

# Alcune lezioni

su

— **Modelli Matematici** —

**Marco Spadini**

Corso TFA 2015

**Avvertenza:** Questi appunti riguardano le lezioni sui Modelli Matematici tenute nell'ambito del corso TFA. Sono intesi come una guida o, meglio, un pro-memoria di quanto fatto a lezione e sono ben lontani dall'essere esaustivi.

Lo scopo principale e molto ambizioso di queste lezioni *non* è insegnare la matematica agli studenti di TFA e neanche solo di approfondire la conoscenza della stessa, bensì di stimolare gli studenti a ideare essi stessi lezioni attraenti per i propri futuri allievi, allettandoli con temi che possano andare leggermente oltre gli argomenti convenzionali.

Purtroppo vi saranno imprecisioni, inconsistenze ed errori veri e propri. Sarò grato a chiunque mi segnalerà questi problemi.

Aggiornamento del 16 maggio 2015

Copyright ©Marco Spadini 2015. Tutti i diritti riservati. La copia e la redistribuzione sono proibiti senza l'esplicito consenso scritto dell'autore.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Sistemi articolati</b>	<b>1</b>
1.1 Traslazioni nel piano: il parallelogramma . . . . .	1
1.2 Simmetrie centrali . . . . .	3
1.3 Omotetie: il pantografo . . . . .	4
1.4 Inversione rispetto ad una circonferenza . . . . .	6
1.4.1 Inversione di una retta non passante per il centro . . . . .	7
1.4.2 Inversore di Peaucellier–Lipkin . . . . .	9
Riferimenti ed approfondimenti . . . . .	12
<b>2 Principio di induzione e questioni di taglio</b>	<b>13</b>
2.1 Induzione matematica e taglio della pizza . . . . .	13
2.1.1 Porzioni di pizza . . . . .	15
2.1.2 Un approccio combinatorio . . . . .	17
2.1.3 Affettare il piano con rette: il problema di Steiner . . . . .	20
2.2 Mappe e grafi piani . . . . .	20
2.2.1 Fondi di bicchiere . . . . .	24
2.3 Poliedri . . . . .	26
2.3.1 Poliedri possibili . . . . .	27
Riferimenti ed approfondimenti . . . . .	28
<b>3 Relazioni tra oggetti</b>	<b>29</b>

3.1	Un indovinello: il problema delle utenze . . . . .	29
3.2	I ponti di Königsberg . . . . .	31
3.2.1	Passeggiate senza ritorno . . . . .	33
3.2.2	La passeggiata a tutti i costi: eulerizzazione e semi-eulerizzazione . . . . .	34
3.3	Rappresentare i grafi e far di conto . . . . .	35
3.3.1	Matrice di adiacenza (o connessione) . . . . .	36
3.3.2	Matrice d'incidenza . . . . .	37
3.4	Raggiungere tutti i vertici una volta sola . . . . .	38
3.5	Inserire più informazioni in un grafo . . . . .	40
3.5.1	Grafi pesati e problema del commesso viaggiatore . . . . .	40
3.5.2	Grafi con segno: un problema sociale . . . . .	41
3.5.3	Grafi diretti, traffico automobilistico e tornei . . . . .	42
	Riferimenti ed approfondimenti . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Evoluzione a tempo discreto</b>	<b>45</b>
4.1	Alcuni modelli 1- e 2-dimensionali . . . . .	45
4.1.1	Crescita di una popolazione . . . . .	45
4.1.2	Andamento dei prezzi . . . . .	48
4.1.3	Prede, predatori e competizione . . . . .	50
4.1.4	Concorrenza e prezzi . . . . .	51
4.2	Procedimento di iterazione e mappe definite per ricorrenza . . . . .	53
4.2.1	Successioni ricorsive in $\mathbb{R}$ , diagrammi a scala . . . . .	53
4.2.2	Limiti e punti fissi . . . . .	56
4.3	Orbite ed equilibri . . . . .	56
4.3.1	Caso scalare . . . . .	57
4.3.2	Particolari successioni nel piano . . . . .	60
	Riferimenti ed approfondimenti . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Equazioni alle differenze</b>	<b>62</b>
5.1	Calcolo delle differenze finite . . . . .	62

5.1.1	Proprietà principali di $E$ e $\Delta$ . . . . .	62
5.1.2	Gli operatori inversi di $E$ e $\Delta$ . . . . .	64
5.1.3	La formula di somma per parti . . . . .	66
5.2	Equazioni alle differenze . . . . .	66
5.2.1	Soluzioni . . . . .	67
5.2.2	Equazioni lineari . . . . .	68
5.2.3	Un test per l'indipendenza lineare . . . . .	70
5.2.4	Equazioni lineari a coefficienti costanti . . . . .	71
5.2.5	Un modello di apprendimento . . . . .	74
	Riferimenti ed approfondimenti . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Equilibri e ottimizzazione</b> . . . . .	<b>76</b>
6.1	Un approccio grafico . . . . .	76
6.1.1	Un esempio qualitativo: corsa agli armamenti . . . . .	76
6.1.2	Adattamento delle specie . . . . .	80
6.2	Approccio analitico . . . . .	81
6.2.1	Incendi dei boschi . . . . .	81
6.2.2	Posizionare una scuola tra due villaggi . . . . .	84
6.2.3	Almeno tre villaggi: il problema di Fermat-Weber . . . . .	86
6.2.4	Una questione di equità . . . . .	88
	Riferimenti ed approfondimenti . . . . .	89

# Introduzione

Il termine “modello matematico” soffre di una –forse voluta– ambiguità: lo si può interpretare come uno strumento matematico (un’equazione, una funzione o quant’altro) che rappresenta la realtà, cioè un’astrazione della stessa o, al contrario, come un oggetto reale che dà concretezza ad una nozione matematica. Nella prima accezione, il modello matematico è da vedersi come uno strumento per conoscere più a fondo la realtà anche in modo quantitativo. Nella seconda, questo sembra divenire più un ausilio per l’apprendimento e la comprensione di nozioni e strutture astratte. Non mancano tuttavia esempi che si trovano per così dire a cavallo tra queste due interpretazioni. Basti pensare ai modellini di solidi platonici (saranno argomento della seconda lezione) che tutti abbiamo avuto occasione di vedere in qualche vetrinetta dei dipartimenti di matematica: questi sono chiaramente rappresentazioni concrete di oggetti matematici, ma essi stessi sono idealizzazioni di oggetti reali.



Due modelli di solidi platonici



Dadi da gioco rappresentabili come solidi platonici

Un discorso analogo può essere fatto per i sistemi articolati che saranno argomento della prima lezione.

Una disamina generale sul concetto di modello matematico sarebbe troppo lunga da tenere qui e, forse, anche fuori luogo. Il lettore interessato può trovare un'ampia e interessante discussione su questo tema nel libro di G. Israel<sup>1</sup>, o su quello di E. A. Bender<sup>2</sup>.

Altre lezioni avranno un approccio più o meno concreto a seconda della nozione da introdurre. Cercherò, per ogni argomento, di presentare una bibliografia che permetta sia l'approfondimento che l'estensione degli argomenti presentati.

Ogni lezione riguarda un tema matematico diverso, visto da un punto di vista "modellistico" concreto che, ben lontano dall'essere assoluto, è personale del docente. L'idea di fondo di queste lezioni è stimolare la creazione di progetti didattici tesi ad illustrare le diverse nozioni matematiche che gli aspiranti docenti vorranno introdurre.

---

<sup>1</sup>Giorgio Israel, *Modelli matematici. Introduzione alla matematica applicata*; Franco Muzzio Editore, 2002 Roma.

