Serie di Fourier

L'idea che sta alla base degli sviluppi in serie di Fourier è quella di approssimare, in qualche senso, le funzioni (integrabili) periodiche per mezzo di funzioni più regolari e/o più facilmente maneggiabili come le funzioni trigonometriche. Un riferimento MOLTO completo per questi argomenti è [2] oppure [3, Cap. 12].

0.1 Funzioni 2π-periodiche

Limitiamoci dapprima a considerare una funzione f di periodo 2π. Cercheremo di "approssimarla" con polinomi trigonometrici di ordine n della forma

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big). \tag{1}$$

Data una funzione 2π-periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cerchiamo di scegliere i coefficienti a_0, a_k e b_k in modo da minimizzare lo *scarto quadratico* cioè da rendere minima la quantità

$$E_n = \int_0^{2\pi} \big(f(x) - s_n(x) \big)^2 \, \mathrm{d}x.$$

I coefficienti scelti, per f integrabile, come nella Tabella 1 sono detti *coefficienti di Fourier* di f. Osserviamo che con tale scelta $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x$.

$a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x,$	$b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x.$
$k = 0, 1, 2, \dots$	$k = 1, 2, \dots$

Tabella 1: Coefficienti di Fourier per funzioni 2π-periodiche

Si dimostra che vale il seguente teorema

Teorema 0.1.1. *Supponiamo che f sia 2π-periodica ed integrabile in $[0, 2\pi]$, allora, al variare di s_n tra tutti i polinomi trigonometrici di ordine n della forma*

(1), *lo scarto quadratico E_n è minimo quando i coefficienti di s_n sono scelti come nella Tabella 1. In questo caso si ha*

$$E_n = \int_0^{2\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x - \pi \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Inoltre (identità di Parseval)

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right),$$

cioè $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$.

La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big). \tag{2}$$

con i coefficienti dati dalla Tabella 1 è detta *serie di Fourier* di f. Si può dimostrare che

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \,\mathrm{d}t.$$

Questa formula è utile per il calcolo numerico di $s_n(x)$, infatti richiede il computo di un solo integrale ed evita la somma (numericamente instabile) di termini di diversa grandezza.

È facile vedere che se $f : R \to \mathbb{R}$ è una funzione 2π-periodica *pari*, cioè tale che $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora nella sua serie di Fourier compaiono solo coseni (cioè $0 = a_0 = a_1 = \ldots$); se invece f è dispari, ovvero tale che $f(x) = -f(-x)$ per ogni $\in \mathbb{R}$, allora nella sua serie di Fourier compaiono soltanto seni (cioè $0 = b_1 = b_2 = \ldots$).

Osserviamo inoltre che ogni funzione definita sull'intervallo $[0, 2\pi]$ può sempre essere estesa ad una funzione 2π-periodica su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, ogni funzione f definita definita sull'intervallo $[0, \pi]$ può essere estesa sia ad una funzione 2π-periodica *pari* su $\mathbb{R}$, sia ad una funzione 2π-periodica *dispari* su $\mathbb{R}$ dando così luogo ad uno sviluppo in (soli) coseni o in (soli) seni di f.

0.2 Funzioni di periodo qualunque

Sia $T > 0$ dato e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione T-periodica integrabile su $[0, T]$. Prendendo $\omega = 2\pi/T$, e

$$s_n^T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \Big), \tag{3}$$

si ha che lo scarto quadratico

$$E_n^T = \int_0^T \big(f(x) - s_n(x) \big)^2 \,\mathrm{d}x.$$

$a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\ \mathrm{d}x,$	$b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\ \mathrm{d}x.$
$k = 0, 1, 2, \ldots$	$k = 1, 2, \ldots$

Tabella 2: Coefficienti di Fourier per funzioni T-periodiche

è reso minimo dalla scelta dei coefficienti come nella Tabella 2

Più precisamente vale il seguente risultato

Teorema 0.2.1. *Supponiamo che f sia T-periodica ed integrabile in $[0, T]$, allora, al variare di s_n^T tra tutti i polinomi trigonometrici di ordine n della forma (3), lo scarto quadratico E_n^T è minimo quando i coefficienti di s_n^T sono scelti come nella Tabella 2. In questo caso si ha*

$$E_n^T = \int_0^T f(x)^2\ \mathrm{d}x - \frac{T}{2}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

Inoltre (identità di Parseval)

$$\int_0^T f(x)^2\ \mathrm{d}x = \frac{T}{2}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right),$$

cioè $\lim_{n\to\infty} E_n^T = 0$.

