Capitolo 1

Alcune nozioni sui numeri complessi

1.1 Numeri complessi

Definiamo i numeri complessi e le operazioni tra di essi. Vedremo inoltre come, per mezzo di una opportuna rappresentazione, si possano risolvere equazioni nel campo complesso.

1.1.1 Definizione e proprietà elementari

Il modo più semplice di vedere i numeri complessi, è considerare l'insieme delle coppie[1] $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e di definire su di esse delle opportune operazioni: date (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si pone

$$(a, b) + (c, d) \underset{\text{def.}}{=} (a + c, b + d), \tag{1.1a}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) \underset{\text{def.}}{=} (ac - bd, ad + bc). \tag{1.1b}$$

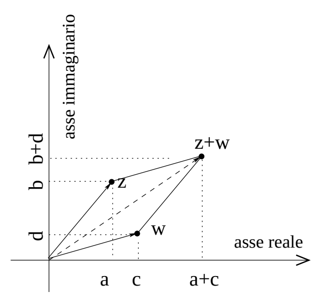

Figura 1.1: Somma di numeri complessi

Spesso, in luogo della coppia (a, b) si preferisce scrivere[2] $a + ib$. Noi utilizzeremo la notazione più conveniente a seconda delle circostanze.

Osserviamo inoltre (come è facile dimostrare) che le operazioni di somma e prodotto definite nelle (1.1) sono *associative*, *commutative* e *distributive*.

Usando la notazione tradizionale le (1.1) assumono la forma

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + (b + d)i, \tag{1.1a'}$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + (ad + bc)i. \tag{1.1b'}$$

[1] Il simbolo '$\times$' denota il prodotto cartesiano di insiemi

[2] Questa è una notazione più tradizionale. A volte, specie nei testi di Ingegneria, la lettera i è sostituita dalla j.

Dato un numero complesso $z = a + ib$, se ne definisce il *modulo* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ed il *coniugato* $\overline{z} = a - ib$. Si noti che, con le definizioni appena date, vale la relazione: $|z|^2 = z\overline{z} = \overline{z}z$.

Si può inoltre dimostrare che valgono le seguenti affermazioni.

Proposizione 1.1.1. *Se* z_1 *e* z_2 *sono numeri complessi dati, allora*

$$
\begin{aligned}
&|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, && \textit{(disuguaglianza triangolare)},\\
&|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|, &&\\
&|zw| = |z|\,|w|. &&
\end{aligned}
$$

L'insieme delle coppie $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dotato delle operazioni definite sopra e della norma $|\cdot|$, si chiama *campo complesso* e si denota con il simbolo $\mathbb{C}$. Se $z = a + ib$, chiamiamo $\mathrm{Re}(z) \underset{\text{def.}}{=} a$ la *parte reale* di z e $\mathrm{Im}(z) \underset{\text{def.}}{=} b$ la sua *parte immaginaria*. Notiamo che le parti reale ed immaginaria di un numero complesso sono *numeri reali*.

Consideriamo il numero complesso $(0, 1)$; in notazione tradizionale lo si può scrivere semplicemente come i. Usando la (1.1b) oppure la (1.1b') si ottiene la relazione $i^2 = -1$ che può essere utilizzata per ricordarsi la (1.1b') e per fare velocemente i calcoli.

Esercizio 1.1.2. Calcolare i seguenti prodotti:

$$(-5 + 3i)(7 - 2i), \quad i(2i), \quad -i(2 - i).$$

Notiamo che ad ogni numero reale a possiamo associare il numero complesso $(a, 0) = a + 0i$. In questo modo il *valore assoluto* di a coincide con il *modulo* di $(a, 0)$. Questa corrispondenza ci permette di identificare $\mathbb{R}$ come il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ delle coppie della forma $(a, 0)$. In altre parole, se $a \in \mathbb{R}$, con la lettera 'a' indicheremo indifferentemente sia il numero reale a che il numero complesso $(a, 0)$.

Osservazione 1.1.3. Dato $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, si hanno le seguenti relazioni:

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha z = (\alpha a, \alpha b)$. In particolare $-z = -1 \cdot z = (-a, -b)$, ne segue $z - z = 0$;
2. Se poniamo $w = \overline{z}/|z|^2$, si ha $zw = wz = 1$; quindi ha senso scrivere $\frac{1}{z} = z^{-1} = w$.

Esercizio 1.1.4. Sia $z = 1 - 2i$, scrivere (esplicitamente) z^{-1}. Fare la stessa cosa per un generale $z = (a, b)$.

Esercizio 1.1.5. Calcolare le parti reale e immaginaria di $(1 + i)/(1 - i)$ e di $(1 - i)/(1 + i)$.

Esercizio 1.1.6. Siano w z numeri complessi, dimostrare che:

1. Se $|z| > 0$ allora $z \neq 0$.
2. Se $w \neq 0$ allora $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

1.1.2 Rappresentazione in forma trigonometrica

Sia $z = a + ib$ in numero complesso, possiamo scrivere il *punto* (a, b) del piano in coordinate polari; cioè $a = |z| \cos\theta$ e $b = |z| \sin\theta$, dove $\theta \in (-\pi, \pi]$ è l'angolo formato dal semiasse positivo delle x e dalla semiretta fuoriuscente dall'origine e passante per z. L'angolo θ si chiama *argomento (principale)* di z e si indica con $\theta = \arg z$. Con semplici considerazioni geometriche si vede che $\cos(\arg z) = a/|z|$ e $\sin(\arg z) = b/|z|$. In particolare, se $a > 0$, $\arg z = \arctan \frac{b}{a}$.

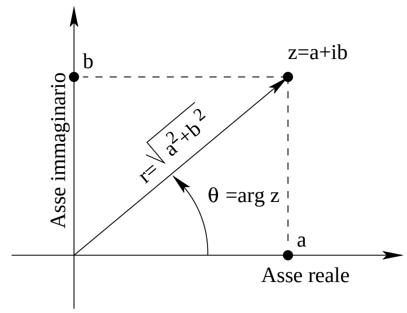

Figura 1.2: Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi

Quindi, in generale, un numero complesso z si può sempre scrivere nella forma $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, con $\rho = |z|$ e $\theta = \arg z$.

Dalle ben note formule di addizione in trigonometria segue che, dati $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$, si ha

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\big), \tag{1.3a}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\big), \tag{1.3b}$$

Inoltre se $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, si ha

$$z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\big). \tag{1.3c}$$

Le formule (1.3) vanno comunemente sotto il nome di **Teorema di De Moivre**. Dalle (1.3a) e (1.3b) seguono

$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2, \\ \arg(z_1/z_2) &= \arg z_1 - \arg z_2, \\ \arg \bar{z} &= -\arg z \end{aligned}$$

Definizione 1.1.7. Sia $z = a + ib$ un numero complesso. Poniamo

$$\boxed{e^z = e^a(\cos b + i \sin b)}$$

Ci sono vari modi di giustificare la formula appena scritta, ma per noi sarà soltanto una definizione.[3] Osserviamo che ogni numero complesso z diverso da zero si può scrivere nella forma $z = |z|e^{i(\arg z + 2n\pi)}$ per un qualsiasi $n \in \mathbb{Z}$.