<sup>2</sup>Edward A. Bender, *An introduction to mathematical modeling*, Dover Publ., New York, 2000

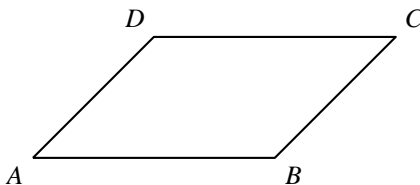
# Lezione 1

## Sistemi articolati: trasformazioni del piano, invito alla geometria sintetica e analitica

I sistemi articolati *reali* sono importanti in meccanica e robotica. Le loro corrispondenti idealizzazioni, i sistemi articolati *astratti*, sono nate per studiare le questioni cinematiche che nascono in questi ambiti. Si tratta di sistemi di segmenti sottoposti a vari vincoli che sono liberi di muoversi in un piano o nello spazio. Viceversa, i sistemi articolati reali hanno la loro rilevanza teorica in quanto permettono di realizzare concretamente alcune importanti trasformazioni del piano e di disegnare, almeno localmente, le curve algebriche (Si confronti il teorema di Kempe<sup>1</sup> del 1876).

### 1.1 Traslazioni nel piano: il parallelogramma

Il parallelogramma è una figura fondamentale nei sistemi articolati. Si tratta di un quadrilatero convesso con i lati opposti paralleli.



Un parallelogramma. Le coppie di lati opposti sono  $AB$  e  $CD$ , e  $AD$  e  $BC$ .

Il fatto fondamentale che useremo è questa conseguenza diretta dei postulati di Euclide (omettiamo la dimostrazione):

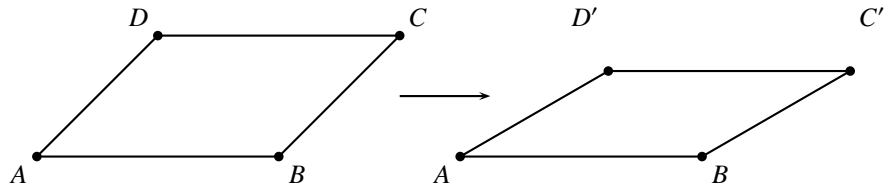
---

<sup>1</sup>Alfred Kempe, 1849–1922.

Data una curva algebrica piana ed un punto su di essa, esiste un sistema articolato che la traccia in un intorno del punto dato.

**Teorema 1.1.1.** *Un quadrilatero è un parallelogramma se e soltanto se i lati opposti sono uguali e se e soltanto se gli angoli opposti sono uguali.*

L'applicazione di questo teorema ai sistemi articolati diventa immediatamente chiara se consideriamo i vertici del parallelogramma come snodi:

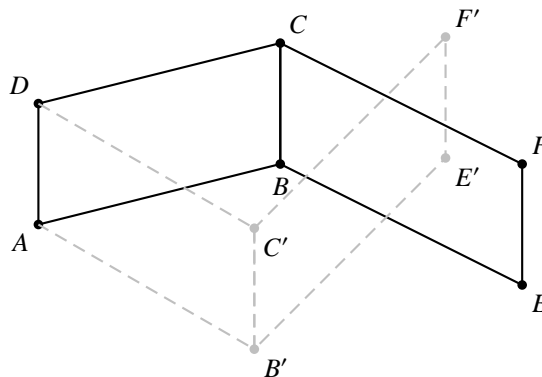


Si lascia fisso  $AB$ ,  $CD$  viene traslato in  $C'D'$ .



Un'applicazione: uno strumento per tracciare parallele.

Componendo due parallelogrammi “snodati” si realizzano localmente le traslazioni del piano. Basta procedere come in figura:



Si lascia fisso  $AD$ ,  $EF$  viene traslato in  $E'F'$ .

La dimostrazione che  $EF$  è sempre parallelo a  $E'F'$  è ovvia e lasciata al lettore.



Un'applicazione pratica di questo tipo di costruzione è il tecnigrafo a parallelogrammi in cui la squadra può venire spostata sul piano di disegno con una traslazione qualunque senza però mai modificare le direzioni delle aste.

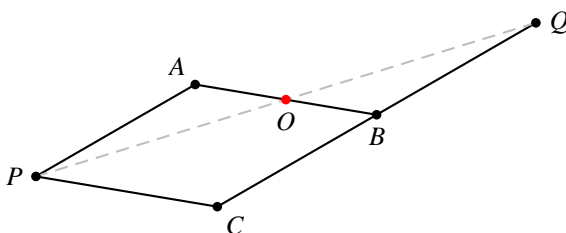


Un tecnigrafo

## 1.2 Simmetrie centrali

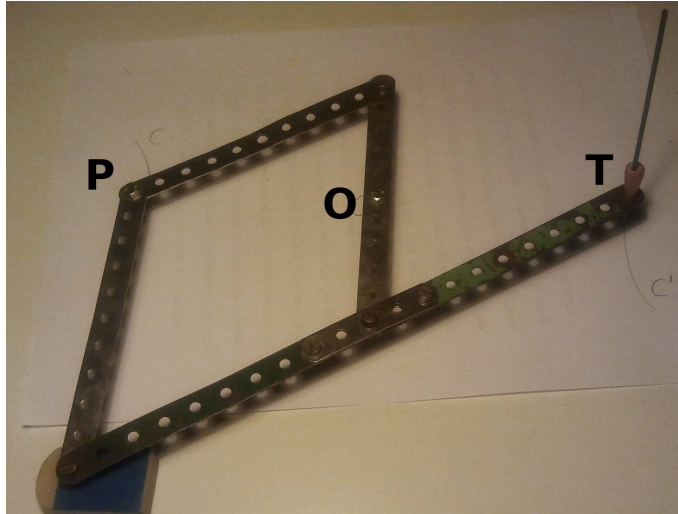
È molto semplice realizzare una simmetria centrale rispetto ad un punto  $O$  dato mediante un sistema articolato.

Si consideri il rombo (cioè un parallelogramma con i lati uguali)  $ABCP$  imperniato nel punto medio  $O$  del lato  $AB$  e si prolunghi il lato  $BC$  fino ad un punto  $Q$  in modo tale che  $B$  risulti il punto medio di  $QC$ , come in figura



Con questa costruzione i punti  $P$  e  $Q$  sono simmetrici rispetto ad  $O$ . In altre parole,  $\overline{PO} = \overline{OQ}$ . La dimostrazione di questo fatto segue dalla congruenza dei triangoli  $APO$  e  $BQO$ . Infatti gli angoli  $\widehat{AOP}$  e  $\widehat{BOQ}$  sono uguali perché opposti al vertice, mentre gli angoli  $\widehat{PAO}$  e  $\widehat{OBQ}$  lo sono perché opposti di un parallelogramma. Di conseguenza, questi triangoli hanno tutti gli angoli interni uguali. La congruenza segue dal fatto che  $\overline{AO} = \overline{BO}$ .

Questa costruzione può intendersi come un “meccanismo” che dato il punto  $Q$  costruisce il suo simmetrico  $P$  rispetto ad  $O$ .



Il sistema articolato della figura precedente realizzato con le aste del meccano

Data una curva  $c$  ed un punto  $O$ , per costruire la curva simmetrica  $c'$  rispetto a  $O$ . Si fissa ivi la punta  $O$  e si trascina la punta  $P$  lungo  $c$ . La punta tracciante  $T$ , segnerà la curva  $c'$ .

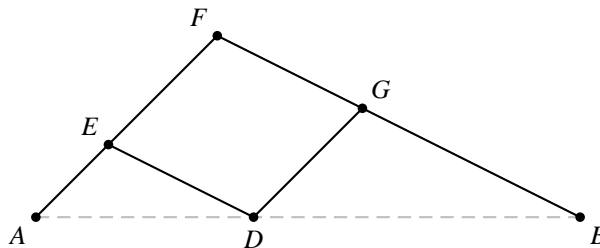
È importante osservare la differenza che c'è tra sistemi articolati e ordinarie costruzioni con riga e compasso. Nei primi, infatti, possiamo cambiare gli angoli, spostare punti, persino (per certe macchine) farli scorrere su segmenti ma non ci è consentito variare le lunghezze delle nostre aste (come sarebbe necessario per realizzare un compasso). Quindi non si può costruire il punto  $Q$  come intersezione della retta passante per  $O$  e  $P$  con la circonferenza di centro  $O$  contenente  $P$ , come faremmo per un'ordinaria costruzione geometrica.

