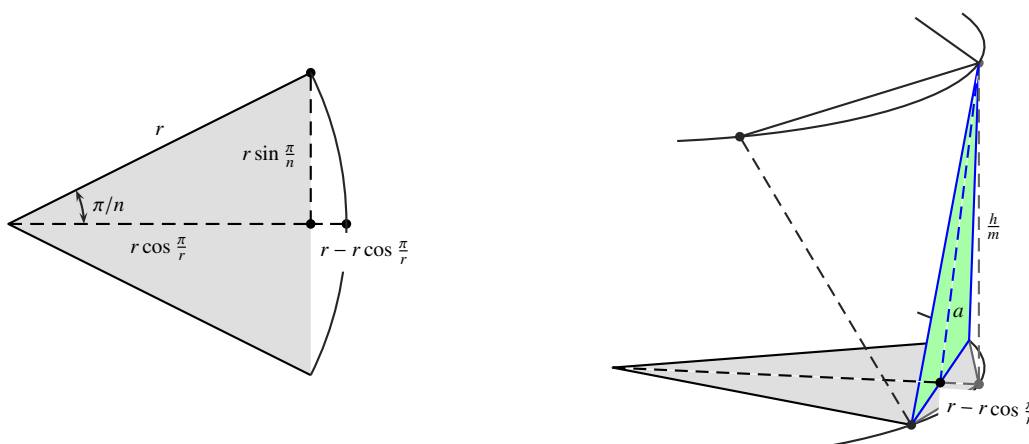
Siano $P_{0,j}$ e $P_{1,j}$ i poligoni regolari con n lati iscritti in $C_{0,j}$ e $C_{1,j}$, rispettivamente i cui vertici sono dati da

$$P_{0,j} : \left(r \cos \left(\frac{2\pi i}{n} \right), r \sin \left(\frac{2\pi i}{n} \right), \frac{(j-1)h}{m} \right), \quad P_{1,j} : \left(r \cos \left(\frac{2\pi i}{n} + \frac{\pi}{n} \right), r \sin \left(\frac{2\pi i}{n} + \frac{\pi}{n} \right), \frac{jh}{m} \right).$$

(In pratica, per j fissato, i due poligoni giacciono su piani paralleli distanti h/m e sono sfalsati di un angolo di π/n .) Unendo ogni vertice di $P_{0,j}$ con quelli adiacenti di $P_{1,j}$ si definiscono $2n$ triangoli isosceli (mutualmente congruenti) le cui basi e vertici sono su $P_{0,j}$ e $P_{1,j}$ alternativamente (si veda la figura seguente).

Superficie poliedrale inscritta in una banda ($n = 7$).Lanterna di Schwarz ($m = 6, n = 7$).

Ripetendo la stessa procedura per tutte le bande otteniamo una superficie poliedrale $\mathcal{L}_{m,n}$ inscritta in \mathcal{S} formata da $2mn$ triangoli isosceli mutualmente congruenti, che chiameremo Lanterna di Schwarz. Calcoliamone l'area.



Osservando la figura sopra si vede che la base di ciascun triangolo è lunga $2r \sin(\pi/n)$, mentre l'altezza a è data da (i triangoli **non** sono verticali):

$$a = \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + (r - r \cos(\pi/n))^2} = \frac{1}{m} \sqrt{h^2 + (mr)^2 (\sin(\pi/n))^2}.$$

Quindi l'area di ciascun triangolo vale

$$\frac{r}{m} \sin(\pi/n) \sqrt{h^2 + (mr)^2 (\sin(\pi/n))^2}.$$

Considerando che ci sono $2mn$ triangoli, l'area totale $A_{m,n}$ della superficie poliedrale vale

$$A_{m,n} = 2nr \sin(\pi/n) \sqrt{h^2 + (mr)^2 (\sin(\pi/n))^2}.$$

La costruzione appena effettuata determina una famiglia dipendente dai parametri m ed n di superfici poliedrali inscritte nel cilindro \mathcal{S} . Tuttavia, $\sup_{m,n \in \mathbb{N}} A_{m,n} = +\infty$, infatti, come si vede subito, $\lim_{m \rightarrow \infty} A_{m,n} = +\infty$ per ogni n fissato. Questo mostra che per definire la nozione di area di una superficie non si può procedere semplicemente per analogia con il caso delle curve.

Si osservi, inoltre, che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} A_{m,n} = 2\pi rh$$

che è l'area di \mathcal{S} . Di fatto non esiste il limite $\lim_{m,n \rightarrow \infty} A_{m,n}$.

Si potrebbe anche provare, ma non lo faremo, che dato $\varepsilon > 0$ e fissato m esiste N tale che per $n \geq N$

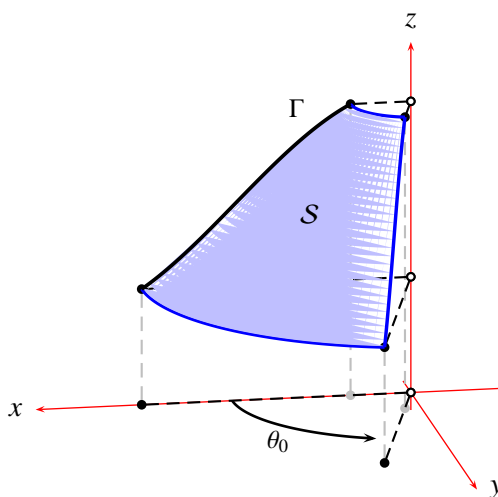
$$\mathcal{L}_{m,n} \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 - \varepsilon < x^2 + y^2 < r^2 + \varepsilon, 0 \leq z \leq h\}$$

cioè tale che $\mathcal{L}_{m,n}$ è tutta contenuta in un intorno arbitrariamente piccolo di \mathcal{S} . In altre parole, fissato m , \mathcal{S} può essere approssimato da $\mathcal{L}_{m,n}$ con una scelta opportuna di n .

5.1.4 Il Teorema di Pappo-Guldino per le superfici di rotazione

Condideriamo, nel semipiano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$ la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (\gamma_1(t), 0, \gamma_3(t))$, $t \in [a, b]$, con $\gamma_1(t) \geq 0$, e calcoliamo l'area della superficie \mathcal{S} generata dalla rotazione di angolo θ_0 (qui θ_0 è un angolo compreso tra 0 e 2π) attorno all'asse z dell'arco di curva $\Gamma = \gamma([a, b])$. L'area cercata è data da

$$\mu(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} d\sigma.$$



Scriviamo una parametrizzazione per la placca usando le coordinate cilindriche.

$$\varphi(t, \theta) = (\gamma_1(t) \cos \theta, \gamma_1(t) \sin \theta, \gamma_3(t)).$$

Con un semplice calcolo, ricordando che $\gamma_1(t) \geq 0$,

$$\|\varphi_t \wedge \varphi_\theta\| = \gamma_1(t) \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2}.$$

Allora, posto $R = [a, b] \times [0, \theta_0]$,

$$\mu(S) = \int_S d\sigma = \iint_R \gamma_1(t) \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2} dt d\theta = \theta_0 \int_a^b \gamma_1(t) \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2} dt. \quad (5.4)$$

Ricordando la formula del baricentro (x_C, y_C, z_C) per la curva γ , riconosciamo subito che

$$\int_a^b \gamma_1(t) \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2} dt = x_C L(\gamma),$$

Quindi la (5.4) diventa

$$\mu(A) = \theta_0 x_C L(\gamma).$$

Notiamo che $\theta_0 x_C$ non è altro che la lunghezza dell'arco percorso dal baricentro nella rotazione di angolo θ_0 . Notiamo anche che, l'ipotesi $\gamma_1(t) > 0$ equivale a chiedere che $\Gamma = \gamma((a, b))$ non attraversi l'asse di rotazione.

Cambiando le coordinate, se necessario, e ricordando che la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione, la formula trovata, nota anche come *primo teorema di Pappo-Guldino*, può esprimersi anche nel modo seguente: *L'area della superficie di rotazione generata dalla rotazione (anche parziale) dell'arco di curva Γ attorno ad un asse che non interseca Γ è dato dal prodotto della lunghezza dell'arco di circonferenza percorso dal baricentro di Γ per la lunghezza di Γ . Una espressione alternativa è la seguente:*

$$\mu(A) = \theta_0 d L(\gamma).$$

dove d rappresenta la distanza del baricentro dall'asse di rotazione.

