7ª Lezione -

Modelli di crescita

Popolazioni

Abbiamo visto che una popolazione, almeno nelle fasi iniziali tende a crescere in maniera esponenziale. Analizziamo brevemente alcune caratteristiche delle progressioni geometriche ($k \mapsto a^k$).

Consideriamo, per esempio la successione $\{2^k\}_{k\in\mathbb{N}}$.
Ci chiediamo come siano distribuite le prime cifre (in base 10) dei termini di questa successione. Per es.

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 \\ 2^1 &= 2 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^4 &= 16 \\ 2^5 &= 32 \\ &\vdots \end{aligned} \longrightarrow \text{Le prime cifre sono} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix}$$

Osserviamo che, dato $z>0$ la prima cifra (in base 10) di z è uguale a m se per qualche α intero, si ha

$$m10^\alpha \leq z < (m+1)10^\alpha$$

prendendo il logaritmo in base 10,

$$\alpha + \log m \leq \log z < \alpha + \log(m+1).$$

che significa che la parte frazionaria di $\log z$, cioè $\log z - \lfloor \log z \rfloor$ giace nell'intervallo $[0, \log(m+1) - \log(m)) = [0, \log(1+\frac{1}{m})]$.

Torniamo alla nostra successione. Per studiare la prima cifra di 2^k dobbiamo, per quanto appena detto, guardare $\log 2^k = k\log 2$. Ora, $\log 2$ è irrazionale, infatti se fosse razionale avremmo $10^{p/q} = 2 \Rightarrow 10^p = 2^q$ ma questo non è possibile per $p>0$ visto che 2^q non è divisibile per 5.

Un teorema di H. Weyl ci dice che la successione delle parti frazionarie di $\{k\lambda\}_{k\in\mathbb{N}}$, λ un numero irrazionale, è uniformemente distribuita in $[0,1)$, cioè il numero di volte che i valori della successione si trovano in un sottointervallo è proporzionale alla lunghezza dello stesso.

Posto $P_s = \log\left(1+\frac{1}{s}\right)$, $s = 1, 2, \ldots, 9$

Vediamo che la prima cifra di $k \log 2$ è s se e soltanto se $k \log 2 \in [0, P_s)$ -

Questo ci permette di stabilire le proporzioni degli elementi di $\{2^k\}$ la cui prima cifra è $s = 1, \ldots 9$

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
~	30%	18%	12%	10%	8%	7%	6%	5%	4%

Notiamo che questa distribuzione non varia cambiando la base 2 e prendendo invece a^k (basta che $\log a$ sia irrazionale) - Cioè la distribuzione riportata sopra è una conseguenza della struttura esponenziale (geometrica) di crescita -

Consideriamo ora le popolazioni delle varie nazioni di tutto il mondo. Secondo il principio ergodico, fare le medie sul tempo o sullo spazio conduce agli stessi risultati. pertanto guardando alla distribuzione della prima cifra (in base 10) dei numeri che esprimono queste popolazioni troviamo lo stesso tipo di distribuzione riportata sopra (approssimativamente)* -

Questi ragionamenti si applicano a cose che crescono con leggi esponenziali, non, per esempio, a cose come la lunghezza dei fiumi o l'altezza delle montagne. Tuttavia, l'area delle nazioni (non importa l'unità di misura) sembra seguire lo stesso tipo di distribuzione - È stato ipotizzato che questo sia dovuto si possono unire (p. es. con annessioni) e questo porta a crescite o decrescite di tipo esponenziale -

* Detta legge di Benford.

Accrescimento a spirale e numeri di Fibonacci.

Ricordiamo che abbiamo introdotto i numeri di Fibonacci mediante la relazione per ricorrenza

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Nel suo libro "Liber abaci", Fibonacci sollevò il seguente problema:

"Una coppia di conigli immaturi (maschio e femmina) sono posti in una grande gabbia. Supponiamo che

1) E' necessario 1 mese per un coniglio appena nato per diventare fertile

2) In 1 mese, una coppia matura produrrà una coppia immatura (1 maschio e 1 femmina)

Quanti conigli ci saranno in 1 anno?