[3]Una possibile giustificazione è la seguente: Ricordando gli sviluppi di Taylor nel campo reale delle funzioni esponenziale, seno e coseno, si ha *formalmente*

$$\begin{aligned} e^{a+ib} &= e^a e^{ib} = e^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^k}{k!} = e^a \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}}{2k!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= e^a(\cos b + i \sin b). \end{aligned}$$

Osserviamo che $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Infatti, se $z = a + ib$,

$$|e^z| = |e^a||\cos b + i \sin b| = e^a\big((\cos b)^2 + (\sin b)^2\big) = e^a.$$

Proposizione 1.1.8. *Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, valgono le seguenti relazioni*

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
2. $e^{z_1} = e^{z_2}$ *se e soltanto se* $z_1 - z_2 = 2n\pi i$ *per qualche* $n \in \mathbb{Z}$;
3. $|e^{ix}| = 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$;
4. $e^{\pi i} = -1$.

Esempio 1.1.9. Fissato $n \in \mathbb{N}$, risolviamo l'equazione $z^n = 1$. Per la formula (1.3c), $z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$. Da cui $|z^n| = |z|^n$. Se $z_0 = r_0e^{\theta_0}$ è soluzione allora $|z_0|^n = 1$ e quindi $|z_0| = 1$; inoltre deve essere

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = 1.$$

Questo è vero se e solo se $\sin(n\theta) = 0$, cioè $\theta = \frac{k}{n}\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Quindi le soluzioni sono esattamente i numeri complessi della forma $e^{i\pi(k/n)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che di questi numeri ce ne sono esattamente n distinti cioè quelli corrispondenti a $k = 0, \dots, n-1$.

Esercizio 1.1.10. Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $z^3 = i|z|\overline{z}$. (*Suggerimento: scrivere z nella forma $z = re^{i\theta}$.*)

1.1.3 Struttura di $\mathbb{C}$

Come abbiamo visto dalla definizione di numero complesso, $\mathbb{C}$ è naturalmente in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^2$. In altre parole, dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ad esso risulta naturalmente associato il punto (x, y). Osserviamo che questa corrispondenza conserva le "distanze", cioè, dati $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, si ha

$$|z_1 - z_2| = \big\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\big\|.$$

Questo vuole dire che la corrispondenza tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$ è molto più profonda di una semplice corrispondenza biunivoca e coinvolge anche la "geometria" di questi due spazi. In particolare i dischi di $\mathbb{C}$ corrispondono ai dischi di $\mathbb{R}^2$ (con lo stesso raggio).

Sfruttiamo la corrispondenza con $\mathbb{R}^2$ per definire un *topologia* nel campo complesso.[4] Un sottoinsieme Ω di $\mathbb{C}$ è detto aperto se esso corrisponde ad un aperto

[4]Ricordiamo che dare una topologia su un insieme X significa assegnare una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{A}$ di X con le seguenti proprietà:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
2. Per ogni insieme di indici I e famiglia di sottoinsiemi $\{A_i\}_{i\in I}$ si ha $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.
3. Per famiglia **finita** di insiemi $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ si ha $\bigcap\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i \in \mathcal{A}$.

In questo caso la coppia $(X, \mathcal{A})$ è detta *spazio topologico*.

di R^2. In modo analogo si possono ritrovare le nozioni di insieme chiuso, connesso, semplicemente connesso e compatto, nonché quelle di frontiera di un insieme, di punto di accumulazione, di punto isolato e di successione convergente.

1.2 Il teorema fondamentale dell'algebra

Uno dei motivi dell'introduzione dei numeri complessi è che nel loro ambito è possibile fattorizzare qualunque polinomio non costante (a coefficienti reali o complessi). In altri termini, ogni equazione polinomiale del tipo $P(z) = 0$, con P un polinomio di grado positivo, ammette soluzione. Questo permette di risolvere alcuni problemi in modo molto semplice ed elegante.

Il teorema fondamentale dell'algebra può essere espresso come segue:

Teorema 1.2.1. *Sia $P_n(z)$ il polinomio di grado $n > 0$ dato da:*

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Allora esistono $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$, $m \leq n$, e $l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{N}$ tali che

$$\begin{aligned} &P_n(z) = a_n (z - z_1)^{l_1} (z - z_2)^{l_2} \cdots (z - z_m)^{l_m}, \\ &n = l_1 + \ldots + l_m. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Inoltre la fattorizzazione (1.4) *è unica a meno di una permutazione degli indici $1, \ldots, m$.*

I numeri complessi $z_1, \ldots, z_m$ che compaiono nella fattorizzazione (1.4) sono detti *radici* del polinomio P_n ed i numeri $l_1, \ldots, l_m$ sono le loro *molteplicità*. Chiaramente $z_1, \ldots, z_m$ sono le (uniche) soluzioni dell'equazione $P_n(z) = 0$.

Osserviamo che il Teorema 1.2.1 fornisce la mera esistenza di una fattorizzazione, non dà nessuna indicazione su come ottenerla.

Esempio 1.2.2. Il polinomio $z^3 - z^2 + z - 1$ è uguale (in $\mathbb{C}$) a $(z-1)(z-i)(z+i)$, cioè $z_1 = 1$, $z_2 = i$ e $z_3 = -i$. In $\mathbb{R}$, cioè limitandosi a polinomi a coefficienti reali, questo polinomio può essere fattorizato solo come $(z-1)(z^2+1)$.

Esercizio 1.2.3. Per ogni polinomio di secondo grado $az^2 + bz + c$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, scrivere una fattorizzazione nella forma (1.4). (Suggerimento: Nel campo complesso $\sqrt{b^2 - 4ac}$, ha senso anche quando il discriminante è negativo.)

Esercizio 1.2.4. Dato il polinomio $5(z^2-1)(z^2+1)^2$, scriverne una fattorizzazione in $\mathbb{C}$ della forma (1.4).