Ricordando che $d = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x ds$. Dunque,

$$\mu(\mathcal{V}) = \theta_0 \int_\gamma x ds.$$

Questa formula può essere utile quando non sia nota a priori un'espressione per il centro di massa.

5.2 Superfici orientate; teoremi della divergenza e della circuitazione

5.2.1 Placche orientate

Un'orientazione di una placca di superficie è un campo continuo di versori normali alla superficie; ossia una legge che ad ogni punto della placca assegna, con continuità, un vettore di norma unitaria e normale alla superficie in quel punto (cioè normale allo spazio tangente).

Sia $\varphi: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare della placca $K \subseteq \mathbb{R}^3$ di superficie. Tramite φ abbiamo una scelta di un campo di versori normali prendendo, per ogni $(x, y, z) = \varphi(u, v) \in K$,

$$\mathbf{n}^\varphi(x, y, z) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|} = \frac{\varphi_u(\varphi^{-1}(x, y, z)) \wedge \varphi_v(\varphi^{-1}(x, y, z))}{\|\varphi_u(\varphi^{-1}(x, y, z)) \wedge \varphi_v(\varphi^{-1}(x, y, z))\|}.$$

Se $\psi: X_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un'altra parametrizzazione (regolarmente equivalente) di K allora esiste $g: X_1 \rightarrow X_2$ che è C^1 su X_1 , tale che $\det(g'(u, v)) \neq 0$ e $\varphi(u, v) = \psi(g(u, v))$ per ogni $(u, v) \in X_1$. Anche la ψ induce un campo di versori normali

$$\mathbf{n}^\psi(x, y, z) = \frac{\psi_u(\psi^{-1}(x, y, z)) \wedge \psi_v(\psi^{-1}(x, y, z))}{\|\psi_u(\psi^{-1}(x, y, z)) \wedge \psi_v(\psi^{-1}(x, y, z))\|}.$$

La formula (5.3) ci dice che

$$\mathbf{n}^\varphi(x, y, z) = \text{sign det}(g'(\varphi^{-1}(x, y, z))) \mathbf{n}^\psi(x, y, z).$$

Se il segno di $\det(g'(u, v))$ è positivo per ogni $(u, v) \in X$ si dice che φ e ψ inducono la stessa orientazione di K . Se invece è negativo, allora diciamo che inducono orientazioni opposte. La formula sopra, in particolare, prova che ogni placca di superficie ha soltanto due possibili orientazioni.

Una placca si dice *orientata* se è stata scelta una sua orientazione. Intuitivamente ciò significa avere scelto come positiva una delle due facce della superficie, quella da cui dipartono i versori normali, e che possiamo dipingere con un colore convenzionale (ad esempio rosso). L'altra faccia, che consideriamo negativa, può essere colorata di bianco. Il fatto che si possano dipingere le facce di una placca con due differenti colori (senza che questi vengano a contatto) costituisce l'aspetto intuitivo di un concetto topologico non facile da definire in termini elementari: il concetto di superficie orientabile. Le placche, appunto, sono superfici orientabili.

Delle due possibili orientazioni di una placca orientate diciamo *positiva* l'orientazione scelta e *negativa* l'altra. Similmente chiamiamo *positivo* il campo di versori normali corrispondenti all'orientazione positiva e *negativo* l'altra.

Sia, come sopra, $\varphi: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare della placca $K \subseteq \mathbb{R}^3$ di superficie. Il *bordo* di Σ , denotato con $\partial\Sigma$, è l'immagine di della frontiera di X_1 in \mathbb{R}^2 mediante la φ . Attenzione a non confondere il bordo con la frontiera di Σ anche se la notazione è la stessa! Si può dimostrare che $\partial\Sigma$ non dipende dalla parametrizzazione φ . In altre parole, una qualunque diversa parametrizzazione regolarmente equivalente $\psi: X_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di Σ determina lo stesso bordo di Σ , cioè $\partial\Sigma = \varphi(\partial X_1) = \psi(\partial X_2)$.⁴

Una placca orientata Σ induce in modo canonico un'orientazione sul suo bordo $\partial\Sigma$ nel modo seguente: Sia $\varphi: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare di Σ che induce l'orientazione positiva (cioè tale che \mathbf{n}^φ è il campo positivo di versori normali). Diamo a ∂X_1 la sua orientazione positiva vale a dire, ricordando quanto fatto nel piano, scegliamo per ogni $(u, v) \in \partial X_1$ un versore

⁴La dimostrazione di quest'affermazione dipende essenzialmente dal fatto che, se $g: X_1 \rightarrow X_2$ è iniettiva, suriettiva e C^1 con $\det(g'(u, v)) \neq 0$ per ogni $(u, v) \in X_1$, allora $g(\partial X_1) = \partial X_2$. Inoltre, se $\det(g'(u, v)) > 0$ per ogni $(u, v) \in X_1$ allora le orientazioni di ∂X_1 e ∂X_2 sono coerenti.

tangente⁵, $\mathbf{T}(u, v)$ a ∂X_1 . Per ogni⁶ $(x, y, z) = \varphi(u, v)$, con $(u, v) \in \partial X_1$, poniamo

$$\mathbf{t}(x, y, z) = \varphi'(u, v)\mathbf{T}(u, v) = \varphi'(\varphi^{-1}(x, y, z))\mathbf{T}(\varphi^{-1}(x, y, z)),$$

e diciamo che \mathbf{t} definisce l'*orientazione indotta (sul bordo)* di $\partial\Sigma$ (cioè il verso di percorrenza "positivo" su $\partial\Sigma$). È importante osservare che il verso di percorrenza è "positivo" in rapporto all'orientazione assegnata su Σ (indotta da φ), non in assoluto. Si potrebbe dimostrare che il verso di percorrenza di $\partial\Sigma$ dipende solo dall'orientazione di Σ , nel senso che data un'altra parametrizzazione equivalente della placca Σ che induca su di essa la stessa orientazione, questa induce la stessa orientazione di $\partial\Sigma$. Quest'affermazione segue dalla formula di derivazione di funzioni composte tenendo conto della nota 4.⁷

Ci sono altri modi migliori e più rigorosi per dare la nozione di orientazione indotta (sul bordo) che però richiedono nozioni topologiche che oltrepassano i limiti del corso. Anche la definizione riportata sopra può apparire un po' complessa. Conviene darle anche una descrizione intuitiva. L'idea è che occorre una convenzione per decidere come deve essere percorso il bordo $\partial\Sigma$ di una placca orientata Σ . Abbiamo visto che Σ , essendo orientata, ha una faccia positiva e una faccia negativa. In sintesi questo è il criterio di percorrenza: il bordo va percorso stando sulla faccia positiva in modo che la superficie si trovi sul lato sinistro (come se il bordo fosse un fiume che lambisce la faccia positiva lungo la sua riva sinistra). Per capire meglio quest'immagine mentale conviene considerare un campo di vettori positivo \mathbf{n} e porre

$$\boldsymbol{\tau}(x, y, z) = \frac{\mathbf{t}(x, y, z)}{\|\mathbf{t}(x, y, z)\|},$$

con \mathbf{t} sono definito come sopra. In questo modo, il vettore $\boldsymbol{\tau}$ indica il verso positivo su $\partial\Sigma$ in rapporto a \mathbf{n} . Consideriamo ora, per ogni $(x, y, z) \in \partial\Sigma$, il vettore dato da $\mathbf{e}(x, y, z) := \boldsymbol{\tau}(x, y, z) \wedge \mathbf{n}(x, y, z)$. Questo indica la *direzione tangente esterna* a Σ lungo $\partial\Sigma$. Si dice anche che \mathbf{e} *punta esternamente* a Σ . Ovviamente $-\mathbf{e}$ *punta internamente*. In pratica, la direzione positiva di percorrenza di $\partial\Sigma$ è quella di una persona che stando in piedi sul lato positivo della placca (la testa indica la direzione di \mathbf{n}) cammina in avanti (la direzione di $\boldsymbol{\tau}$) lungo il bordo $\partial\Sigma$ tenendo il braccio destro rivolto verso l'esterno (la direzione di \mathbf{e}) o, se si preferisce, il braccio sinistro rivolto verso l'interno di Σ (la direzione di $-\mathbf{e}$).