### 1.3 Omotetie: il pantografo

Si consideri un sistema articolato costituito da quattro aste: due lunghe  $AF$  ed  $FB$  imperniate in  $F$ , e due corte  $ED$  e  $DG$  imperniate tra di loro in  $D$  e, rispettivamente, con  $AF$  in  $E$  e con  $FB$  in  $G$ . Supponiamo che

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{BF}}$$

e che  $DEFG$  sia un parallelogramma. Supponiamo cioè che le aste siano disposte come in figura:



Poniamo

$$k := \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}};$$

in tale modo  $k$  è una costante, per così dire un *parametro costruttivo*, che dipende solo dalla scelta del punto  $E$  sull'asta  $AF$ . Valgono i seguenti fatti riguardanti questa costruzione:

**Teorema 1.3.1.** (1) I punti  $A$ ,  $D$  e  $B$  sono allineati. (2) Si ha  $\overline{AD} / \overline{AB} = k$ .

*Dimostrazione.* (1) I triangoli  $AED$  e  $AFB$  sono simili perché hanno gli angoli  $\widehat{AED}$  e  $\widehat{AFB}$  uguali e le coppie di lati adiacenti sono proporzionali. Di conseguenza gli angoli  $\widehat{EAD}$  e  $\widehat{FAB}$  sono uguali a loro volta.

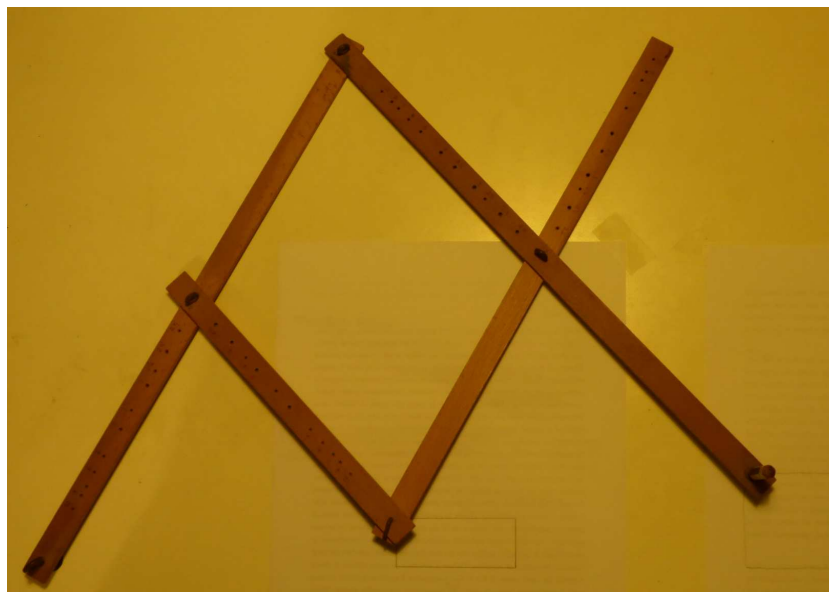
(2) Dalla similitudine dei triangoli  $AED$  e  $AFB$  segue che

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = k.$$

□

Se  $A$  viene considerato fisso, deformando questo sistema articolato (si cambiano gli angoli, ma le lunghezze rimangono le stesse) si realizza una omotetia  $D \mapsto B$  di centro  $A$  e rapporto  $k$ .

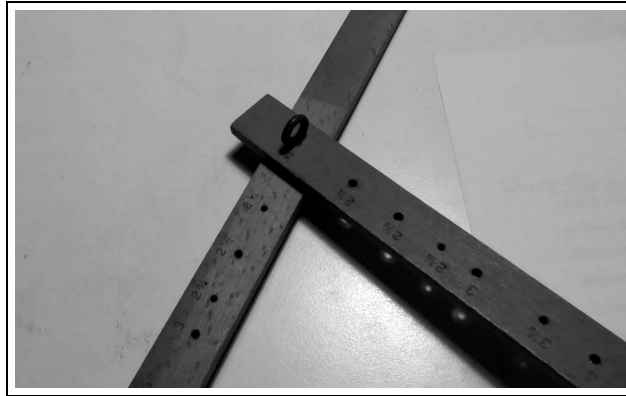
Quello descritto sopra è il principio costruttivo del *pantografo di Scheiner*<sup>2</sup>, uno strumento usato per realizzare riproduzioni in scala (per ingrandire o ridurre) di disegni.



Un semplice pantografo di Scheiner

<sup>2</sup>Christopher Scheiner, 1575–1650.

La scala può essere alterata cambiando la posizione dei perni come mostrato nella foto di dettaglio a fianco.

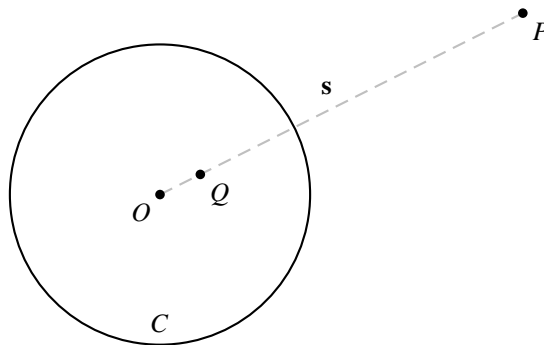


## 1.4 Inversione rispetto ad una circonferenza

Data una circonferenza  $C$  di centro  $O$  e raggio  $\rho > 0$ , si considera la trasformazione del piano “bucato” (cioè privato di  $O$ ), detta *inversione rispetto a  $C$*  ogni punto di  $P \neq O$  del piano viene trasformato nel punto  $Q$ , giacente sulla semiretta  $s$  di origine  $O$  passante per  $P$ , con la proprietà che

$$\overline{OP} = \frac{\rho^2}{\overline{OQ}}.$$

Chiaramente, i punti della circonferenza  $C$  vengono lasciati fermi da questa trasformazione (cioè sono invarianti). Infatti se  $\overline{OQ} = \rho$  allora  $\overline{OP} = \rho$  quindi  $P = Q$ .



Osserviamo che  $Q \neq O$ . Se chiamiamo  $\mathfrak{I}_n$  questa trasformazione, allora  $\mathfrak{I}_n(\mathfrak{I}_n(P)) = P$  per ogni  $P \neq O$ ; questo si può anche scrivere  $\mathfrak{I}_n^2(P) = P$ . Questa importante proprietà della trasformazione si chiama *involuntività*.

Operativamente, ci sono diversi modi di costruire  $Q$  a partire da  $P \neq O$ .

**Vettorialmente.** Si costruisce il vettore  $\vec{OQ}$  ponendo

$$\vec{OQ} = \frac{\rho^2}{|\vec{OP}|^2} \vec{OP}.$$

**In coordinate cartesiane.** Fissato un riferimento cartesiano ortogonale, poniamo  $P = (x, y)$  e indichiamo con  $(\xi, \eta)$  le coordinate di  $Q$ . Si ha

$$\xi = \rho^2 \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \rho^2 \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (1.1)$$

**Con i complessi.** Se  $O = 0$  e  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  è il numero complesso che rappresenta  $P$ , allora  $Q$  è dato dal numero

$$\zeta = \frac{\rho^2}{\bar{z}}.$$

dove  $\bar{z}$  denota il coniugato di  $z$ , cioè, se  $z = x + iy$ , allora  $\bar{z} = x - iy$ . A questo proposito ricordiamo che,

$$\zeta = \frac{\rho^2}{\bar{z}} = \rho^2 \frac{z}{z\bar{z}} = \rho^2 \frac{z}{|z|^2},$$

dove  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  è il modulo di  $z = x + iy$ . Che è perfettamente coerente con le interpretazioni vettoriale e cartesiana date sopra.