Ovviamente si tratta di un'approssimazione grossolana, ma è un'inizio. Vediamo una tabella dei primi mesi:

	Inizio mese 0	dopo 1 mese	dopo 2 mesi	dopo 3 mesi	dopo 4 mesi	dopo 5 mesi
coppie mature	0	1	1	2	3	5
coppie immature	1	0	1	1	2	3
coppie totali	1	1	2	3	5	8

Come si capisce subito il n. delle coppie totali è dato dalla successione dei numeri di Fibonacci.

Ricordiamo che in una lezione precedente abbiamo ottenuto un'espressione esplicita (non ricorsiva) per i numeri di Fibonacci

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(nota come formula di Binet).

Possiamo servircene per esprimere il tasso relativo di crescita dei numeri di Fibonacci (ovvero delle coppie di conigli). Cioè $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Ci interessa il valore al limite, per $n \to \infty$, di questo rapporto.

Si ottiene:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} = a\,\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n}}$$

dove si è posto $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Siccome $\left|\left(\frac{b}{a}\right)\right| < 1$ si ha che $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Il numero $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è detto <u>numero aureo</u>. Come vedremo, spunterà fuori in varie situazioni di crescita che rispetta le proporzioni.

Facciamo prima un'osservazione.

Supponiamo di voler tagliare in due un'asta in modo tale che la proporzione tra il pezzo lungo e quello corto s sia la stessa che c'è tra l'asta intera e il pezzo lungo. Cioè

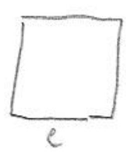
$$\frac{l}{s} = \frac{l+s}{l}.$$

Ovvero $\frac{l}{s} = 1 + \frac{s}{l}$. Posto $\Phi = \frac{l}{s}$, $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$. Risolvendo questa equazione troviamo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o $l = s\Phi$.

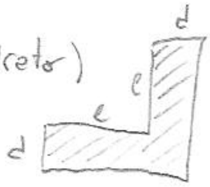
<u>Gnomoni</u>

In geometria uno <u>gnomone</u> di una figura A è una figura che opportunamente attaccata ad A dà luogo ad una figura A' simile (nel senso geometrico del termine) ad A.

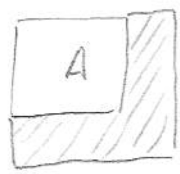
<u>Esempio 1</u>

A = 

(quadrato)



è uno gnomone di A:



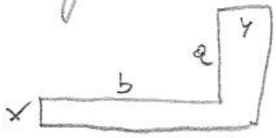
A'

Esempio 2

Notiamo che una corona circolare non può avere uno gnomone (si capisce subito).

Esercizio

Sia A un rettangolo di base b e altezza a. Uno gnomone di A può essere fatto così:

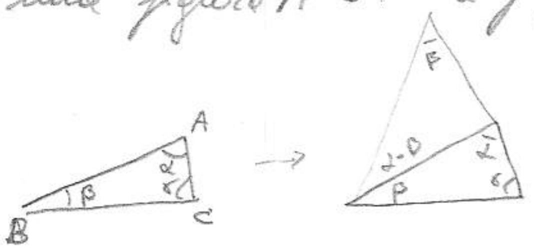


calcolare che relazione deve essere soddisfatta da x e y affinché questo sia realmente uno gnomone.