⁵Eccettuato al più un numero finito di punti di ∂X_1 .

⁶Eccettuato al più un numero finito di punti di $\partial\Sigma$.

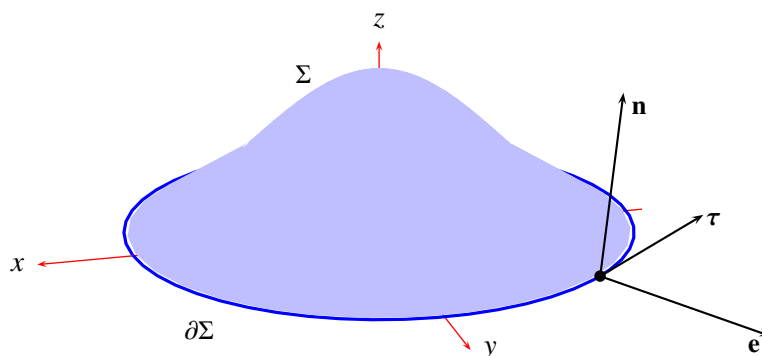
⁷Con la stessa notazione della nota 4, se \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 rappresentano vettori tangenti a X_1 e X_2 positivamente orientati e \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 sono i corrispondenti vettori tangenti a $\partial\Sigma$, si ha, in punti corrispondenti, $(x, y, z) = \varphi(u, v) = \psi(\xi, \eta)$,

$$\psi'(g(u, v))g'(u, v) = \varphi'(u, v), \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_2(g(u, v)) = g'(u, v)\mathbf{T}_1(u, v).$$

dunque,

$$\mathbf{t}_2(x, y, z) = \psi'(\xi, \eta)\mathbf{T}_2(\xi, \eta) = \psi'(g(u, v))g'(u, v)\mathbf{T}_1(u, v) = \varphi'(u, v)\mathbf{T}_1(u, v) = \mathbf{t}_1(x, y, z).$$

Quindi φ e ψ inducono lo stesso verso di percorrenza su $\partial\Sigma$.



Conviene in questa sede rivedere la nozione di orientazione indotta sulla frontiera di una placca piana, alla luce delle definizioni appena date. Immaginiamo di avere “immerso” \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3 identificando ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$. Dunque, data una placca piana $X \subseteq \mathbb{R}^2$, possiamo identificarla con il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 definito da

$$\tilde{X} := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in X\}.$$

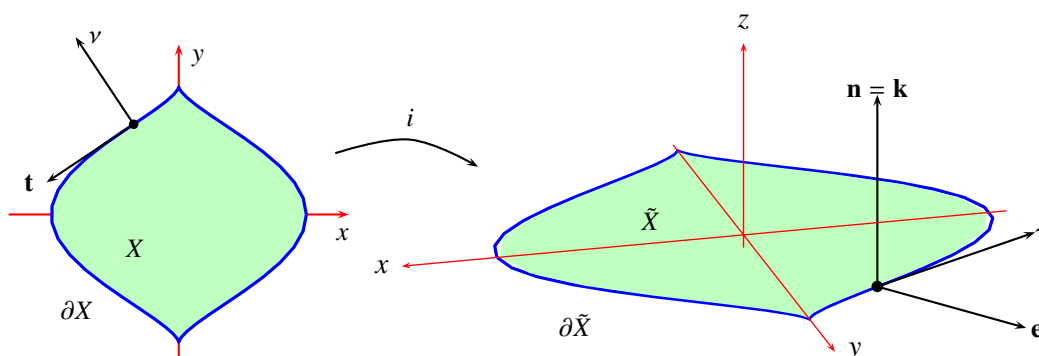
In altre parole \tilde{X} è l’immagine di X mediante la funzione iniettiva $i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ o, equivalentemente, \tilde{X} è il grafico della funzione $\zeta: (x, y) \in X \mapsto 0$. Chiaramente i e ζ sono differenziabili⁸ Dal momento che \tilde{X} è il grafico di una funzione differenziabile definita su una placca piana, è una placca di superficie. Orientiamola scegliendo come versore normale $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, il versore dell’asse z . Quindi il bordo di \tilde{X} ha un’orientazione indotta. Siano τ e \mathbf{t} i versori che definiscono (punto per punto) le orientazioni rispettivamente di \tilde{X} e di X . Allora vale la seguente relazione:

$$\tau(x, y, 0) = \tau(i(x, y)) = i'(x, y)\mathbf{t}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \partial X. \quad (5.5)$$

Osserviamo che τ è il vettore ottenuto aggiungendo “0” come terza componente al vettore \mathbf{t} . Infatti, posto $\mathbf{t}(x, y) = \begin{pmatrix} t_1(x, y) \\ t_2(x, y) \end{pmatrix}$, si ha

$$\tau(x, y, 0) = i'(x, y) \begin{pmatrix} t_1(x, y) \\ t_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1(x, y) \\ t_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1(x, y) \\ t_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La corrispondenza delle orientazioni (5.5) dipende dall’aver scelto per \mathbb{R}^2 l’orientazione indotta dalla base $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle$ e per \mathbb{R}^3 quella indotta dalla base $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ (\mathbf{i} e \mathbf{j} sono i versori degli assi x e y).

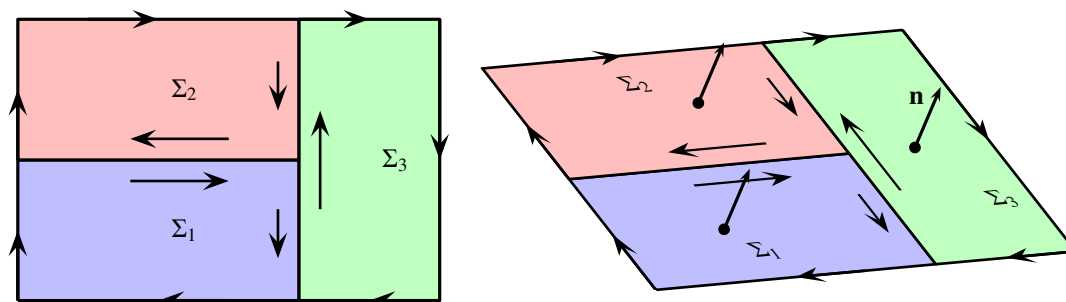


⁸In effetti i stabilisce un diffeomorfismo tra X e \tilde{X} . Notiamo che, con questa identificazione, $i(\partial X)$ non è la frontiera di \tilde{X} (nel senso della topologia) bensì il suo bordo, infatti la frontiera \tilde{X} in \mathbb{R}^3 è tutto \tilde{X} .

Osserviamo anche che se ν denota il versore normale esterno a X , il versore \mathbf{e} normale esterno a \tilde{X} per ogni $(x, y, 0) = i(x, y) \in \partial\tilde{X}$ è dato da $i'(x, y)\nu(x, y)$. In questa maniera $(\mathbf{e}, \tau, \mathbf{k})$ è una base con la stessa orientazione di $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

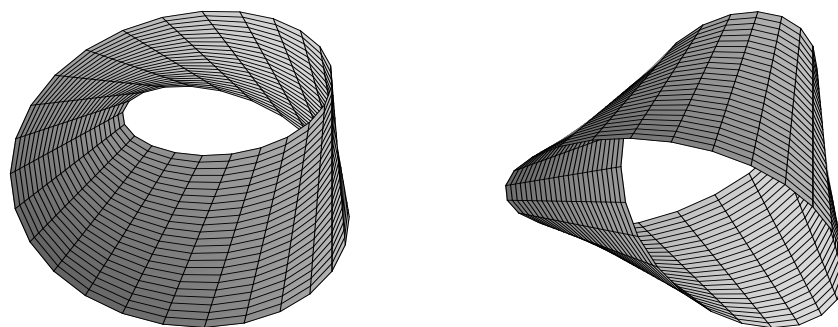
5.2.2 Orientazione di una superficie a placche

Un'orientazione di una superficie a placche è una collezione di orientazioni delle singole placche, in modo che due placche confinanti inducano orientazioni discordi sul bordo a comune.



Placche orientate in modo coerente.