La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)\Big).$$

con i coefficienti dati dalla Tabella 2 è detta *serie di Fourier* di f.

0.3 Convergenza puntuale

Poniamoci il problema della convergenza puntuale di una serie di Fourier.

Sia $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata monotona a tratti[1] Estendiamo f ad una funzione T-periodica su $\mathbb{R}$. In questo caso, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, risultano ben definiti i limiti destro e sinistro di f

$$f(x_0^+) \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x\to x_0^+} f(x) \qquad f(x_0^-) \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

[1]Cioè tale che $[0, T]$ si possa decomporre in un numero finito di sottointervalli su cui f risulti monotona.

Teorema 0.3.1. *Sia f come sopra. Allora i coefficienti di Fourier sono ben definiti e la serie di Fourier converge per ogni x_0 alla media dei limiti destro e sinistro di f, cioè*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\omega x_0) + b_k \sin(k\omega x_0) \Big) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

con $\omega = 2\pi/T$. In particolare, negli estremi dell'intervallo $[0,T]$ la serie converge a $\big(f(0^+) + f(T^-)\big)/2$, inoltre in ogni punto di continuità $x \in (0,T)$ di f la serie di Fourier converge a $f(x)$.

Questo teorema non deve far pensare che il grafico del polinomio S_n^T si avvicini necessariamente a quello di f. A questo proposito si consideri la serie di Fourier dell'*onda quadra* (2π-periodica di ampiezza 1) cioè della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

estesa periodicamente a $\mathbb{R}$. Con facili calcoli si vede che la serie di Fourier di f è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1)x.$$

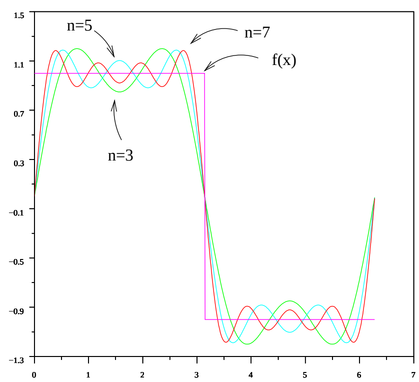

Figura 1: Alcune somme parziali della serie di Fourier relativa all'onda quadra 2π-periodica

Si può dimostrare che la proiezione sull'asse delle ordinate della curva $y = s_n(x)$ ristretta ad un intorno di $x_0 = 0$ tende (per $n \to \infty$) ad un segmento i cui estremi sono diversi da $f(x_0^+) = 1$, $f(x_0^-) = -1$.[2] Questo fatto è noto come *fenomeno di Gibbs* (si veda per esempio [1, Cap. 2 §10]) ed è del tutto generale nei punti di discontinuità.

0.4 Rappresentazione nel campo complesso

Usando la relazione

$$e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt), \quad n \in \mathbb{Z}$$

è facile dimostrare che la (1) può essere scritta nella forma

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad n = 0, 1, \dots$$

[2]Con questa scelta di f, per esempio, si può dimostrare che la proiezione tende al segmento di estremi

$$\pm\left(1 + \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

scegliendo, per $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & \text{for } k \geq 0, \\ \frac{a_k + ib_k}{2} & \text{for } k \leq 0, \end{cases}$$

dove si è posto $b_0 = 0$.

La serie di Fourier (2) di una funzione f si può allora scrivere nella forma:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

dove i coefficienti c_k, $k \in \mathbb{Z}$, sono dati dalla formula:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x.$$

Bibliografia

[1] Sansone G., *Orthogonal functions*. Dover, New York, 1991.

[2] Tolstov G.P., *Fourier series*. Dover, New York, 1976.

[3] Widder D.V., *Advanced Calculus, II edition*. Dover, New York, 1989.