1.3 Funzioni sui complessi a valori complessi

Una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ associa ad ogni $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso $f(z)$. Dato $z \in \mathbb{C}$, scriviamo $f(z) = u(z) + iv(z)$ dove $u(z) = \mathrm{Re}\big(f(z)\big)$ e $v(z) = \mathrm{Im}\big(g(z)\big)$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$. Se $z = x + iy$ scriviamo, con un piccolo abuso di notazione, $u(z) = u(x, y)$, $v(z) = v(x, y)$ e, analogamente, $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

1.3.1 Alcune funzioni notevoli

Funzioni trigonometriche

La formula $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, ci dice che

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big)}{2i} = \sin\theta.$$

Questo ci suggerisce di *definire*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Analogamente, definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

e

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}.$$

è facile estendere al campo complesso la validità delle usuali formule di trigonometria. Si veda, per esempio, il seguente esercizio:

Esercizio 1.3.1. Verificare che valgono le formule:

- $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$, $\tan(-z) = -\tan z$,
- $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,
- $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$,

Funzioni iperboliche

Le funzioni iperboliche, analogamente al caso reale, sono definite come segue:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

Come nel caso reale, è facile provare le seguenti relazioni:

$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1, \qquad 1 - (\tanh z)^2 = \frac{1}{(\cosh z)^2}$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad \tanh(-z) = -\tanh z,$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2,$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2.$$

Tra le funzioni iperboliche e quelle trigonometriche valgono le seguenti relazioni:

$\sin(iz) = i\sinh z$	$\cos(iz) = \cosh z$	$\tan(iz) = i\tanh z$
$\sinh(iz) = i\sin z$	$\cosh(iz) = \cos z$	$\tanh(iz) = i\tan z$

Radici n-sime

Dato $w \in \mathbb{C}$ ed $n \in \mathbb{N}$ cerchiamo tutti i complessi z tali che $z^n = w$. Scriviamo $w = |w|e^{i\arg w}$. Come nell'esempio 1.1.9, si ha che $z^n = |z|^n e^{in\arg z}$. Allora deve essere

$$|z|^n = |w| \quad \text{e} \quad \arg z + 2k\pi = \frac{1}{n}\arg w.$$

Osserviamo che questo determina n numeri complessi distinti. In altre parole, scrivendo $\sqrt[n]{z}$ si intendono gli n numeri complessi distinti che moltiplicati n volte per se stessi danno z. Per questo motivo non è bene scrivere $\sqrt{-1}$ in luogo di i, infatti $\sqrt{-1} = \pm i$.

Osserviamo che $\sqrt{z} = \pm\sqrt{z}$. La scelta di un particolare valore per la radice è detta una *determinazione* della radice.

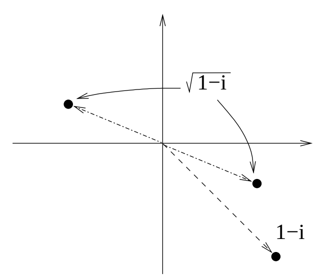

Figura 1.3: La radice di $1-i$.

Esempio 1.3.2. Calcoliamo $\sqrt{1-i}$. Sccome si può scrivere $1 - i = \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi i}{4}}$, otteniamo

$$\sqrt{1-i} = \left\{\sqrt[4]{2}\,e^{-\frac{\pi i}{8}}, \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{7\pi i}{8}}\right\}.$$

Logaritmi

Dato un numero complesso non nullo z si cercano i complessi w tali che $z = e^w$.

Scriviamo $z = |z|e^{i\theta}$, con $\theta = \arg z$, e poniamo $w = x + iy$. Allora $|z| = |e^w| = e^x$, da cui segue $x = \ln|z|$. Poiché deve essere

$$z = |z|e^{i\theta} = e^w = e^x e^{iy} = |z|e^{iy},$$

si ricava $e^{i\theta} = e^{iy}$ da cui segue $y = \theta + 2k\pi$. Si ottengono cioè infiniti numeri complessi (uno per ogni scelta di $k \in \mathbb{Z}$) che risolvono l'equazione $e^w = z$. Facciamo la convenzione di scegliere $\theta = \arg z \in (-\pi, \pi]$ e $k = 0$; allora si determina un solo valore di w. Questo definisce la funzione logaritmo, cioè

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

Funzioni trigonometriche ed iperboliche inverse

Dato $z \in \mathbb{C}$, cerchiamo $w \in \mathbb{C}$ tale che $z = \sin w$. Si ha

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

da cui $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$. Risolvendo[5] rispetto a e^{iw} si ha $e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$. Allora,

$$w = 2k\pi + \frac{1}{i} \ln \left(iz + \sqrt{1-z^2} \right).$$

Se poi cerchiamo $w \in \mathbb{C}$ tale che $z = \sinh w$, allora, ricordandoci della relazione $\sinh(iw) = i \sin w$, si ottiene subito

$$w = 2k\pi i + \ln \left(z + \sqrt{z^2+1} \right).$$

In modo analogo si può provare che:

$w = 2k\pi + \frac{1}{i} \ln \left(iz + \sqrt{z^2-1} \right)$	se $z = \cos w$	$k \in \mathbb{Z}$
$w = k\pi + \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$	se $z = \tan w$	
$w = 2k\pi i + \ln \left(z + \sqrt{z^2-1} \right)$	se $z = \cosh w$	
$w = k\pi i + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$	se $z = \tanh w$	

Potenze

Dati $z, w \in \mathbb{C}$, cosa significa l'espressione z^w? La formula $\zeta = e^{\ln z}$, valida per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e $\zeta \in \mathbb{C}$, ci suggerisce di *definire*

$$z^w = e^{w \ln z}.$$

Osserviamo che quest'espressione dipende dalla scelta di una determinazione del logaritmo. Per esempio $(-1)^{1/2}$ da luogo, a seconda della determinazione scelta, a $\pm i$. Questo é coerente con quanto affermato a proposito delle radici.

Esercizio 1.3.3. Calcolare i^i.

Riferimenti ed approfondimenti

Paragrafi 1.1 – 1.3: [1], [6, cap. 1], [7, cap. 1], [16, cap. 1].

[5] Si ricordi che, in base a quanto affermato sulle radici di numeri complessi, $\sqrt{1-z^2} = \pm\sqrt{1-z^2}$

Capitolo 2

Elementi di analisi complessa

2.1 Limiti e continuità

La definizione di limite per funzioni complesse è analoga a quelle già note per funzioni reali. Per semplicità ci limiteremo a funzioni definite su aperti di $\mathbb{C}$.

Definizione 2.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto; data $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e un punto $z_0 \in \Omega$ scriveremo

$$\ell = \lim_{z \to z_0} f(z), \quad \ell \in \mathbb{C},$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ con la proprietà che $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ per ogni z tale che $0 < |z - z_0| < \delta$.

Diremo inoltre che f è continua in $z_0 \in \Omega$ se $\lim_{z \to z_0} f(z)$ esiste e, inoltre,

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Se questa relazione è vera per ogni $z_0 \in \Omega$ allora diremo che f è continua (in Ω).