È facile vedere, per esempio usando la formulazione complessa, che “ $\Im\mathfrak{n}$ ” è una trasformazione conforme del piano buco  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (cioè una trasformazione che mantiene invariata la misura degli angoli) che ne inverte l’orientazione.

### 1.4.1 Inversione di una retta non passante per il centro

Consideriamo una retta  $\mathbf{r}$  non passante per  $O$  e la sua immagine  $\Im\mathfrak{n}(\mathbf{r})$  mediante l’inversione rispetto ad una circonferenza di raggio  $\rho$  centrata in  $O$ . Un modo semplice per identificare quest’immagine è il seguente metodo che usa le coordinate cartesiane: A meno di una rotazione e una traslazione possiamo sempre supporre che  $O$  sia l’origine degli assi e che l’equazione della retta sia  $x = x_0$  con  $x_0 \neq 0$  che rappresenta la distanza di  $\mathbf{r}$  da  $O$ . Dato un punto generico  $(x, y)$  di  $\mathbf{r}$ , poniamo  $(\xi(y), \eta(y)) := \Im\mathfrak{n}(x_0, y)$ ; si ha

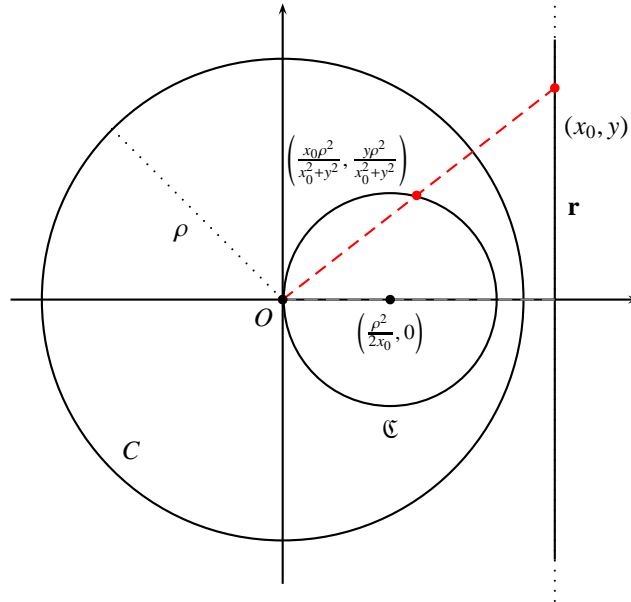
$$(\xi(y), \eta(y)) = \Im\mathfrak{n}(x_0, y) = \left( \frac{x_0 \rho^2}{x_0^2 + y^2}, \frac{y \rho^2}{x_0^2 + y^2} \right).$$

Dal sistema

$$\begin{cases} \xi = \frac{x_0 \rho^2}{x_0^2 + y^2}, \\ \eta = \frac{y \rho^2}{x_0^2 + y^2}, \end{cases}$$

si ottiene  $y = \frac{\eta \rho}{\xi} x_0$  (ricordiamo che  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ ) da cui, sostituendo nella seconda e dividendo per  $\eta$ , segue  $\xi^2 + \eta^2 = \frac{\xi \rho^2}{x_0}$ . Quest’ultima la riconosciamo come l’equazione di una circonferenza con centro in  $(\frac{\rho^2}{2x_0}, 0)$  e raggio  $\frac{\rho^2}{2x_0}$ . Chiamiamo  $\mathcal{C}$  questa circonferenza. Avremo che  $\Im\mathfrak{n}(\mathbf{r}) = \mathcal{C} \setminus \{O\}$ . Se astraiamo dal sistema di coordinate, possiamo dire che l’immagine mediante  $\Im\mathfrak{n}$  di una retta a distanza  $d > 0$  da  $O$  è una circonferenza passante per  $O$  (a cui va tolto proprio  $O$ ) di raggio  $\frac{\rho}{2d}$  il cui centro giace sulla semiretta con origine in  $O$  ortogonale alla retta  $r$ .

Vista l'involuntività della trasformazione avremo inoltre che l'immagine di una circonferenza contenente l'origine (tolta l'origine stessa) di raggio  $\sigma$  è una retta distante  $\frac{\rho^2}{2\sigma}$  da  $O$  e ortogonale alla semiretta con origine in  $O$  attraverso il centro della circonferenza.



Corrispondenza tra  $r$  e  $\mathcal{C}$ .

Notiamo che se la retta  $r$  è incidente con  $C$  allora anche  $\mathcal{C}$  lo è. Un caso particolare interessante si ha per  $r$  tangente a  $C$ . Se questo succede allora  $\mathcal{C}$  ha raggio  $\rho/2$  ed è anche essa tangente a  $C$  (dall'interno) nello stesso punto di  $r$ .

**Osservazione 1.4.1.** Notiamo che “ $\exists$ ” fa corrispondere circonferenze non passanti per l'origine a circonferenze (con la stessa proprietà). Per vederlo, con il consueto cambiamento di coordinate portiamo il centro di  $C$  nell'origine e quello della circonferenza da trasformare  $\mathcal{C}$  nel semiasse positivo delle ascisse. In questo modo, posto  $r$  il raggio di  $\mathcal{C}$  e  $(d, 0)$  il suo centro, possiamo dare la seguente rappresentazione parametrica di  $\mathcal{C}$ :

$$t \mapsto (d + r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Dalle formule (1.1) allora segue che l'immagine di  $\mathcal{C}$  è parametrizzata da

$$t \mapsto \left( \frac{\rho^2 r \cos t + d}{r^2 (\sin t)^2 + (r \cos t + d)^2}, \frac{\rho^2 r \sin t}{r^2 (\sin t)^2 + (r \cos t + d)^2} \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Con qualche calcolo, è possibile vedere che questa è una parametrizzazione di una circonferenza con,

$$\text{centro: } \left( \frac{\rho^2 d}{d^2 - r^2}, 0 \right), \quad \text{raggio: } \frac{r \rho^2}{|d^2 - r^2|}.$$

(Si noti che  $d \neq s$  perché abbiamo supposto che  $\mathcal{C}$  non passa per l'origine.) Infatti,

$$\left( \frac{\rho^2(r \cos t + d)}{r^2(\sin t)^2 + (r \cos t + d)^2} - \frac{\rho^2 d}{d^2 - r^2} \right)^2 + \frac{\rho^4 r^2 (\sin t)^2}{(r^2(\sin t)^2 + (r \cos t + d)^2)^2} = \frac{\rho^4 r^2}{r^4 - 2d^2 r^2 + d^4}.$$

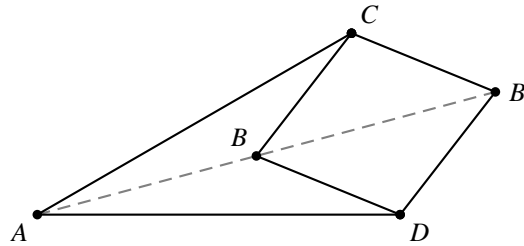
Non è difficile poi osservare che se  $r < d$ , “ $\Im$ ” inverte, per così dire, il verso di percorrenza della circonferenza nel senso che, se  $\mathcal{C}$  è percorsa in senso antiorario,  $\Im(\mathcal{C})$  lo è in senso orario.

Il caso in cui  $d = 0$  è banale ed è lasciato al lettore.

Notiamo che se la circonferenza  $\mathcal{C}$  interseca  $C$  la retta immagine è facile da determinare geometricamente: è quella che passa per i punti di intersezione (visto che devono essere punti fissi).