Non sempre è possibile orientare una superficie a placche; quando lo è, la superficie si dice *orientabile*. Un famoso esempio di superficie (a placche) non orientabile è il cosiddetto *nastro di Möbius*, che può essere ottenuto incollando opportunamente due lati opposti di una placca rettangolare con due lati opposti di un'altra placca rettangolare (delle stesse dimensioni). Si osservi, infatti, che le due placche si possono “assemblare” in due modi possibili: in un caso si ottiene un cilindro (che è una superficie orientabile), nell'altro si ottiene il nastro di Möbius (che è non orientabile). Se i due rettangoli sono orientati (da una parte rossi e dall'altra bianchi), uno dei due modi di incollarli induce sul un lato comune ai due rettangoli la stessa orientazione, e non orientazioni opposte. In questo modo la superficie costituita dalle due placche rettangolari non è orientabile (infatti i due colori, rosso e bianco, “si toccano” sulla stessa faccia).



Il Nastro di Möbius è una superficie a placche non orientabile

Il *flusso* di un campo vettoriale $\mathbf{f}: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, attraverso una placca orientata Σ , è il numero

$$\int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

dove $\mathbf{n}: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ è il campo di versori normali che definisce l'orientazione della placca. In generale, il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie a placche orientate è la somma dei flussi attraverso le singole placche (ricordiamo che tutte le placche sono orientate).

5.2.3 Teoremi della divergenza e della circuitazione

Definizione. Sia $\mathbf{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto U di \mathbb{R}^3 . La *divergenza* di \mathbf{f} è la funzione (reale di tre variabili reali) definita da

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},$$

dove $f_1, f_2, f_3: U \rightarrow \mathbb{R}$ denotano le tre componenti di f . Un campo vettoriale si dice *solenoidale* se la sua divergenza è nulla.

Teorema della divergenza (o di Gauss). Sia $\mathbf{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su un sottoinsieme compatto A di \mathbb{R}^3 avente per frontiera una superficie a placche ∂A . Allora, denotato con \mathbf{n} il campo dei versori normali alla frontiera di A diretti verso l'esterno, risulta

$$\boxed{\iiint_A \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx dy dz = \int_{\partial A} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.}$$

In altre parole: l'integrale della divergenza di \mathbf{f} esteso ad A coincide con il flusso di \mathbf{f} uscente dalla superficie ∂A .

Osserviamo che, posto $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$, il teorema della divergenza ci dice che

$$\mu(A) = \frac{1}{3} \int_{\partial A} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{1}{3} \int_{\partial A} (x\mathbf{n}_1 + y\mathbf{n}_2 + z\mathbf{n}_3) \, d\sigma,$$

dove $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$, dipendente da $(x, y, z) \in \partial A$, rappresenta il versore normale uscente da A . Se $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ è un *qualsunque* versore normale (quindi $\vec{n} = \pm \mathbf{n}$),

$$\mu(A) = \frac{1}{3} \left| \int_{\partial A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \, d\sigma \right| = \frac{1}{3} \left| \int_{\partial A} (xn_1 + yn_2 + zn_3) \, d\sigma \right|, \quad (5.6)$$

Questa formula permette di calcolare il volume della parte di spazio racchiusa da una superficie a placche (limitata) orientabile.

Un'applicazione molto importante è il cosiddetto **Teorema di Gauss** che si incontra in elettrostatica le cui applicazioni gli studenti avranno già studiato nei corsi di fisica. Per capire come quest'ultimo segua dal teorema della divergenza, si consideri un campo vettoriale centrale diretto

verso un punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ la cui intensità decresce con il quadrato della distanza da p_0 , cioè:

$$v(x, y, z) = \frac{q}{\|\mathbf{x} - p_0\|^3}(\mathbf{x} - p_0), \quad (5.7)$$

con q una costante assegnata. Qui, per semplicità abbiamo posto $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Si noti che $\|v(x, y, z)\| = 1/\|\mathbf{x} - p_0\|^2$. Data una regione A come nel teorema della divergenza e contenente il punto p_0 al suo interno, si desidera calcolare il flusso uscente $\Phi_{\partial A}$ di v attraverso ∂A .

Notiamo che il teorema della divergenza non può essere applicato direttamente perché v non ne soddisfa le ipotesi. Per risolvere il problema si ricorre ad un artificio molto comune: osserviamo per prima cosa che, a meno di una traslazione, possiamo supporre che p_0 sia l'origine. Dal momento che A è aperto, possiamo prendere una sferetta S_r centrata nell'origine di raggio $r > 0$ così piccolo che S_r sia contenuta nell'interno di A . Il flusso di v uscente da S_r è facile da calcolare:

$$\Phi_r := \int_{S_r} v \cdot \vec{n} d\sigma = q \int_{S_r} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} d\sigma = q \int_{S_r} \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^4} d\sigma = \frac{q}{r^2} \int_{S_r} d\sigma = \frac{4\pi r^2 q}{r^2} = 4\pi q.$$

Applichiamo poi il teorema della divergenza alla regione $A \setminus B_r$, dove con B_r indichiamo la parte di spazio racchiusa da S_r . Calcoliamo la divergenza di v in questa regione.

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, y, z) = \frac{1}{(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3x^2}{(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{3/2}} - \frac{3x^2}{\|\mathbf{x}\|^{5/2}}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} v(x, y, z) &= \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{3/2}} - \frac{3y^2}{\|\mathbf{x}\|^{5/2}} \\ \frac{\partial}{\partial z} v(x, y, z) &= \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{3/2}} - \frac{3z^2}{\|\mathbf{x}\|^{5/2}}. \end{aligned}$$

Cosicché

$$\operatorname{div} v = \frac{3}{\|\mathbf{x}\|^{3/2}} - \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{\|\mathbf{x}\|^{5/2}} = \frac{3}{\|\mathbf{x}\|^{3/2}} - \frac{3}{\|\mathbf{x}\|^{3/2}} = 0.$$

Per il teorema della divergenza, il flusso uscente $\Phi_{\partial(A \setminus B_r)}$ dalla regione $A \setminus B_r$ vale 0 ma, allora, $0 = \Phi_{\partial(A \setminus B_r)} = \Phi_{\partial A} - \Phi_{S_r} = \Phi_{\partial A} - 4\pi q$ e dunque

$$\Phi_{\partial A} = 4\pi q.$$

Si osservi, in particolare, che il flusso di v è indipendente dalla scelta di A . In altre parole, se si desidera calcolare q per un campo della forma (5.7), possiamo scegliere un'opportuna regione A per il quale sia semplice calcolare il flusso $\Phi_{\partial A}$ e poi ricavare

$$q = \frac{1}{4\pi} \Phi_{\partial A}.$$

Che rappresenta il teorema di Gauss per una carica puntiforme isolata.⁹

⁹In effetti, questa formula fornisce anche un "Teorema di Gauss per la gravitazione": per una massa puntiforme isolata m poniamo $q = 4\pi m G$, dove G è la costante di gravitazione universale ($\approx 6.673 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg²). Otteniamo

$$m = \frac{1}{4\pi G} \int_{\partial A} \mathbf{g} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

dove \mathbf{g} è la forza di attrazione gravitazionale.

Questo risultato, grazie alla linearità della divergenza si generalizza al caso della sovrapposizione di più campi vettoriali. Si considerino campi vettoriali v_i , $i = 1, \dots, n$ dati da

$$v_i(x, y, z) = \frac{q_i \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - p_i\|^3},$$

con p_1, \dots, p_n nell'interno di A dati da $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, \dots, n$, e q_1, \dots, q_n costanti reali (positive o negative). Posto

$$v(x, y, z) = \sum_{i=1}^n v_i(x, y, z), \quad (5.8)$$

Calcoliamo la divergenza di v fuori dai punti p_i . Per la linearità e quanto visto sopra,

$$\operatorname{div} v(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \operatorname{div} v_i(x, y, z) = 0$$

Consideriamo delle palle $B_{r,i}$ di raggio r centrate in p_i , e supponiamo che r sia abbastanza piccolo affinché la chiusura $\overline{B}_{r,i}$ di ognuna delle palle $B_{r,i}$ sia contenuta nell'interno di A . Poniamo $D = A \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{B}_{r,i}$. Detta $S_{r,i} = \partial B_{r,i}$ la superficie sferica della palla $B_{r,i}$, procedendo come sopra possiamo calcolare il flusso di v_i attraverso $S_{r,i}$:

$$\int_{S_i} v_i \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{S_i} \frac{q_i}{r^2} \, d\sigma = 4\pi q_i.$$

Applicando il teorema della divergenza alla regione D , si ha

$$0 = \iiint_D \operatorname{div} v \, dx dy dz = \int_{\partial A} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \sum_{i=1}^n 4\pi q_i.$$

Da cui

$$\int_{\partial A} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 4\pi \sum_{i=1}^n q_i. \quad (5.9)$$

Similmente a quanto visto sopra, se si desidera calcolare $\sum_{i=1}^n q_i$ per un campo della forma (5.8), possiamo scegliere un'opportuna regione A per il quale sia semplice calcolare il flusso $\int_{\partial A} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ e poi ricavare

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

che è il contenuto del Teorema di Gauss che si studia in elettrostatica.¹⁰

¹⁰La formula appena trovata può apparire diversa da quella studiata nel corso di fisica. Si deve però tenere presente che nelle consuete unità di misura il campo elettrico generato da una carica puntiforme isolata collocata nell'origine si scrive secondo la legge di Coulomb come

$$v(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x}$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto ($\approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m. Ovvero, in termini di intensità $E = \|v\|$ del campo,

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

Pertanto, scrivendo $q_i = Q_i/(4\pi)$, otteniamo da (5.9) la formula usuale $\epsilon_0 \int_{\partial A} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \sum_{i=1}^n Q_i$.