Esempio 2.1.2. Verifichiamo che $\lim_{z \to 0} e^z = 1$. Per vederlo scriviamo

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)\big)$$

ed osserviamo che (in $\mathbb{R}^2$)

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} e^x \cos y = 1, \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} e^x \sin y = 0.$$

Proposizione 2.1.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto; date $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$, supponiamo che*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l_1, \quad e \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = l_2$$

esistano e siano ben definiti. Allora

- $\lim_{z \to z_0} \big(f(z) + g(z)\big) = l_1 + l_2,$

- $\lim_{z\to z_0}\big(f(z)g(z)\big) = l_1 l_2$,

Inoltre, se $l_2 \neq 0$,

- $\lim_{z\to z_0}\big(f(z)/g(z)\big) = l_1/l_2$.

Osserviamo che le funzioni $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$, $z \mapsto |z|$ e $z \mapsto \overline{z}$ sono continue.

Proposizione 2.1.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è continua in un punto di $\mathbb{C}$ se e solo se le funzioni $z \mapsto \mathrm{Re}\big(f(z)\big)$ e $z \mapsto \mathrm{Im}\big(f(z)\big)$ lo sono. In altre parole, scrivendo $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, f è continua se e solo se le funzioni u e v sono continue.*

Proposizione 2.1.5. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono continue allora le funzioni $z \mapsto f(z)g(z)$ e $z \mapsto f(z) + g(z)$ sono continue. Di conseguenza tutte le funzioni polinomiali (a coefficienti reali o complessi) sono continue.*

Inoltre, dato $z_0 \in \mathbb{C}$, se $g(z_0) \neq 0$ allora $z \mapsto f(z)/g(z)$ è continua in z_0. Conseguentemente, tutte le funzioni razionali, cioè le funzioni della forma

$$z \mapsto \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0},$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a_m, \ldots, a_0, b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{C}$, sono continue in ogni z_0 tale che $b_n z_0^n + b_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + b_0 \neq 0$.

2.2 Derivazione

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Data $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diremo che è derivabile in $z_0 \in \Omega$ se esiste $\ell \in \mathbb{C}$ tale che

$$\ell = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{2.1}$$

In tale caso si pone $f'(z_0) = \ell$.

Osservazione 2.2.1. È facile vedere che le consuete regole formali per la derivazione delle funzioni reali sono ancora valide.

Osservazione 2.2.2. Supponiamo che $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to U \subset \mathbb{C}$ sia differenziabile, Ω e U aperti, e che esista una funzione $g : U \to \Omega$ tale che $z = g\big(f(z)\big)$ per ogni $z \in \Omega$ e $w = f\big(g(w)\big)$ per ogni $w \in U$. Dato $z_0 \in U$, poniamo $z_0 = g(w_0)$. Allora, come nel caso di funzioni reali, si può provare che se $f'(z_0) \neq 0$, allora $g'(w_0)$ è ben definito ed inoltre:

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'\big(g(w_0)\big)}.$$

In realtà si può provare di più:

Teorema 2.2.3. *Supponiamo che la funzione complessa f sia differenziabile in un intorno di z_0 e che $f'(z_0) \neq 0$ allora f è localmente invertibile in un intorno di z_0, cioè esistono intorni Ω e U ed una funzione g come nell'osservazione 2.2.2.*

2.2.1 Condizioni di Cauchy-Riemann

In questa parte ci occuperemo di determinare delle condizioni che assicurino la derivabilità di una funzione complessa a valori complessi. Ci limiteremo inoltre, per semplicità, a funzioni definite su aperti di $\mathbb{C}$.

Teorema 2.2.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Data $f : \Omega \to \mathbb{C}$, scriviamo $z = x + iy$ e $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Se f è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$, allora u e v sono derivabili in (x_0, y_0) e*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{2.2b}$$

(Condizioni di Cauchy-Riemann.)

Dimostrazione. Siccome per ipotesi f è differenziabile in z_0, il valore di $f'(z_0)$ è indipendente dal modo con cui h tende a 0 nel rapporto incrementale (2.1). Scegliendo $h = t = (t, 0)$ con $t \in \mathbb{R}$ (cioè $h = t + 0i$), e separando le parti reale ed immaginaria del limite

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{[u(x_0 + t, y_0) + iv(x_0 + t, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Osserviamo che la (2.3) mostra anche l'esistenza di $\partial u/\partial x$ e $\partial v/\partial x$ in (x_0, y_0). Analogamente, scegliendo $h = ti = (0, t)$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{[u(x_0, y_0 + t) + iv(x_0, y_0 + t)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{it} \\ &= \frac{1}{i} \left\{ \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{t} \right\} \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Confrontando le parti reale e immaginaria di $f'(z_0)$ ottenute con i due metodi sopra si ottengono rispettivamente la (2.2a) e la (2.2b). □

Esercizio 2.2.5. Dimostrare che la funzione $z \mapsto \overline{z}$ **non** è differenziabile. Se $z \mapsto f(z)$ è differenziabile, cosa si può dire di $z \mapsto \overline{f(z)}$?

Osservazione 2.2.6. Supponiamo che f sia differenziabile in z_0. Allora le formule (2.3) e (2.4) ci forniscono un modo comodo per calcolare la derivata $f'(z_0)$ mediante il calcolo delle derivate parziali delle sue parti reale ed immaginaria. Per le condizioni di Cauchy-Riemann, sia la (2.3) sia la (2.4) forniscono lo stesso risultato.

Il Teorema 2.2.4 può essere invertito come segue

Teorema 2.2.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ data da $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $z = x+iy$. Se in Ω le derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ esistono, sono continue e soddisfano le condizioni* (2.2a)-(2.2b) *allora f è differenziabile in ogni punto di Ω.*

In effetti, come vedremo meglio più avanti, si può provare che le funzioni che sono derivabili su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ sono ivi *analitiche* cioè possono essere scritte come serie di potenze.

Esempio 2.2.8. Consideriamo la funzione $f(z) = e^z$. Poniamo $z = x + iy$; si può scrivere $e^z = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$. Si verifica subito che valgono le condizioni del Teorema 2.2.7 con $\Omega = \mathbb{C}$, pertanto la funzione $f : z \mapsto e^z$ è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{C}$.

Per calcolare $f'(z)$ sfruttiamo, per esempio, la formula (2.3) (vedere l'Osservazione 2.2.6). Si ottiene

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Esercizio 2.2.9. Usare il risultato dell'Esempio 2.2.8 e l'Osservazione 2.2.1 per verificare che

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin z = \cos z$,
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cos z = -\sin z$,
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \tan z = \frac{1}{(\cos z)^2}$.

Sia $z = x + iy$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sia differenziabile in $\mathbb{C}$. Supponiamo che le funzioni u e v ammettano derivate parziali seconde continue in $\mathbb{R}^2$. (Si può dimostrare che questo è sempre vero, per esempio, se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{C}$.) Derivando la (2.2a) rispetto a x e la (2.2b) rispetto a y, si ottiene[1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

[1] Non scriviamo esplicitamente il punto in cui sono calcolate le derivate, esse devono intendersi in (x, y).