### 1.4.2 Inversore di Peaucellier–Lipkin

Consideriamo un sistema articolato formato da sei aste (impennate nei vertici comuni); due lunghe  $AC$  e  $AD$  di uguale lunghezza, e quattro corte  $BC$ ,  $B'C$ ,  $BD$  e  $B'D$  anch'esse di uguale lunghezza.



Is sistema descritto. È facile verificare che i punti  $A$ ,  $B$  e  $B'$  sono allineati.

Il corrispondente meccanismo fu inventato nel 1864 da Peaucellier<sup>3</sup> e Lipkin<sup>4</sup>, allo scopo di realizzare il movimento rettilineo senza ricorrere a guide. Il motivo per cui questo è possibile è che, come vedremo subito sotto, i punti  $B$  e  $B'$  sono l'uno l'inverso dell'altro rispetto ad una circonferenza di centro  $A$  e raggio opportuno. Quindi per realizzare il movimento lineare è sufficiente far muovere  $B$  lungo un arco di una circonferenza contenente  $A$ .

Si ha infatti il seguente risultato:

**Teorema 1.4.2.** *Vale la relazione*

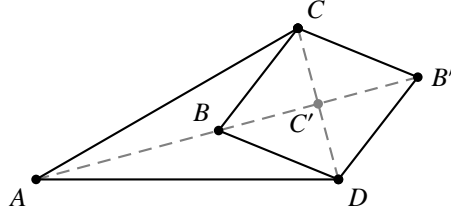
$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB'}. \quad (1.2)$$

Quindi  $B$  e  $B'$  sono inversi rispetto ad una circonferenza di centro  $A$  e raggio  $\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}$ .

<sup>3</sup>Charles-Nicolas Peaucellier, 1832–1913

<sup>4</sup>Yom Tov Lipman Lipkin, 1846–1876

*Dimostrazione.* Sia  $C'$  il punto di intersezione dei segmenti  $CD$  e  $BB'$ . Questi, essendo le diagonali di un rombo si bisecano vicendevolmente.



Quindi  $\overline{BC'} = \overline{B'C'}$ , da cui segue

$$\overline{BC'} = \frac{1}{2}\overline{BB'} = \frac{1}{2}(\overline{AB'} - \overline{AB}). \quad (1.3)$$

Per il teorema di Pitagora applicato ai triangoli  $ACC'$  e  $BCC'$ , si ha

$$\overline{AC}^2 - (\overline{AB} + \overline{BC'})^2 = \overline{CC'}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BC'}^2,$$

da cui

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - 2\overline{ABBC'} = \overline{BC}^2.$$

Usando la (1.3) riscriviamo questa equazione come segue:

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AB}(\overline{AB'} - \overline{AB}) = \overline{BC}^2.$$

Semplificando si ottiene la (1.2).

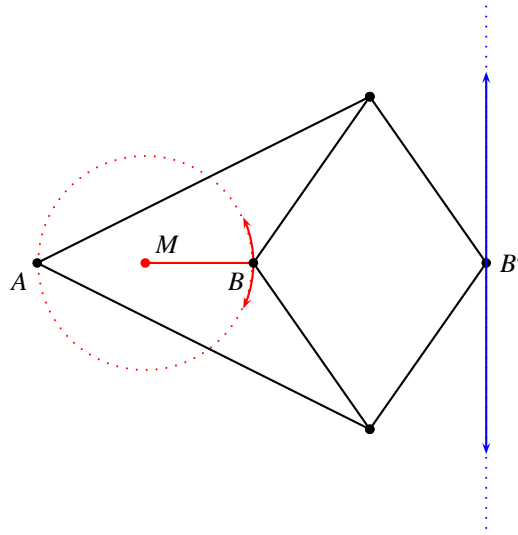
L'ultima affermazione segue subito dalla costruzione e dal fatto che

$$\overline{AB'} = \frac{\rho^2}{\overline{AB}},$$

dove  $\rho = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}$ . □

Usando quanto discusso nel paragrafo 1.4.1, otteniamo che, facendo muovere  $B$  lungo un arco di una circonferenza passante per  $A$ ,  $B'$  si sposta lungo un segmento ortogonale alla retta congiungente  $A$  con il centro di questo cerchio.

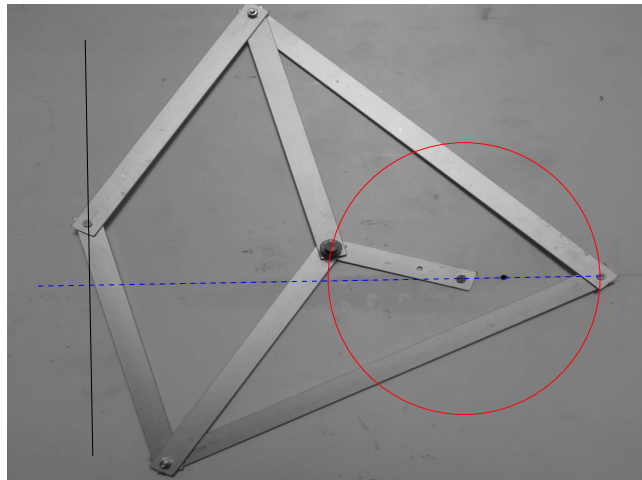




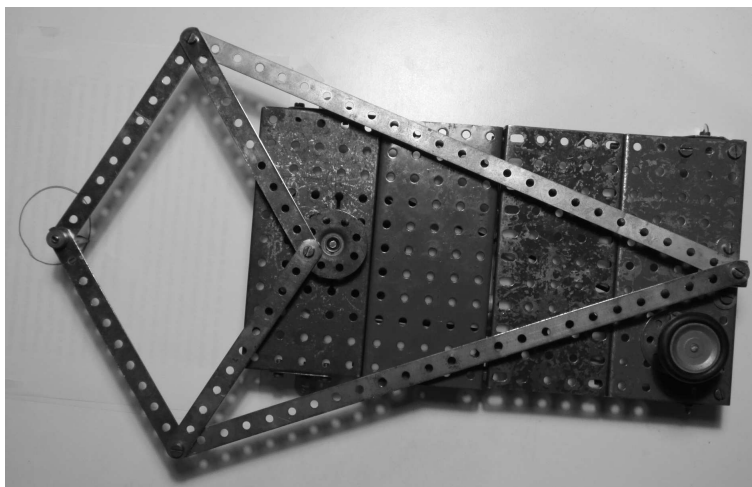
Questo può realizzarsi operativamente fissando un punto  $M$  a distanza  $\ell \geq \overline{AC} - \overline{BC}$  da  $A$  ed impernando un'asta di lunghezza  $\ell$  in  $M$  e  $B$ . Ruotando quest'ultima intorno a  $M$  facciamo sì che  $B'$  descriva un segmento. Tale rotazione, naturalmente è possibile solo per un'angolo limitato. La lunghezza massima del segmento ottenibile si può calcolare con una semplice applicazione del teorema di Pitagora. Per farlo conviene porre  $a = \overline{AC}$  e  $b = \overline{BC}$ , in questo modo  $a$ ,  $b$  e  $\ell$  sono i parametri "costruttivi" che determinano le capacità del meccanismo.

Dal teorema 1.4.2 segue che la minima distanza di  $A$  dal segmento è  $\frac{1}{2\ell} \sqrt{a^2 - b^2}$ . La massima distanza da  $A$  raggiungibile si ha quando le aste  $AC$  e  $CB'$  sono allineate, quindi vale  $a + b$ . Allora, la lunghezza cercata vale

$$\frac{a+b}{\ell} \sqrt{4\ell^2 + 2ab - a^2 - b^2}.$$



Inversore che realizza un movimento rettilineo.