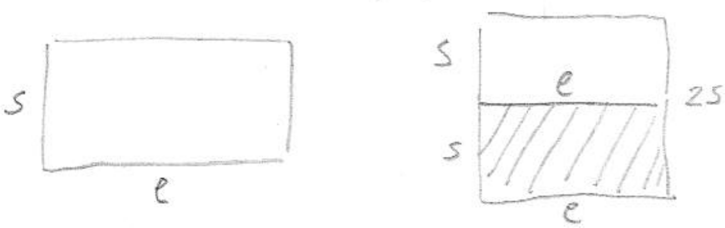
$\left[\frac{b}{a} = \frac{y}{x} \right]$

Una situazione particolarmente interessante si ha quando lo gnomone di una figura A è una figura dello stesso tipo

Esempio



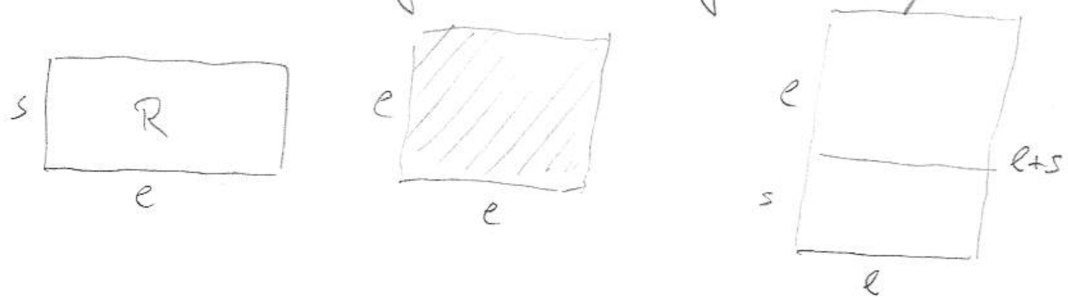
Esempio Una figura può essere il proprio gnomone:



bisogna che $\frac{e}{s} = \frac{2s}{e} \Rightarrow e^2 = 2s^2 \Rightarrow \frac{e}{s} = \sqrt{2}$.

Esercizio

Quando è che un rettangolo ha uno gnomone quadrato?



Cioè deve essere

$$\frac{\ell}{s} = \frac{s+\ell}{\ell} \Rightarrow \frac{\ell}{s} = 1 + \frac{s}{\ell} \qquad \text{posto } t = \frac{\ell}{s}$$

$\Rightarrow t = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow t = \phi$ il rapporto aureo (t deve essere >0)

Questa condizione è necessaria e sufficiente

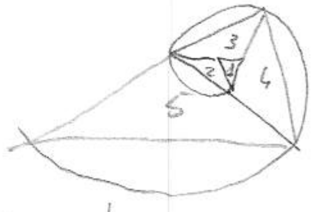
La natura fornisce esempi di gnomoni. Si può considerare il nautilo (un mollusco con una peculiare politica di accrescimento). Ci sono vari organismi che si accrescono così: margherite, alberi girasoli.

Terminiamo con 2 esempi.

① Partiamo da un triangolo isoscele

e aggiungiamo uno gnomone

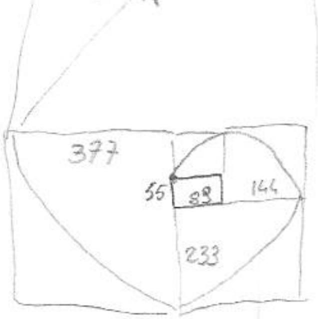
e ripetiamo il procedimento



tenendo traccia dei vertici vediamo che questi giacciono su una spirale logaritmica

2. Procediamo in modo simile con un rettangolo di Fibonacci (lati hanno lunghezze uguali a numeri di Fibonacci consecutivi)

Se partiamo da n abbastanza grande troviamo una quasi un quadrato (approssimativamente



Riconosciamo ancora una volta una spirale logaritmica
il rettangolo che risulta ad ogni stadio è sempre più vicino (come proporzioni) ad essere un rettangolo aureo (rapporto dei lati $= \phi$).

Spirale logaritmica:

In coord. polari $r = e^{\alpha\theta}$. Le distanze tra i bracci aumentano in proporzione geometrica.

Riferimenti

V.I. Arnol'd. Mathematical Understanding of Nature. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2014

P. Tannenbaum, R. Arnold. Excursions in modern mathematics. Prentice Hall.