Da cui si ottiene la relazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{2.5}$$

Similmente, si può provare che vale la relazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{2.6}$$

Questo mostra che le parti reale e immaginaria di una funzione differenziabile soddisfano rispettivamente le equazioni (2.5) e (2.6). Queste sono esempi di *equazioni alle derivate parziali del secondo ordine*. Le equazioni di questa forma si chiamano *equazioni di Laplace*.

2.2.2 Condizioni di Cauchy-Riemann: interpretazione geometrica

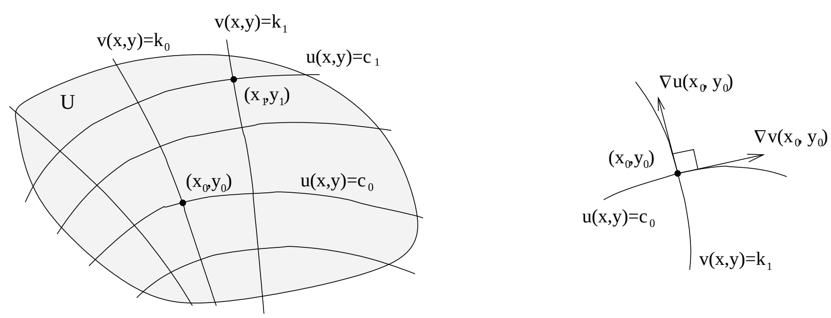

Figura 2.1: Ortogonalità delle famiglie di curve determinate dalle parti reale e complessa di una funzione differenziabile

Sia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una funzione differenziabile in $\mathbb{C}$. Consideriamo la famiglia di curve (in $\mathbb{R}^2$) definita implicitamente al variare di $c \in \mathbb{R}$ dall'equazione

$$u(x,y) = c.$$

Fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, supponiamo che $\nabla u(x_0, y_0) \neq 0$. Allora si ha

$$\nabla u(x,y) \neq 0 \tag{2.7}$$

per tutti i punti (x,y) in un intorno U sufficientemente piccolo di (x_0, y_0).

Consideriamo ora la famiglia di curve (in $\mathbb{R}^2$) definita implicitamente, al variare di $k \in \mathbb{R}$, dall'equazione

$$v(x,y) = k.$$

Per le condizioni di Cauchy-Riemann (2.2), $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{C}$. Conseguentemente, per la (2.7), $\nabla v(x,y) \neq 0$

per ogni $(x,y) \in U$. Inoltre, per ogni $(x,y) \in U$,

$$\begin{aligned}\langle \nabla u(x,y), \nabla v(x,y)\rangle =& \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ =& \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0\end{aligned}$$

Questa identità, valida in tutti i punti di U, ci dice che se le curve $u(x,y) = c_1$ e $v(x,y) = k_1$ si incontrano in un punto $(x_1, y_1) \in U$, allora sono ivi mutuamente perpendicolari.

Vediamo una interpretazione fisica delle parti reali ed immaginaria di una funzione complessa.

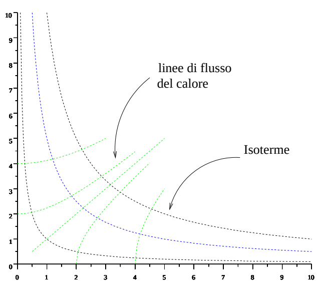

Figura 2.2: Esempio di propagazione del calore: caso stazionario

Esempio 2.2.10. Consideriamo, nel semipiano $y > 0$, i due rami di iperbole di equazioni $xy = 1$ e $xy = 5$. Supponiamo che nella parte D di semipiano contenuta tra queste curve sia posto un conduttore di calore uniforme e isotropo, e che le due iperboli siano mantenute a temperatura costantemente uguale a T_1 e T_2 rispettivamente (condizioni al contorno). Supponiamo inoltre di aver raggiunto lo stato di equilibrio e che non vi siano altre fonti di calore. Come vedremo in seguito, se la funzione $u(x,y)$ rappresenta la temperatura nel punto (x,y), allora si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{2.8}$$

Per trovare la funzione u che descrive la temperatura ricorriamo al seguente artificio: consideriamo la funzione complessa (ovviamente differenziabile) $f_{a,b}(z) = -iaz^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Scrivendo come al solito $z = x + iy$ e $f_{a,b}(z) = u_{a,b}(x,y) + iv_{a,b}(x,y)$, si ottiene $u_{a,b}(x,y) = 2axy + b$ e $v_{a,b}(x,y) = -a(x^2 - y^2)$. Per le (2.5) e (2.6), sia $u_{a,b}$ sia $v_{a,b}$ soddisfano la (2.8); si tratta di vedere se è possibile scegliere le **costanti** a e b in modo che siano soddisfatte le "condizioni al contorno". Per farlo, dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a + b = T_1 & \text{(cioè } u|_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=1\}}(x,y) \equiv T_1) \\ 10a + b = T_2 & \text{(cioè } u|_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=5\}}(x,y) \equiv T_2) \end{cases}$$

Otteniamo $a = (T_2 - T_1)/8$ e $b = (5T_1 - T_2)/4$. Allora la funzione,

$$u(x,y) = \frac{(T_2 - T_1)xy + 5T_1 - T_2}{4} = u_{a,b}(x,y)$$

è la funzione che rappresenta la temperatura in D. Le curve descritte implicitamente dall'equazione $u(x,y) = c$ sono le *isoterme* (corrispondenti alla temperatura c).

Se poniamo
$$v(x,y) = -\frac{T_2 - T_1}{4}(x^2 - y^2) = v_{a,b}(x,y),$$
si ha che le curve descritte implicitamente dall'equazione $v(x,y) = k$ sono le *linee di flusso* del calore cioè quelle curve lungo cui è maggiore la variazione di temperatura. (Si veda la figura 2.2.)

2.3 Integrazione in $\mathbb{C}$

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo di estremi a, b e $\gamma : I \to \Omega \subset \mathbb{C}$, una curva regolare a tratti. Per ogni $t \in I$ possiamo scrivere $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, con φ e ψ funzioni opportune. Data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$, si può scrivere $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, con u e v funzioni opportune.