Inversore che illustra l'osservazione 1.4.1

Il materiale presentato in questa lezione è basato sui due libri fortemente orientati alla didattica che sono segnalati sotto:

---

### Riferimenti ed approfondimenti

- ✓ M. G. Bartolini Bussi, M. Maschietto. *Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola*. Springer 2006, Milano, Italia.
- ✓ H. M. Cundy, A. P. Rollett. *Mathematical Models 3rd edition*. Tarquin Publications 1981, Ipswich, Gran Bretagna.

## Lezione 2

# Taglio della pizza, mappe e grafi piani: un'introduzione al principio d'induzione matematica

Il principio di induzione matematica è uno dei concetti fondamentali della matematica, in particolare di quella detta *discreta*. In effetti si tratta di un enunciato che riguarda i numeri naturali. Con il termine *induzione*, in generale, si intende un ragionamento che da un'affermazione particolare porta al caso generale. L'*induzione matematica*, nella sua essenza, è uno speciale metodo dimostrativo che a partire da un'osservazione particolare (la *base* d'induzione) riguardante un certo numero  $n_0$  e dalla dimostrazione di un certo enunciato (il *passo* d'induzione) permette di stabilire la validità generale di una legge per tutti gli interi  $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$ .

Applicheremo questo criterio ed altri ragionamenti qualitativi allo studio della possibilità o impossibilità di concludere alcune procedure.

### 2.1 Induzione matematica e taglio della pizza

Il principio d'induzione matematica si potrebbe formalizzare nel modo seguente:

Sia  $P$  una proposizione e  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Supponiamo che:

1. [**base d'induzione**]  $P(n_0)$  è vera;
2. [**passo d'induzione**] tutte le volte che  $P(n)$  è vera allora  $P(n + 1)$  lo è.

Allora  $P(k)$  è vera per ogni  $k \geq n_0$ .

In questo schema,  $P(n)$  è detta *ipotesi induttiva*.

Per capire quanti scritto sopra basti pensare che se la base d'induzione è vera, allora il passo di induzione (la cui validità è ovviamente è da provare!) implica che  $P(n_0 + 1)$  è vera. Ripetendo il

ragionamento si ottiene che  $P(n_0 + 2)$  lo è, lo stesso argomento prova la validità di  $P(n_0 + 3)$  e così via...

Questo ragionamento fa pensare a quelle file di tessere del domino disposte in modo tale che la caduta di una provoca quella delle successive. Si immagini di averle numerate a partire da 1 e di poter dimostrare il seguente passo d'induzione: "se cade la tessera  $n$ -sima allora cade la  $(n + 1)$ -sima". Se questo è vero, allora la caduta della tessera numero 1 provoca la caduta di tutte le altre.

Per usare il principio di induzione per dimostrare una proposizione  $P$  si procede in questo modo: si *verifica* la verità di  $P(n_0)$ , cioè della base d'induzione (valor tipici di  $n_0$  sono 0 o 1) e poi si *dimostra* la validità del passo d'induzione. È da notare che il principio d'induzione può permettere di dimostrare la verità di alcune proposizioni ma non è di aiuto per *scoprirle*.

**Esempio 2.1.1.** Calcolare la somma dei primi  $n$  numeri naturali dispari (a partire da 1).

Per prima cosa cerchiamo di scoprire quale è la formula da dimostrare. Poniamo

$$s(n) = 1 + 3 + \dots + (2n - 1),$$

e cerchiamo una formula per rappresentare  $s(n)$ . Iniziamo con alcuni valori particolari:

$$\begin{aligned} s(1) &= 1, \\ s(2) &= 1 + 3 = 4, \\ s(3) &= 1 + 3 + 5 = 9, \\ s(4) &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16, \\ &\dots \end{aligned}$$

Guardando questi valori facciamo l'ipotesi che  $s(n) = n^2$ . Per stabilire se questa ipotesi è vera applichiamo il principio d'induzione. La base è ovviamente vera: prendiamo  $n_0 = 1$  e osserviamo che come appena verificato si ha  $s(1) = 1^2 = 1$ . Dimostriamo la validità del passo d'induzione: supponiamo che per qualche  $n$  si abbia  $s(n) = n^2$  e verifichiamo che  $s(n + 1) = (n + 1)^2$ . Infatti,

$$s(n + 1) = 1 + 3 + \dots + (2(n + 1) - 1) = s(n) + (2(n + 1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Che dimostra il passo d'induzione. Il fatto che  $s(n) = n^2$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  segue allora dal principio d'induzione.

**Esempio 2.1.2.** Calcolare la somma dei primi  $n$  numeri naturali (a partire da 1). Poniamo  $\sigma(n) = 1 + 2 + \dots + n$ .

Stavolta indovinare la formula è un po' più complicato. Per farlo scriviamo due volte i numeri da 1 a  $n$  su due file in direzioni opposte. Così:

1	2	3	4	...	$n$
$n$	$n - 1$	$n - 2$	$n - 3$	...	1

Se sommiamo le colonne otteniamo una costante:  $n + 1$ . Siccome ci sono  $n$  colonne otteniamo che il doppio della somma dei primi  $n$  numeri vale  $n(n + 1)$ . Certamente questa non è una dimostrazione,

ma potremmo anche farla diventare tale, basterebbe dimostrare che la somma di ogni colonna è  $n + 1$  qualunque sia  $n$ . Preferiamo però usare il principio d'induzione per provare che

$$\sigma(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La base d'induzione è facile: una verifica immediata ci dice che  $1 = \sigma(1) = \frac{1 \cdot 2}{2}$ . Per dimostrare il passo d'induzione osserviamo che se per qualche  $n$  si ha  $\sigma(n) = n(n+1)/2$ , allora

$$\sigma(n+1) = 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \sigma(n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

È conveniente, per quanto faremo in seguito, porre  $\sigma(0) = 0$ .

Notiamo che negli esempi 2.1.1 e 2.1.2 si sono di fatto ottenute le formule

$$s(n+1) = s(n) + 2n + 1, \quad \text{e} \quad \sigma(n+1) = \sigma(n) + n + 1.$$

queste formule, assieme alle rispettive “condizioni iniziali”  $s(1) = 1$  e  $\sigma(1) = 1$  determinano  $s(n)$  e  $\sigma(n)$  per ogni valore di  $n$ , rispettivamente. Infatti usando, per esempio, la prima assieme alla condizione  $s(1) = 1$  si ottiene  $s(2) = 4$  da cui, con un'ulteriore applicazione della relazione, si ottiene  $s(3) = 9$  e così via. Le successioni che vengono costruite con regole di questo tipo si dicono definite *per ricorrenza*. Un esempio famoso un po' più elaborato è la successione di Fibonacci<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} F(n) = F(n-1) + F(n-2), & n > 2, \\ F(1) = 1, & F(2) = 1. \end{cases}$$

Spesso, la forma della ricorrenza consente di trovare una formula “chiusa” (cioè soltanto in termini di  $n$ ) per l'elemento generale della successione. Parleremo di successioni definite per ricorrenza in una prossima lezione.

**Esercizio 2.1.3.** Dimostrare che la somma dei quadrati dei primi  $n$  numeri naturali (a partire da 1) è data da  $n(n+1)(2n+1)/6$ .

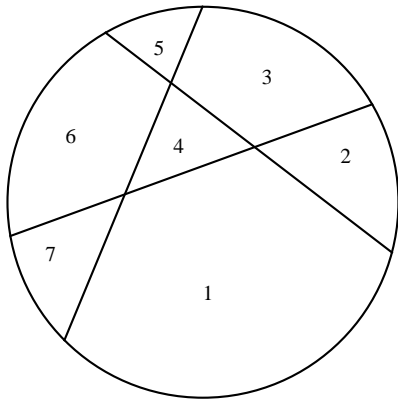
**Esercizio 2.1.4.** Dimostrare che la somma dei cubi dei primi  $n$  numeri naturali (a partire da 1) è data da  $n^2(n+1)^2/4$ .