Vediamo ora un'altra semplice applicazione del teorema della divergenza all'elettromagnetismo. Ricodiamo che uno dei postulati della magnetostatica nel vuoto è che $\operatorname{div} B = 0$, dove B rappresenta il vettore densità di flusso magnetico o *induzione magnetica*. Allora, data una regione A come nel teorema della divergenza, il flusso attraverso ∂A è nullo. Questo fatto esprime la **legge di conservazione del flusso magnetico**.

Infine, come ulteriore applicazione otteniamo una versione un po' più generale (rispetto a quella vista a pagina 83) del secondo teorema di Pappo-Guldino. Consideriamo, nel semipiano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$ la curva semplice chiusa parametrizzata da

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), 0, \gamma_3(t)), \quad t \in [a, b],$$

con $\gamma_1(t) \geq 0$, e sia \mathcal{D} la regione (nel piano $y = 0$) da essa racchiusa. Calcoliamo il volume del solido \mathcal{V} generato dalla rotazione di angolo θ_0 (qui θ_0 è un angolo compreso tra 0 e 2π) attorno all'asse z di \mathcal{D} . Per farlo usiamo la (5.6). La frontiera $\partial\mathcal{V}$ è parametrizzata, come si vede subito, da

$$\varphi(t, \theta) = (\gamma_1(t) \cos \theta, \gamma_1(t) \sin \theta, \gamma_3(t)).$$

Otteniamo

$$\varphi_t(t, \theta) \wedge \varphi_\theta(t, \theta) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \cos \theta \\ \gamma_1'(t) \sin \theta \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\gamma_1(t) \sin \theta \\ \gamma_1(t) \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_1(t) \gamma_3'(t) \cos \theta \\ -\gamma_1(t) \gamma_3'(t) \sin \theta \\ \gamma_1(t) \gamma_1'(t) \end{pmatrix}.$$

Allora, posto $\vec{n} = \frac{\varphi_t(t, \theta) \wedge \varphi_\theta(t, \theta)}{\|\varphi_t(t, \theta) \wedge \varphi_\theta(t, \theta)\|}$, si ha

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\varphi_t(t, \theta) \wedge \varphi_\theta(t, \theta)}{\|\varphi_t(t, \theta) \wedge \varphi_\theta(t, \theta)\|} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \cos \theta \\ \gamma_1(t) \sin \theta \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = \frac{\gamma_1(t)(\gamma_1'(t)\gamma_3(t) - \gamma_1(t)\gamma_3'(t))}{\|\varphi_t(t, \theta) \wedge \varphi_\theta(t, \theta)\|}.$$

Per la (5.6) e la definizione di integrale di superficie, il volume cercato è dato da

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{V}) &= \frac{1}{3} \left| \iint_{[a, b] \times [0, \theta_0]} [\gamma_1(t)(\gamma_1'(t)\gamma_3(t) - \gamma_1(t)\gamma_3'(t))] dt d\theta \right| \\ &= \frac{\theta_0}{3} \left| \int_a^b [\gamma_1(t)(\gamma_1'(t)\gamma_3(t) - \gamma_1(t)\gamma_3'(t))] dt \right|. \end{aligned}$$

Confrontando l'ultimo integrale con la (3.11) a pagina 67 e, ricordando che la curva γ giace nel piano xz , otteniamo che

$$\begin{aligned} \mu_2(D)x_C &= \frac{1}{3} \int_{\partial D} x^2 dz - xz dx = \frac{1}{3} \int_a^b (\gamma_1(t)^2 \gamma_2'(t) - \gamma_1(t) \gamma_3(t) \gamma_1'(t)) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_a^b \gamma_1(t) (\gamma_1(t) \gamma_2'(t) - \gamma_3(t) \gamma_1'(t)) dt, \end{aligned}$$

dove x_C è l'ascissa del baricentro della curva γ (cioè la distanza di questo dall'asse di rotazione) e $\mu_2(D)$ denota la misura 2-dimensionale di D .

Confrontando questa formula con quella ottenuta sopra per il volume $\mu(\mathcal{V})$ riconosciamo che

$$\mu(\mathcal{V}) = \theta_0 x_C \mu_2(D),$$

Cioè il volume di \mathcal{V} è il prodotto della lunghezza dell'arco percorso dal baricentro di D per la superficie della regione D . Abbiamo quindi ottenuto una generalizzazione del secondo teorema di Pappo-Guldino.

Ricordiamo, come già visto nel paragrafo 4.2.5, che la formula del secondo teorema di Pappo-Guldino può essere espressa anche così:

$$\mu(\mathcal{V}) = \theta_0 \iint_D x \, dx dz.$$

Analogamente al caso degli integrali doppi, vale la seguente **formula di integrazione per parti**:
Per $i = 1, 2, 3$

$$\boxed{\iiint_X v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \int_{\partial X} u(x) v(x) \mathbf{n}_i \, d\sigma - \iiint_X u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3,}$$

dove $x = (x_1, x_2, x_3)$ e \mathbf{n}_i denota la i -sima componente della normale esterna a X , con $X \subseteq \mathbb{R}^3$ compatto e tale che ∂X è una superficie a placche.

Posto $v(x) \equiv 1$, le formule precedenti, per $i = 1, 2, 3$, si riducono a

$$\boxed{\iiint_X \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \int_{\partial X} u(x) \mathbf{n}_i \, d\sigma.}$$

Che sono l'analogo delle formule di Gauss-Green.

Definizione. Sia $\mathbf{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto U di \mathbb{R}^3 . Si chiama *rotore* di \mathbf{f} il campo vettoriale di componenti

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y},$$

dove $f_1, f_2, f_3: U \rightarrow \mathbb{R}$ denotano le tre componenti di \mathbf{f} .

Come regola mnemonica, si usa scrivere

$$\text{rot } \mathbf{f} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

Un campo vettoriale con rotore nullo si dice *irrotazionale*.

Teorema della circuitazione (o di Stokes). Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una placca orientata (o, più in generale, una superficie a placche orientata) e sia $\mathbf{f}: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su Σ . Denotato con \mathbf{n} il campo di versori normali a Σ secondo l'orientazione scelta, si ha

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds,$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente al bordo di Σ , scelto tenendo conto dell'orientazione indotta. In altre parole, il flusso del rotore di \mathbf{f} attraverso la superficie orientata Σ è uguale alla circuitazione di \mathbf{f} lungo il bordo di Σ (secondo l'orientazione indotta).

Esempio. Si consideri il campo vettoriale

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} -zy \\ -zx - z^2/2 \\ xz \end{pmatrix}$$

e la famiglia $\{\pi_\theta\}_{\theta \in [0, \pi]}$ di piani per l'origine ortogonali al versore $n_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$. Cerchiamo quali, tra questi piani, è tale che il lavoro di v su una qualunque curva chiusa contenuta in π_θ sia nullo.