Supponiamo che f sia continua. Definiamo l'integrale di f lungo γ come segue:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \;\mathrm{d}z \underset{\text{def.}}{=} & \int_a^b u\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t) - v\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\;\mathrm{d}t \\ & + i\int_a^b v\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t) + u\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\;\mathrm{d}t \\ = & \int_\Gamma P\cdot\;\mathrm{d}s + i\int_\Gamma Q\cdot\;\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

Dove Γ è la curva di $\mathbb{R}^2$ data da $t \mapsto \big(\varphi(t),\psi(t)\big)$ e Q e P sono i campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ dati da $(x,y) \mapsto \big(v(x,y),u(x,y)\big)$ e $(x,y) \mapsto \big(u(x,y),-v(x,y)\big)$ rispettivamente.[2]

Esempio 2.3.1. Sia γ la circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Calcoliamo $\int_\gamma \overline{z}\;\mathrm{d}z$. Siccome $\gamma(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ per $0 \le \theta < 2\pi$, si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}\;\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}(\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta + i(\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\;\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -(\cos\theta - i\sin\theta)\sin\theta + i(\cos\theta - i\sin\theta)\cos\theta\;\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} i\Big((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\Big)\;\mathrm{d}\theta = 2\pi i\end{aligned}$$

Osserviamo che, analogamente al caso degli integrali di linea in $\mathbb{R}^n$, vale una proprieà di additività del dominio. Più precisamente, se γ è la concatenazione delle

[2]Per capire euristicamente il motivo di questa definizione e per ricordare più facilmente il metodo di integrazione, moltiplichiamo formalmente $f = u + iv$ per $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\;\mathrm{d}y$. Si ottiene
$$f(z)\;\mathrm{d}z = (u\;\mathrm{d}x - v\;\mathrm{d}y) + i(v\;\mathrm{d}x + u\;\mathrm{d}y).$$
Allora, tenendo presente che $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\;\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}y = \psi'(t)\;\mathrm{d}t$, si ha $f(z)\;\mathrm{d}z = P\;\mathrm{d}s + iQ\;\mathrm{d}s$.

curve γ_1 e γ_2 (tenendo conto dell'orientazione) allora $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z$.

Esercizio 2.3.2. Sia γ una circonferenza di centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raggio $r > 0$ percorsa in senso antiorario. Verificare che

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\ \mathrm{d}z = 2\pi i,$$

indipendentemente da r. (Suggerimento: Provare prima con $z_0 = 0$.)

Supponiamo che f sia differenziabile in un aperto semplicemente connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dalla dimostrazione del Teorema 2.2.4 si vede che le formule di Cauchy-Riemann (2.2) sono valide in Ω, e dunque i campi vettoriali P e Q definiti sopra sono conservativi.

Si ha allora che, se γ è chiusa e contenuta in un dominio semplicemente connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ ed f è differenziabile in Ω, allora

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0. \tag{2.9}$$

Si può dimostrare che questa formula vale anche se supponiamo f continua in Ω e differenziabile in Ω eccettuati al più alcuni punti isolati (**Teorema di Morera**).

Osservazione 2.3.3. Osserviamo che la formula (2.9) implica che, data f differenziabile in un dominio aperto Ω,

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z$$

Per ogni coppia di curve γ e γ_1 contenute in Ω ed aventi gli stessi estremi (nello stesso ordine). In altre parole, se γ è tutta contenuta in Ω, $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ dipende solo dagli estremi di γ. Questo spesso è utile per semplificare i calcoli.

Nell'analisi reale il calcolo degli integrali è spesso facilitato dal teorema fondamentale del calcolo. In analisi complessa è possibile fare qualcosa di simile.

Data una funzione continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$, diremo che una funzione F, differenziabile in Ω, è una *primitiva* di f se $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \Omega$. Chiaramente, se F è una primitiva, allora anche $F(z) + c$ lo è per ogni costante c.

Supponiamo che F sia una primitiva della funzione continua f e che $\gamma : [a, b] \to \Omega$ sia una curva regolare a tratti in Ω. Scriviamo $f(z) = u(z) + iv(z)$ e $F(z) = U(z) + iV(z)$, allora per la (2.3) si ha

$$\frac{\partial U}{\partial x}(z) = u(z), \qquad \frac{\partial V}{\partial x}(z) = v(z). \tag{2.10}$$

Scriviamo $\gamma(t) = \big(\phi(t), \psi(t)\big)$. Tenendo conto delle (2.10) e delle condizioni di Cauchy-Riemann (2.2) per la funzione F, si ha che nei punti in cui γ è derivabile vale:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\big(\gamma(t)\big) &= \\ &\frac{\partial U}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\phi'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\psi'(t) + i\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\phi'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\psi'(t)\Big) \\ &\qquad = u\big(\gamma(t)\big)\phi'(t) - v\big(\gamma(t)\big)\psi'(t) + i\Big(v\big(\gamma(t)\big)\phi'(t) + u\big(\gamma(t)\big)\psi'(t)\Big).\end{aligned}$$

Allora,

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\big(\gamma(t)\big)\ \mathrm{d}t = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Questa formula è utile nel caso in cui sia semplice determinare una primitiva della funzione integranda, tuttavia essa va usata con prudenza: a questo proposito si veda il successivo paragrafo 2.3.1.

Esercizio 2.3.4. Calcolare l'integrale $\int_\gamma ze^{z^2}\ \mathrm{d}z$, dove γ è una qualunque curva che congiunge 0 con $1+i$.

Vediamo ora un tipo di ragionamento che spesso risulta utile nel calcolo di integrali lungo curve chiuse complicate.

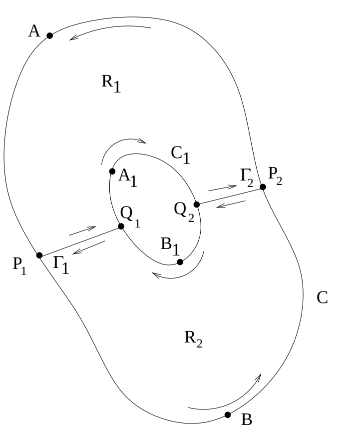

Figura 2.3: Integrazione su curve chiuse.

Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$, consideriamo due curve semplici chiuse C c C_1 in Ω tali che C_1 sia racchiusa da C e percorsa nello stesso senso. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile, allora

$$\int_{C_1} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_C f(z)\ \mathrm{d}z. \tag{2.11}$$

Nella figura a fianco, per esempio, si sono aggiunti i segmenti Γ_1 e Γ_2 in modo tale che, tenendo conto delle orientazioni, risulta

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z - \int_{C_1} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{P_1\overset{\frown}{B}P_2B_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{P_2\overset{\frown}{A}P_1A_1} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

L'ultima uguaglianza segue, per il teorema di Morera, dalla differenziabilità di f nelle regioni R_1 ed R_2 racchiuse rispettivamente dalle curve (semplici) $P_2\overset{\frown}{A}P_1A_1$ e $P_1\overset{\frown}{B}P_2B_1$.

2.3.1 Formula di Cauchy.

Non sempre, data una funzione integranda f esiste una primitiva nel senso definito sopra, si veda, ad esempio, l'esercizio 2.3.2.