### 2.1.1 Porzioni di pizza

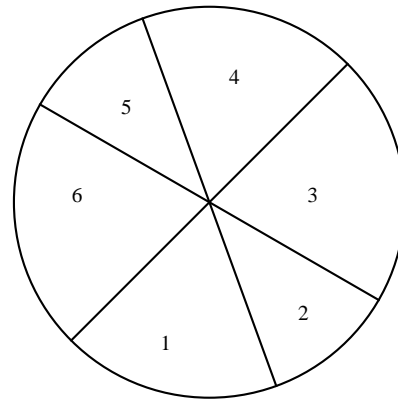
Consideriamo il problema di determinare il numero massimo di porzioni che si possono ricavare da una pizza facendovi dei tagli dritti. Per porre il problema su basi ragionevoli dobbiamo avere un modello matematico della nostra pizza e di che cosa siano i tagli. Notiamo che non ci interessa (almeno per il momento) che le porzioni siano in qualche senso “uguali”. Quello che vogliamo fare è scegliere i tagli in modo da massimizzare il numero delle porzioni.

Come modello della pizza consideriamo un disco  $D$  di raggio unitario e come tagli prendiamo le corde della circonferenza che delimita il disco. Le “porzioni” dopo gli  $n$  tagli  $c_1, \dots, c_m$  saranno allora le regioni che compongono  $D \setminus (c_1 \cup \dots \cup c_n)$ .

<sup>1</sup>Leonardo Pisano detto il Fibonacci, 1170–1240



Ottimale: 3 tagli generano 7 porzioni

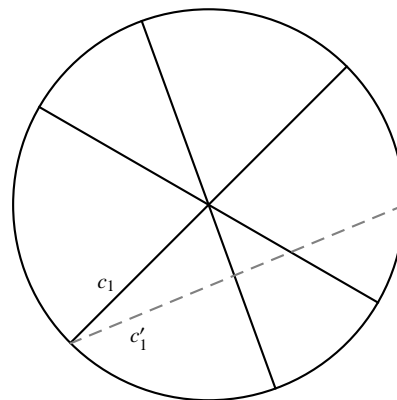
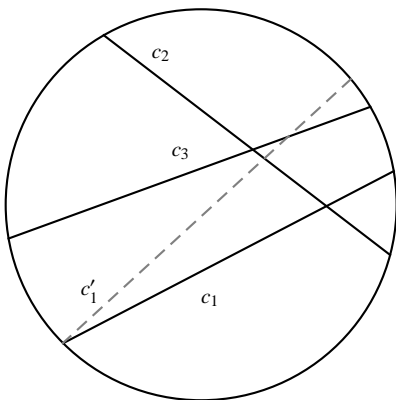


Sub-ottimale: 3 tagli generano 6 porzioni

Ogni taglio divide in due ogni regione (porzione) incontrata. Quindi per generare il massimo possibile numero di porzioni si deve, ad ogni taglio successivo, cercare di intersecare il massimo numero possibile di regioni preesistenti. È facile convincersi che vale il seguente principio di ottimalità:

*Il numero delle porzioni ottenute è massimo quando ogni taglio incontra ogni altro taglio all'interno della pizza ma non esistono tre tagli che si intersecano nello stesso punto.*

Infatti, supponiamo per assurdo che esista una configurazione ottimale in cui uno dei tagli, diciamo  $c_1$ , non incontra (internamente alla pizza) tutti gli altri tagli oppure passa per un punto di intersezione comune ad (almeno) altri due tagli. In entrambi i casi si può trovare una perturbazione  $c'_1$  di  $c_1$ , che incontra almeno una porzione in più (questo si può fare perché c'è soltanto un numero finito di tagli). Allora  $c'_1$  genera almeno una porzione in più rispetto a  $c_1$ , contraddicendo l'ottimalità della configurazione.



Configurazioni sub-ottimali che si possono rendere ottimali modificando un taglio

Vogliamo calcolare il numero massimo di porzioni ottenibili. Per farlo, usiamo un argomento di ricorrenza. Chiamiamo  $P(n)$  il numero massimo di porzioni ottenibili con  $n$  tagli. Chiaramente

$P(0) = 1$ , infatti se non facciamo tagli abbiamo un'unica porzione: tutta la pizza. Supponiamo ora di conoscere  $P(n-1)$  e pratichiamo l' $n$ -simo taglio secondo il principio di massimalità enunciato sopra in modo da formare  $P(n)$  porzioni. Ogni volta che l'ultimo taglio incontra una porzione la divide in due. Le regioni spezzate sono allora  $n$ : una per ogni taglio incontrato (cioè  $n-1$ ) più quella dal cui bordo (della pizza) siamo partiti per fare il taglio. Si ha quindi la seguente relazione per ricorrenza:

$$\begin{cases} P(0) = 1, \\ P(n) = P(n-1) + n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

o, se preferiamo,

$$\begin{cases} P(0) = 1, \\ P(n+1) = P(n) + n + 1, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Se confrontiamo con la successione  $\sigma(n)$  dell'esempio 2.1.2 vediamo che,

$$\begin{cases} P(0) - \sigma(0) = 1, \\ P(n+1) - \sigma(n+1) = P(n) + n + 1 - (\sigma(n) + n + 1) = P(n) - \sigma(n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Allora, posto  $\mathcal{S}(n) = P(n) - \sigma(n)$  per ogni  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , si ha che  $\mathcal{S}$  soddisfa la seguente relazione per ricorrenza:

$$\begin{cases} \mathcal{S}(0) = 1, \\ \mathcal{S}(n+1) = \mathcal{S}(n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

È un semplice esercizio mostrare per induzione che  $\mathcal{S}(n) = 1$  costantemente. Allora, per l'esempio 2.1.2 abbiamo

$$P(n) = \sigma(n) + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2},$$

che è la formula cercata.

## 2.1.2 Un approccio combinatorio

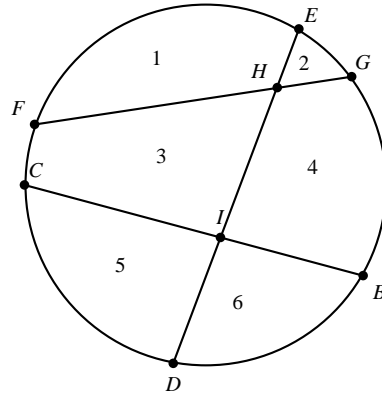
Mettiamo da parte solo per un attimo il problema del massimo numero di porzioni e cerchiamo un legame tra il numero dei tagli, quello delle intersezioni dei tagli (all'interno della pizza) e il numero di porzioni ottenute. A questo scopo tralasciamo, per il momento, la richiesta che ogni taglio intersechi tutti gli altri ma manteniamo quella che non vi siano tre (o più) tagli che si incontrano in un punto interno e che due tagli non si incontrino mai in nessun punto del bordo.

Immaginiamo di appendere la nostra pizza in verticale (una cosa da non fare con una pizza vera!) in modo tale che nessuno dei tagli sia orizzontale (questo si può sempre fare perché i tagli sono in numero finito), e di associare ad ogni porzione il suo vertice più alto (un vertice, per noi, è un punto di intersezione tra due tagli o di un taglio con il bordo della pizza). Notiamo che il fatto che nessun taglio sia orizzontale fa sì che ogni porzione abbia un unico vertice più alto.

Per esempio, le regioni sono associate ai vertici secondo la seguente tabella:

<b>porzione numero</b>	1	2	3	4	5	6
<b>vertice associato</b>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>H</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>I</i>

nella figura sottostante



Ogni taglio determina due vertici sul bordo. Quello dei due che si trova più in alto lo chiameremo *superiore*. Nella figura, per esempio,  $E$ ,  $G$  e  $C$  sono vertici superiori.