Chiaramente, il lavoro di v lungo una curva chiusa $C_\theta \subseteq \pi_\theta$ è dato da

$$\int_{C_\theta} v \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds = \int_{B_\theta} \operatorname{rot} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

dove B_θ è la parte del piano π_θ racchiusa da C_θ . Allora il lavoro è nullo, per qualunque curva C_θ se e soltanto se $n_\theta \cdot \operatorname{rot} v = 0$ per ogni $(x, y, z) \in \pi_\theta$. Cioè:

$$0 = n_\theta \cdot \operatorname{rot} v(x, y, z) = x \cos \theta - y \sin \theta - z(\cos \theta - \sin \theta).$$

Questa condizione è soddisfatta per ogni $(x, y, z) \in \pi_\theta$ se e solo se $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ricordiamo che abbiamo preso $\theta \in [0, \pi)$).

Un'applicazione importante del teorema della circuitazione in elettromagnetismo è la seguente. Uno dei due postulati fondamentali della magnetostatica del vuoto¹¹ è $\operatorname{rot} B = \mu_0 J$ dove B è la densità di flusso magnetico, J è la densità di corrente e μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto ($= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$). Sia Σ come nel teorema della circuitazione, si ha

$$\mu_0 I = \mu_0 \int_{\Sigma} J \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Sigma} B \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} B \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds,$$

dove I è la corrente totale che fluisce attraverso Σ . In breve,

$$\mu_0 I = \int_{\partial\Sigma} B \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds$$

Che è la cosiddetta **legge di circuitazione di Ampère**.

¹¹L'altro postulato è $\operatorname{div} B = 0$ che, come abbiamo già visto, ha per conseguenza la legge di conservazione del flusso magnetico.

5.2.4 Formula di coarea per gli integrali tripli

Anche per gli integrali tripli vale la formula di coarea. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e sia $g : A \rightarrow [a, b]$ una funzione C^3 su A . Sia inoltre $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora

$$\boxed{\iiint_A f(x) \|\nabla g(x)\| dx_1 dx_2 dx_3 = \int_a^b \left(\int_{g^{-1}(t)} f(x) d\sigma \right) dt.}$$

Qui $x = (x_1, x_2, x_3)$ e l'integrale che compare dentro la parentesi a secondo membro è un integrale curvilineo di prima specie sulla curva $g^{-1}(t)$. Come nel caso degli integrali doppi si può dimostrare che l'insieme dei t appartenenti ad $[a, b]$ tali che $g^{-1}(t)$ non è (localmente) il sostegno di una superficie parametrizzata regolare ha misura nulla.

Anche in questo caso, una conseguenza interessante è la seguente: Chiamata $B(\bar{x}, r)$ la palla di centro \bar{x} e raggio r e posto $g(x) = \|x - \bar{x}\|$ si ha

$$\iiint_{B(\bar{x}, r)} f dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{B(\bar{x}, r) \setminus \{\bar{x}\}} f dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^r \left(\int_{\partial B(\bar{x}, \rho)} f(x) d\sigma \right) d\rho.$$

Capitolo 6

Operatori differenziali in \mathbb{R}^3

6.1 Definizioni e prime proprietà

6.1.1 Definizioni e interpretazioni

Gli operatori differenziali che prendiamo in considerazione sono quelli che abbiamo già incontrato: la divergenza div , il gradiente ∇ , il rotore rot , ed uno che non abbiamo ancora visto: il laplaciano Δ . A seconda di come operano, essi si possono distinguere come segue:

rot	Fa corrispondere campi vettoriali a campi vettoriali
∇	Fa corrispondere funzioni a campi vettoriali
div	Fa corrispondere campi vettoriali a funzioni
Δ	Fa corrispondere funzioni a funzioni e campi vettoriali a campi vettoriali

Il laplaciano è definito come segue: data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 sull'aperto A , si pone

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n).$$

(Vedremo più avanti la definizione di Δv nel caso in cui v sia un campo vettoriale.)

La divergenza può essere generalizzata a campi vettoriali in \mathbb{R}^n scrivendo, per $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 ,

$$\text{div } v(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Una interpretazione 'fisica' della divergenza è la seguente (la enunciamo senza dimostrazione): Dato un campo vettoriale v di classe C^1 in un intorno di (x_0, y_0, z_0) si ha

$$\text{div } v(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r^3} \int_{S_r} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

dove S_r è la sfera (non la palla) di raggio r centrata in (x_0, y_0, z_0) e \mathbf{n} è la normale esterna. Chiaramente, $\frac{3}{4\pi r^3}$ non è altro che il reciproco del volume di spazio racchiuso da S_r . In altre parole, se v rappresenta la densità di flusso (massa per unità di tempo nella direzione di v) di un fluido in moto stazionario (cioè non dipendente dal tempo) $\operatorname{div} v$ rappresenta la variazione di massa per unità di volume e per unità di tempo nel punto (x_0, y_0, z_0) .

Similmente, per il rotore vale la seguente relazione

$$\operatorname{rot} v(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r^3} \int_{S_r} \mathbf{n} \wedge v d\sigma,$$

dove l'operazione di integrazione è effettuata componente per componente. Lo studente è invitato a meditare sul significato fisico di questa relazione.

6.1.2 Relazioni con la matrice jacobiana

Ci sono molte importanti relazioni tra i quattro operatori differenziali citati. Vediamone alcune, altre le incontreremo negli esercizi.

Il rotore e la divergenza sono entrambi in relazione con la matrice jacobiana. Se $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 nell'aperto A , si ha che $\operatorname{div} v(x_0, y_0, z_0)$, $(x_0, y_0, z_0) \in A$, non è altro che la traccia¹ della matrice jacobiana $v'(x_0, y_0, z_0)$. In simboli

$$\operatorname{div} v(x_0, y_0, z_0) = \operatorname{tr} v'(x_0, y_0, z_0).$$

Ricordiamo che ogni matrice reale M può essere scritta come somma della sua *parte simmetrica* $\frac{1}{2}(M + M^T)$ e della sua *parte antisimmetrica* $\frac{1}{2}(M - M^T)$. La parte antisimmetrica della matrice jacobiana

$$v'(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

è data da

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z} & \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

Lo studente riconoscerà negli elementi non diagonali le componenti di $\operatorname{rot} v$ (o i loro opposti). Quindi v è irrotazionale se e solo se $v'(x_0, y_0, z_0)$ è simmetrica. Si potrebbe dire che il rotore 'misura' quanto asimmetrica sia la matrice jacobiana di v .

¹La somma degli elementi della diagonale principale

6.2 Relazioni

6.2.1 Legami tra gli operatori

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 sull'aperto A , e sia $v = \nabla f$. Il fatto (che ormai dovrebbe essere ben noto) che v conservativo implica v irrotazionale ci da subito la seguente importante relazione:

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0. \quad (6.1)$$

Osserviamo che se g è un campo vettoriale e f è di classe C^2 allora $\operatorname{rot}(g + \nabla f) = 0$. Possiamo scrivere questa relazione anche in un altro modo: Se g e h sono campi vettoriali che differiscono per un gradiente, cioè se esiste f tale che $g - h = \nabla f$ allora $\operatorname{rot}(g - h) = 0$. Ci chiediamo se sia vero anche il viceversa, cioè se sia vero che per campi g e h tali che $\operatorname{rot}(g - h) = 0$ debba esistere una funzione f tale che $g - h = \nabla f$. La risposta è negativa in generale ma vera nei domini semplicemente connessi. Infatti, se g ed h sono tali che $\operatorname{rot}(g - h) = 0$ ed il dominio è semplicemente connesso, il campo $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) - h(x, y, z)$ è irrotazionale in un semplicemente connesso e quindi conservativo (ammette un potenziale). Se f denota il potenziale di questo campo, si ha

$$\nabla f(x, y, z) = g(x, y, z) - h(x, y, z).$$

Se f come sopra è di classe C^2 , allora con un calcolo diretto si ottiene

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f.$$

Ancora calcoli diretti provano (esercizio!) che

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0, \quad (6.2)$$

e che

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \nabla(\operatorname{div} v) - \Delta v,$$

dove

$$\Delta v := \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$$

Esercizio. Dimostrare che gli operatori div , ∇ , rot e Δ sono lineari.

Esercizio. Dimostrare che se f e v sono come sopra

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fv) &= f \operatorname{div} v + \nabla f \cdot v, \\ \operatorname{rot}(fv) &= f \operatorname{rot} v + \nabla f \wedge v, \end{aligned}$$

dove con fv si intende il campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y, z)v_1(x, y, z) \\ f(x, y, z)v_2(x, y, z) \\ f(x, y, z)v_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

per ogni (x, y, z) nel dominio comune di f e v .