Teorema 2.3.5 (Formula integrale di Cauchy). *Sia f differenziabile in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e siano $z_0 \in \Omega$ e γ il bordo di un disco chiuso tutto contenuto in Ω e contenente z_0 nel suo interno. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0),$$

dove γ è percorsa in senso antiorario.

Dimostrazione. Definiamo

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{se } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{se } z = z_0. \end{cases}$$

Osserviamo che, poiché f è differenziabile, g è continua in Ω ed è differenziabile in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Usando la (2.9) e l'esercizio 2.3.2, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z =& \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \\ =& \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \frac{f(z_0)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0). \end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare. □

Da questo teorema discende che ogni funzione complessa differenziabile in un disco D è ivi sviluppabile in serie di potenze, cioè è *analitica.*

Teorema 2.3.6. *Sia f differenziabile nel disco aperto D di raggio $\rho > 0$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$; allora f è sviluppabile in serie di potenze in D, cioè esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ tale che*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \textit{per ogni } z \in D.$$

Dimostrazione. Fissiamo r positivo e minore di ρ. Sia γ una circonferenza centrata nell'origine e di raggio r_1 con $r < r_1 < \rho$. Per la formula di Cauchy, percorrendo la circonferenza in senso antiorario,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \quad \text{per } |z| \leq r.$$

Prendiamo $\zeta \in \gamma$, poiché $|z| < |\zeta|$ la funzione

$$\frac{1}{1 - z/t}$$

si può sviluppare in serie di potenze. Si ottiene:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{1 - z/t} = \frac{1}{\zeta}\left(1 + \frac{z}{\zeta} + \ldots + \frac{z^n}{\zeta^n} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.$$

Da cui,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \quad \text{per } |z| \leq r.$$

Poiché $|z| \leq r$ e $|\zeta| = r_1 > r$ la serie sotto il segno di integrale converge uniformemente e quindi si può integrare termine a termine.[3] Posto

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{per } |z| \leq r.$$

Per l'arbitarietà di $r < \rho$ si ha la tesi. $\square$

Il teorema appena dimostrato vale per un disco centrato nell'origine ma, chiaramente, è valido un risultato analogo per un qualunque disco aperto D centrato in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. In tale caso si ottengono sviluppi della forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \text{per } z \in D.$$

Viceversa, è ovvio che una funzione f che sia rappresentata in D da una serie di potenze è ivi differenziabile[4]. Dunque, le funzioni analitiche in D sono tutte e sole quelle che sono differenziabili in D.

Quest'affermazione si può estendere agli aperti di $\mathbb{C}$. Pertanto **la classe delle funzioni differenziabili in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ coincide con quella delle funzioni analitiche in Ω.**

Osservazione 2.3.7. Sia h una funzione differenziabile in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$. Supponiamo che $h(z_0) = 0$ ma che h non sia identicamente nulla in quell'intorno. Allora non tutte le derivate di h in z_0 saranno nulle. In altre parole esisterà $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$h(z_0) = h'(z_0) = h''(z_0) =, \ldots, = h^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad h^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

[3] Si usa un risultato di integrazione per serie analogo a quello noto nel campo reale.

[4] Si usa un risultato di derivazione per serie analogo a quello noto per le serie di potenze nel campo reale.

(L'esponente "(k)" indica il k-simo ordine di derivazione.) Allora, in un intorno di z_0, si avrà

$$\begin{aligned} h(z) =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ =&(z-z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k} = (z-z_0)^k \phi(z), \end{aligned}$$

dove

$$\phi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k}$$

è una funzione non nulla in un intorno di z_0. Si è dunque provato che **gli zeri delle funzioni differenziabili (non identicamente nulle) sono isolati**.

2.3.2 Il metodo dei residui

Singolarità

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia f una funzione a valori complessi differenziabile in un intorno 'bucato' $\Omega \setminus \{z_0\}$ di z_0. Senza perdita di generalità si può sempre supporre che f risulti definita anche in z_0. Se f non è differenziabile in z_0, si dice che z_0 è una *singolarità* di f. Le singolarità possono essere di tre tipi.

Singolarità eliminabili: Si dice che z_0 è una *singolarità eliminabile* se f può essere resa differenziabile in Ω cambiando il valore di f in z_0 (soltanto).

Poli: Si dice che f ha un *polo* di *ordine* k in z_0 se esiste una funzione differenziabile ϕ in un intorno Ω' di z_0 tale che

$$(z-z_0)^k f(z) = \phi(z), \quad z \in \Omega \cap \Omega' \setminus \{z_0\},$$

e $\phi(z_0) \neq 0$.

Singolarità essenziali: Si dice che z_0 è una *singolarità essenziale* di f se è una singolarità non eliminanabile che non è un polo.

Osservazione 2.3.8. Nel caso in cui z_0 sia una singolarità eliminabile, il limite di $f(z)$ per z che tende a z_0 esiste. Per eliminare la singolarità, allora, è sufficiente modificare la funzione f nel punto z_0: basta **definire**

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Osservazione 2.3.9. Supponiamo che

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\},$$

dove $h : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono funzioni differenziabili sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supponiamo che $h(z_0) = 0$ per qualche z_0 in Ω. Per l'Osservazione 2.3.7, z_0 è uno zero isolato di h, inoltre, esiste un intorno Ω' di z_0, e due funzioni η e γ non nulle in Ω' tali che

$$h(z) = (z - z_0)^k \eta(z), \quad g(z) = (z - z_0)^m \gamma(z),$$

per opportuni interi $m \geq 0$, $k \geq 1$. (Ovviamente $m = 0$ e $\gamma = g$ se $g(z_0) \neq 0$.) Se $k \leq m$, allora f ha al più una singolarità eliminabile in z. Invece, se $k > m$, allora risulta

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z - z_0)^m \gamma(z)}{(z - z_0)^k \eta(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^{k-m}} \, \frac{\gamma(z)}{\eta(z)} \\ &= \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^{k-m}}, \end{aligned} \qquad z \in \Omega \cap \Omega' \setminus \{z_0\},$$

con $\phi = \gamma(z)/\eta(z)$. In altre parole, per $k > m$, z_0 è un polo di ordine $k - m$.

Esercizio 2.3.10. Studiare le singolarità delle funzioni

$$\frac{z}{(z-1)^2}, \qquad \frac{z}{1 - \cos z}$$

Il Teorema dei residui

Sia $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile e sia $C \subset \Omega \setminus \{z_0\}$ una curva semplice e chiusa che circonda z_0. Data una qualunque curva semplice chiusa $C_1 \subset \Omega \setminus \{z_0\}$ circondata da C orientata come C e che a sua volta circonda z_0, dalla formula (2.11) si ottiene che

$$\int_{C_1} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_C f(z) \, \mathrm{d}z. \tag{2.12}$$

Questo, dal momento che siamo liberi di scegliere C_1 anche molto vicina a z_0, mostra che $\int_C f(z) \, \mathrm{d}z$ dipende solo dai valori assunti da $f(z)$ per z vicino a z_0.

Vediamo come questo fatto può essere sfruttato per calcolare l'integrale. Supponiamo che z_0 sia un polo *semplice* (cioè di ordine 1) e che C_1 sia una circonferenza di centro z_0 percorsa in senso antiorario e di raggio sufficientemente piccolo affinché essa risulti circondata da C. Definiamo

$$\phi(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z) & z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.13}$$

Si osservi che ϕ è una funzione differenziabile in Ω. Per la formula integrale di Cauchy

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\phi(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z,$$

quindi, per la (2.12) e (2.13),

$$\begin{aligned} 2\pi i \lim_{z\to z_0} \big[(z-z_0)f(z)\big] &= 2\pi i\phi(z_0) \\ &= \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Cioè abbiamo ridotto, nel caso di poli semplici, il calcolo dell'integrale a quello di un limite.

Nel caso in cui z_0 sia un polo di ordine $k \geq 1$ si può dimostrare che vale la seguente formula:

$$\boxed{\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big[(z-z_0)^k f(z)\Big].} \tag{2.14}$$

In generale, se C è una curva semplice chiusa, percorsa in senso antiorario, che circonda una (sola) singolarità z_0 della funzione f, il numero

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

si chiama *residuo* di f in z_0 e si indica con $\mathcal{R}_{z_0}(f)$. Dalla formula (2.11) segue che il residuo non dipende dalla scelta della curva C. La discussione relativa alla formula (2.14) mostra che, nel caso di un polo di ordine $k \geq 1$, si ha

$$\mathcal{R}_{z_0}(f) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big[(z-z_0)^k f(z)\Big].$$

Purtroppo non esiste una formula analoga nel caso delle singolarità essenziali.

Esercizio 2.3.11. Calcolare il residuo in 0 di $1/\sin z$ e calcolare $\int_C 1/\sin z\,\mathrm{d}z$, dove C è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\pi/2$ percorsa in senso orario. (*Suggerimento: Attenzione al segno.*)

Facendo uso dell'additività dell'integrale, si pu'o dimostrare il seguente teorema

Teorema 2.3.12 (Teorema dei Residui). *Sia $f : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile, e sia $C \subset \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ una curva semplice chiusa, percorsa in senso antiorario, che circonda $z_1, \dots, z_n$. Allora,*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big[\mathcal{R}_{z_1}(f) + \cdots + \mathcal{R}_{z_n}(f)\big].$$

Esercizio 2.3.13. Calcolare

$$\int_C \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z,$$

dove C è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

Esercizio 2.3.14. Calcolare

$$\int_C \frac{z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z,$$

dove C è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

2.3.3 Integrali impropri in $\mathbb{R}$

Il metodo dei residui è spesso utile per il calcolo di alcuni integrali impropri reali.

Se vogliamo calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\ \mathrm{d}x$$

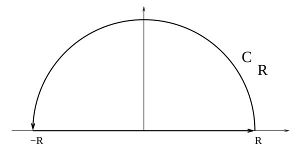

Figura 2.4: γ_R

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua (ma non è detto, in generale, che tale integrale esista), possiamo provare a ragionare come segue:

1. Estendiamo, se possibile, f ad una funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (cioè troviamo una F tale che $F|_{\mathbb{R}} = f$) con le seguenti proprietà:

   (a) esistano $R_0 > 0$ ed $M > 0$ con la proprietà che $|F(z)| \leq M/|z|^{1+\alpha}$, con $\alpha > 0$;

   (b) F ammette un numero finito di poli nel semipiano superiore (parte immaginaria non negativa) $p_1, \ldots, p_n$.

2. Consideriamo il cammino d'integrazione γ_R composto dalla semicirconferenza C_R contenuta nel semipiano superiore (parte immaginaria non negativa) centrata nell'origine con raggio R, e dal segmento (in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) di estremi $-R$ ed R (vedere la figura 2.4). In questo modo, per la scelta di F, se R è sufficientemente grande

$$\left|\int_{C_R} F(z)\ \mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} F(Re^{it})Rie^{it}\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\pi} |F(Re^{it})|R\ \mathrm{d}t \leq \int_0^{\pi} \frac{MR}{R^{1+\alpha}}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi M}{R^{\alpha}},$$

   quindi $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} F(z)\ \mathrm{d}z = 0$. Per la finitezza del numero di poli di F, se R è sufficientemente grande, il Teorema dei residui ci dice che

$$2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_{p_i}(F) = \int_{\gamma_R} F(z)\ \mathrm{d}z.$$

3. Passando al limite per $R \to +\infty$ si ha,

$$2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_{p_i}(F) = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} F(z)\ \mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty} \left[\int_{C_R} F(z)\ \mathrm{d}z + \int_{-R}^{R} f(x)\ \mathrm{d}x\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Il metodo appena descritto funziona bene se f è una funzione razionale del tipo:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \begin{cases} \text{con } P \text{ e } Q \text{ polinomi privi di fattori comu-} \\ \text{ni, } Q(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e grado di } Q \\ \text{che supera di almeno 2 quello di } P. \end{cases}$$

In questo caso, per soddisfare il punto (1) basta prendere $F(z) = P(z)/Q(z)$. Allora, se $p_1, \ldots, p_n$ sono i poli di F contenuti nel semipiano superiore, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_{p_i}(F).$$

Esempio 2.3.15. Calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$. I poli della funzione $F(z) = \frac{1}{1+z^2}$ sono $\pm i$ (sono poli semplici, cioè di ordine 1) di cui solo i è contenuto nel semipiano superiore. Il residuo di F in i vale $1/(2i)$. Ne segue che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi.$$

Esempio 2.3.16. Calcoliamo $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\, dx$, $a \in \mathbb{R}$. La funzione $F(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2}$ ha due poli di ordine 2 in $\pm|a|i$, inoltre

$$\mathcal{R}_{|a|i}(F) = \frac{1}{4|a|^3 i}.$$

Ne segue che

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{2\pi i \mathcal{R}_{|a|i}(F)}{2} = \frac{\pi}{4|a|^3}.$$

Esercizio 2.3.17. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x+x^2}\, dx$.

Riferimenti ed approfondimenti

Paragrafi 2.1 – 2.2: [6, cap. 2], [7, capp. 1,2], [16, capp. 1,8].

Paragrafo 2.3: [3, cap. 8], [4, parte V, cap. 1], [6, capp. 3,4,5], [16, cap. 5] [18, cap. 9], [20, cap. 17]