Osservazione importante. La (6.2) da una condizione necessaria affinché un campo vettoriale sia un rotore: *Condizione necessaria affinché un campo vettoriale w sia il rotore di un altro campo vettoriale è che esso sia solenoidale* (cioè che la sua divergenza sia nulla).

Si può dimostrare che questa condizione **non** è sufficiente (neppure se la regione considerata fosse semplicemente connessa). È però possibile provare con qualche conto che la condizione è sufficiente sui parallelepipedi. Questo è l'argomento del paragrafo seguente.

6.2.2 Ricostruzione di un campo dal suo rotore (potenziale vettore)

Supponiamo, per esempio, di volere determinare tutti i campi vettoriali f tali che

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

in \mathbb{R}^3 .² Se f ha la proprietà (6.3), allora deve valere

$$\begin{cases} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} = x, \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} = -y, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Se possiamo risolvere questo sistema di equazioni allora troviamo un campo con la proprietà richiesta. In generale, non possiamo aspettarci una soluzione unica. Infatti, dal momento che il rotore di un gradiente vale 0 (per (6.1)), avremo che f risulterà determinata a meno di un gradiente, nel senso che se f è tale che $\operatorname{rot} f(x, y, z) = (x, -y, 0)$, allora anche $f + \nabla\varphi$ ha la stessa proprietà *qualunque sia la funzione φ di classe C^2* . Viceversa (si veda il paragrafo precedente) scegliamo un qualunque campo f con la proprietà (6.1) allora, se \bar{f} è un altro campo con la stessa proprietà, esiste una funzione φ tale che $f - \bar{f} = \nabla\varphi$. In altre parole, se possiamo determinare una soluzione f di (6.4), allora possiamo scriverne tutte le soluzioni nella forma $f + \nabla\varphi$ con φ funzione arbitraria.

Vediamo allora come possiamo trovare una soluzione di (6.4). Facciamo un tentativo (in fondo stiamo cercando *una* soluzione, non *tutte* le soluzioni) e poniamo $f_1(x, y, z) \equiv 0$. La seconda e terza equazione in (6.4) diventano, rispettivamente,

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = y, \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0.$$

Integrando rispetto a x otteniamo, rispettivamente, $f_3(x, y, z) = xy + g(y, z)$ e $f_2(x, y, z) = h(y, z)$ dove g e h sono funzioni arbitrarie di y e z . Facendo ora uso della prima delle (6.4) e delle espressioni appena determinate, otteniamo

$$x = \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} = x + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z},$$

²Un campo vettoriale con questa proprietà è detto *potenziale vettore* del campo $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$.

da cui segue

$$\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} = 0. \quad (6.5)$$

Cerchiamo una soluzione ponendo $g(y, z) = 0$. La (6.5) diventa

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

da cui segue, integrando rispetto a z che $h(y, z) = p(y)$ per una arbitraria funzione p . In definitiva,

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ p(y) \\ xy \end{pmatrix}$$

soddisfa la (6.4) per ogni scelta della funzione p . Possiamo, per esempio, scegliere $p(y) = 0$ cosicché

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}$$

ha la proprietà richiesta. Tutte le soluzioni della (6.4) sono della forma $f + \nabla\varphi$, con φ funzione arbitraria. Dunque tutti i campi vettoriali che hanno la proprietà (6.3) sono della forma

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) + \nabla\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ xy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

In generale, vale il seguente:

Teorema Sia $R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$, sia inoltre $v: R \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale C^1 . Allora $\operatorname{div} v(x, y, z) \equiv 0$ se e solo se esiste un campo vettoriale $w: R \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{rot} w(x, y, z) \equiv v(x, y, z)$.

Dimostrazione (Cenni). La necessità della condizione non è altro che la formula (6.2). La dimostrazione della sufficienza è di natura costruttiva (nel senso che si esibisce esplicitamente un campo w con le proprietà richieste), e segue da vicino i passi della costruzione effettuata sopra: Se v_i , con $i = 1, 2, 3$, indica la i -sima componente del campo vettoriale v , la costruzione precedente suggerisce di scegliere per $(x, y, z) \in R$

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x v_3(t, y, z) dt - \int_{z_0}^z v_1(x_0, y, t) dt \\ - \int_{x_0}^x v_2(t, y, z) dt \end{pmatrix},$$

dove $x_0 \in (a_1, b_1)$ e $z_0 \in (a_3, b_3)$ sono scelti arbitrariamente. La verifica che w ha le proprietà cercate è lasciata al lettore. \square

Se v e w sono come nel teorema, tutti i campi che hanno la proprietà (6.3) sono della forma $w + \nabla\varphi$ con φ funzione arbitraria.

Esempio. Calcoliamo il flusso del campo

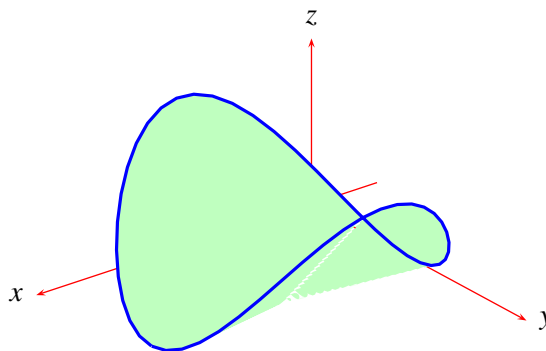
$$v(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

attraverso il grafico Σ (con vettore normale verso l'alto) della funzione

$$\varphi(x, y) := \frac{(y-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}$$

definita sul disco $D \subseteq \mathbb{R}^2$ di centro il punto $(1, 1)$ e raggio 1. Il bordo di Σ può essere parametrizzato da

$$\gamma(\theta) = (1 + \cos \theta, 1 + \sin \theta, (\sin \theta)^2), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$



Come abbiamo visto v è solenoidale e $v(x, y, z) = \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}$. Allora, per il teorema di Stokes

$$\text{Flusso di } v \text{ attraverso } \Sigma = \int_{\Sigma} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix} \cdot \mathbf{t} \, ds.$$

Si ha

$$\gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{t}(\theta) = \frac{\gamma'(\theta)}{\|\gamma'(\theta)\|}.$$

dunque,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 + \cos \theta)(1 + \sin \theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(1 + \sin \theta + \cos \theta) \sin(2\theta) + \frac{1}{2} (\sin(2\theta))^2 \right] d\theta = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

è il risultato cercato.

6.2.3 Il vettore simbolico ∇

Una modo per memorizzare meglio gli operatori differenziali descritti finora è introdurre il vettore simbolico $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ e osservare che (in modo puramente formale)

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} v &= \nabla \wedge v \\ \operatorname{div} v &= \nabla \cdot v \\ \Delta f &= (\nabla \cdot \nabla)f, \quad \Delta v = (\nabla \cdot \nabla)v\end{aligned}$$

dove f e v sono come sopra e Δ è identificato con l'operatore simbolico $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. A causa dell'ultima identità, il laplaciano viene anche indicato con il simbolo ∇^2 .

Osserviamo che nel caso scalare (ma non in quello vettoriale)

$$\Delta f = (\nabla \cdot \nabla)f = \nabla \cdot (\nabla f) = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Nel caso vettoriale, infatti, ∇v non è definito. Quindi, attenzione a maneggiare i simboli!

Esercizio. Posto $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $v(x) = u(x)\nabla v(x)$ con u e v funzioni C^2 su $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto la cui frontiera sia una superficie a placche, dimostrare, usando il teorema della divergenza, che

$$\iiint_U v(x)\Delta u(x) dx_1 dx_2 dx_3 = - \iiint_U \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) d\sigma, \quad (6.6)$$

dove \mathbf{n} è la normale uscente.

Esercizio. Posto $x = (x_1, x_2, x_3)$, definiamo $v(x) = u(x)\nabla v(x) - v(x)\nabla u(x)$ con u e v funzioni C^2 su $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto la cui frontiera sia una superficie a placche. Dimostrare, usando il teorema della divergenza, che

$$\iiint_U (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\partial U} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(x) \right) d\sigma, \quad (6.7)$$

dove \mathbf{n} è la normale uscente.

Le formule (6.6)–(6.7) sono dette rispettivamente *Prima e Seconda Identità di Green*.

Esercizio. I due esercizi precedenti hanno un parallelo naturale in \mathbb{R}^2 . Quale?

Indice analitico

- 1-forma , *vedi* forma differenziale di grado 1
- arco
 - di curva regolare, 22
 - orientato, 33
- area, 46, 65
 - di una superficie parametrica, 89
- baricentro
 - di un insieme piano, 50
 - di una curva, 23
- bordo
 - di una placca piana, 61
 - di una superficie a placche, 92
 - di una superficie parametrica, 87
- campo vettoriale, 12
 - associato ad una 1-forma, 13
 - conservativo, 12
 - di classe C^n o C^∞ , 12
 - irrotazionale, 12, 105
- catena di Jordan, 61
- centro di massa
 - di un solido, 81
 - di una curva, 23
 - di una piastra, 51
 - geometrico, *vedi* baricentro
- concatenazione di curve, 16
- coordinate
 - cilindriche, 81
 - sferiche, 80
- costante di gravitazione universale, 102
- costante dielettrica del vuoto, 103
- curva (parametrizzata), 16
 - chiusa, 16, 21
 - opposta, 17
 - regolare, 16, 21
 - semplice, 16, 21
- curva di Jordan, 60
- curve
 - equivalenti, 17
 - omotope, 25
 - rispetto agli estremi, 31
- densità di corrente, 106
- densità di flusso magnetico, 104, 106
- determinante jacobiano, 52, 80
- diametro, 66
- differenziale
 - di una funzione, 8
 - come 1-forma, 9
 - secondo di una funzione, 8
- disuguaglianza isodiametrica, 67
- divergenza, 68, 101, 108
- duale di uno spazio vettoriale, 9
- elemento
 - d'arco in coordinate polari, 8
 - d'area, 89
 - di lunghezza (o d'arco), 8
 - di massa, 23
- elettrostatica, 101, 103
- espressione differenziale
 - di grado 1, 7
 - di grado 2, 88
- estensione standard, 43, 75
- flusso, 65, 69, 101
- forma differenziale di grado 1, 9
 - chiusa
 - in \mathbb{R}^2 , 10
 - in \mathbb{R}^3 , 11
 - in \mathbb{R}^k , 12
 - di classe C^n o C^∞ , 9
 - esatta
 - in \mathbb{R}^2 , 10

- in \mathbb{R}^3 , 11
 - in \mathbb{R}^k , 12
- interpretazione geometrica, 13
- formula
 - degli spaghetti, 77
 - delle fette, 77
 - di coarea
 - nel piano, 70
 - nello spazio, 107
 - di integrazione per parti
 - per integrali doppi, 69
 - fondamentale per gli integrali curvilinei, *vedi* teorema fondamentale per gli integrali di forme
 - per il baricentro di una lamina, 67
 - per il volume racchiuso da una superficie a placche, 101
- formule
 - di Gauss-Green
 - nel piano, 62, 69
 - nello spazio, 105
 - di integrazione per parti, 69, 105
 - di passaggio al limite sotto il segno di integrale, 2, 57, 84
 - di riduzione
 - per integrali doppi, 45, 46
 - per integrali tripli, 77–78
 - per l'area di una lamina, 65
- funzione
 - assolutamente integrabile, 58–59
 - caratteristica, 47
 - integrabile, 38, 44, 73, 75
- funzione grafico, 87
- gradiente, 12, 108
- Identità di Green, 114
- induzione magnetica, *vedi* densità di flusso magnetico
- insieme
 - convesso, 25
 - misurabile, 46, 78
 - numerabile, 40
 - semplicemente connesso, 15, 25
 - trascurabile
 - 2-dimensionale, 40
 - 3-dimensionale, 73
- x*-semplice, 46
- y*-semplice, 45
- integrale
 - curvilineo
 - di un campo vettoriale, 26
 - di una espressione differenziale, 18
 - di una forma differenziale, 26
 - doppio
 - su un insieme limitato, 44
 - su un rettangolo, 38
 - in *ds*, *vedi* integrale non orientato
 - non orientato, 20
 - parametrico
 - doppio, 55
 - semplice, 1
 - triplo, 83
 - su un arco di curva regolare, 23
 - superficiale
 - di una espressione differenziale, 89
 - triplo
 - su un insieme limitato, 75
 - su un parallelepipedo, 73
- integrali iterati, 42
- lamina piana, 61
- lanterna di Schwarz, 94
- laplaciano, 108
- lavoro, 26
- legge di circuitazione di Ampère, 106
- legge di conservazione del flusso magnetico, 104
- legge di Coulomb, 103
- legge oraria, 19
- lemma
 - di continuità per integrali parametrici
 - doppi, 56
 - semplici, 1
 - di Poincaré, 29–31
- lunghezza
 - di un arco di curva regolare, 23
 - di un sottoinsieme di \mathbb{R} , 18
 - di una curva parametrica, 19
- massa

- di un filo, 23
- di un solido, 81
- di una piastra, 51
- matrice jacobiana, 52, 80, 85, 109
- misura
 - bidimensionale, *vedi* area
 - tridimensionale, *vedi* volume
 - unidimensionale, *vedi* lunghezza
- momento d'inerzia
 - di un filo, 24
 - di un solido, 81
 - di una piastra, 51
- omotopia di curve, 25
- omotopia relativa, 31
- orientazione
 - canonica del bordo, 61
 - di una curva, 17
 - di una placca, 96
 - di una superficie a placche, 100
 - indotta sul bordo, 98–99
 - indotta sulla frontiera, 61–62, 99
- orientazioni
 - concordi
 - di archi, 33
 - discordi
 - di archi, 33
 - opposte di curve, 17
- parametrizzazione
 - di arco di curva, 22
 - di una placca, 87
- parametro di finezza, 37, 73
- parte
 - antisimmetrica, 109
 - simmetrica, 109
- partizione
 - di un parallelepipedo, 72
 - di un rettangolo, 37
- permeabilità magnetica del vuoto, 106
- placca
 - di superficie, 87
 - piana, 61
- placca orientata, 97
- potenziale di un campo vettoriale, 12
- potenziale vettore, 111
- primitiva di una forma differenziale, 10–12, 35
- principio di Cavalieri, 48, 78
- proprietà
 - di linearità, 39, 44, 73
 - di monotonia, 39, 44, 74
- rotore, 105, 108
- sostegno di una curva, 16
- superfici regolarmente equivalenti, 88
- superficie a placche, 92
 - chiusa, 93
- superficie parametrica, 85
 - regolare, 85
 - semplice, 85
- teorema
 - della circuitazione
 - nel piano, 64
 - nello spazio, 65, 106
 - della divergenza, 69, 101
 - della media
 - per gli integrali curvilinei (I), 20
 - per gli integrali curvilinei (II), 21
 - per gli integrali doppi (I), 49
 - per gli integrali doppi (II), 49
 - per gli integrali tripli, 81
 - di additività rispetto all'insieme di integrazione, 18, 44, 75
 - di cambiamento di variabili
 - integrali doppi, 52
 - integrali tripli, 80
 - di continuità per integrali parametrici
 - doppi, 57
 - semplici, 2
 - tripli, 83
 - di derivabilità per integrali parametrici
 - doppi, 57
 - semplici, 3
 - tripli, 84
 - di differenziabilità per integrali parametrici
 - doppi, 57
 - semplici, 4
 - tripli, 84
 - di dipendenza dagli estremi, 27

- di equivalenza
 - per gli integrali doppi, 41
 - per gli integrali tripli, 73
- di Fubini, *vedi* di riduzione
- di Gauss, 101, 103
- di Gauss gravitazionale, 102
- di Heine–Cantor, 2
- di indipendenza dalla parametrizzazione
 - integrali curvilinei non orientati, 22
 - integrali curvilinei orientati, 33
- di integrabilità
 - per gli integrali doppi, 41
 - per gli integrali tripli, 73
- di invarianza per omotopia, 31
- di Jordan, 61
- di Pappo-Guldino
 - primo, 96
 - secondo, 82–83, 104–105
- di Poincaré, 31
- di riduzione, 42, 74
- fondamentale per gli integrali curvilinei, 27
- traccia, 109

- versore normale alla placca, 87
- vettore
 - applicato, 7
 - libero, 7
 - punto di applicazione di, 7
- volume, 38, 78, 104