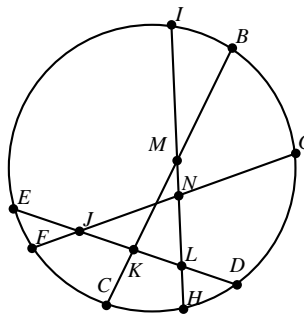
Un attimo di riflessione ci convincerà che ogni vertice interno è associato con esattamente una sola porzione e che ogni vertice superiore del bordo è anch'esso associato ad un'unica porzione con l'unica eccezione di quello che si trova più in alto di tutti ( $E$  in figura) che è associato con due porzioni. Chiaramente, il numero dei vertici superiori sul bordo è uguale al numero  $n$  dei tagli allora, posto  $v(n)$  il numero dei vertici interni e  $\mathcal{P}(n)$  il numero di porzioni ritagliate si ha:

$$\mathcal{P}(n) = 1 + n + v(n). \quad (2.1)$$

Infatti, una porzione è associata ad ognuno dei  $v(n)$  vertici interni e  $1 + n$  è il numero di porzioni associate ai vertici superiori sul bordo (che sono  $n$  come il numero di tagli); l'addendo 1 è conseguenza del fatto che al vertice più alto di tutti sono associate due porzioni.

Notiamo che  $\mathcal{P}(n)$  non è necessariamente il numero massimo di porzioni ottenibili con  $n$  tagli (abbiamo scelto anche un simbolo diverso), infatti abbiamo lasciato cadere alcune ipotesi fondamentali. L'identità (2.1) rappresenta un legame più generale tra le porzioni, i tagli e i vertici interni.

Si veda, per esercizio che cosa diventa la (2.1) per la seguente configurazione ottimale con 4 tagli:





La (2.1) ci dice che per massimizzare  $\mathcal{P}(n)$  (cioè per ottenere  $P(n)$ ) si deve massimizzare  $v(n)$ . Questo accade, ovviamente, quando si impone il principio di ottimalità. Se lo facciamo, il numero  $v(n)$  è dato dal numero di possibili coppie di tagli. Infatti, il principio di ottimalità implica che ogni coppia di tagli si incontra in un punto interno. Il numero di coppie di tagli è dato dall'espressione  $\binom{n}{2}$ , il numero di tagli lo possiamo scrivere, invece, come  $\binom{n}{1}$ , e dal momento che  $1 = \binom{n}{0}$ , si ha

$$P(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}. \quad (2.2)$$

Convienne, a questo punto, fare una breve digressione sul significato dell'espressione  $\binom{n}{k}$  dove  $n \geq k \geq 0$  sono numeri interi. Questo simbolo rappresenta in quanti modi si possono estrarre  $k$  elementi da un insieme di  $n$  oggetti *senza guardare all'ordine in cui si compie questa operazione*. Si può facilmente trovare un'espressione analitica per  $\binom{n}{k}$ . Per farlo calcoliamo per prima cosa quante  $k$ -ple (quindi tenendo conto dell'ordine) si possono estrarre da un insieme di  $n$  elementi: basta immaginare di riempire  $k$  caselline, numerate da 1 fino a  $k$ , disposte su una fila ordinata. Ci sono  $n$  modi per riempire la prima,  $n - 1$  modi per riempire la seconda,  $n - 2$  la terza e così via fino alla  $k$ -sima che può essere riempita in  $n - k + 1$  maniere. Quindi questa operazione può essere compiuta in

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

modi. Qui  $n!$  denota il *fattoriale*<sup>2</sup> di  $n$ . Il numero appena ottenuto tiene conto dell'ordine in cui riempiamo le caselline, se non vogliamo tenere conto di quest'ordine dobbiamo dividere per il numero di possibili ordinamenti di  $k$  oggetti. Un ragionamento del tutto analogo ci dice che quest'ultimo numero è  $k!$ . Infatti, scelti  $k$  oggetti, li vogliamo disporre in  $k$  caselline. Per riempire la prima abbiamo  $k$  modi,  $k - 1$  per la seconda e così via fino alla  $k$ -sima per cui abbiamo un solo modo; cioè abbiamo

$$k \cdot (k - 1) \cdots 2 \cdot 1 = k!$$

maniere per completare questa operazione. In definitiva,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Allora si ha

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Sostituendo in (2.2), si ottiene ancora una volta

$$P(n) = 1 + n + \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

<sup>2</sup>Si può definire per ricorrenza con la seguente regola:

$$0! := 1, \quad (n + 1)! := (n + 1) \cdot n! \quad \text{per } n \geq 0.$$

La formula (2.2) ci suggerisce anche come la formula per il numero massimo di porzioni potrebbe estendersi a dimensione superiore. Per esempio è ragionevole supporre che il massimo numero di porzioni ottenibili affettando un melone (con  $n$  piani) sia

$$M(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

In effetti si potrebbe provare che questa è davvero la formula giusta, ma il dimostrarlo ci porterebbe troppo lontano.

### 2.1.3 Affettare il piano con rette: il problema di Steiner

Consideriamo il seguente problema di Steiner<sup>3</sup>:

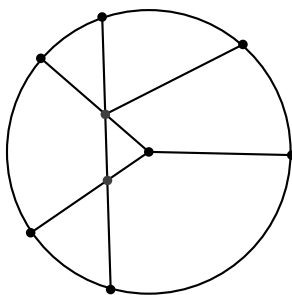
Quale è il massimo numero di regioni ritagliabili nel piano con  $n$  rette?

Ovviamente, come nel caso del taglio della pizza, in una configurazione ottimale ogni taglio deve intersecare tutte gli altri e non ci devono essere punti da cui passano tre tagli. È chiaro che alcune regioni saranno illimitate.

È anche facile vedere che questo problema è equivalente a quello del taglio della pizza. Infatti, data una configurazione ottimale per quest'ultimo, prolungando i tagli in linea retta all'infinito e rimuovendo i bordi della pizza otteniamo una configurazione ottimale per il problema di Steiner. Viceversa, data una configurazione ottimale per il problema di Steiner, possiamo scegliere un disco (una pizza) così grande da contenere tutte le intersezioni dei tagli nel suo interno. Una riduzione in scala ci fornisce una configurazione ottimale per il problema del taglio della pizza.

## 2.2 Mappe e grafi piani

Vogliamo considerare metodi di taglio più generali, permettendo sia tagli che non attraversano completamente la pizza, sia un numero arbitrario di intersezioni attraverso uno stesso punto. Ad esempio:



<sup>3</sup>Jakob Steiner, 1796–1863.

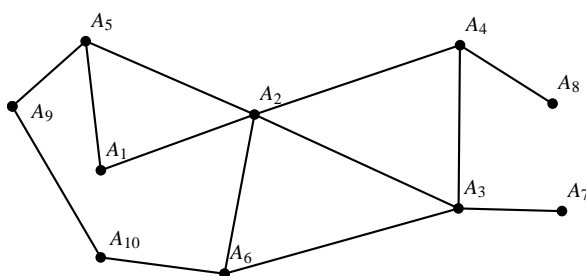
Posto  $v$  il numero di vertici (intersezioni tra tagli o tra tagli e bordo della pizza)  $p$  il numero di porzioni e  $b$  il numero (totale) dei tratti costituenti i bordi delle porzioni (pezzi di tagli e archi appartenenti al bordo della pizza), dimostreremo che

$$v - b + p = 1. \quad (2.3)$$

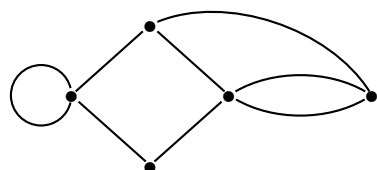
Nella figura sopra  $v = 9$ ,  $b = 15$  e  $p = 7$ .

La formula (2.3) sarà dedotta da un teorema di Eulero<sup>4</sup> riguardante le mappe piane connesse, che dimostreremo per induzione.

Consideriamo un insieme non vuoto di punti del piano  $A_1, \dots, A_v$ , detti *vertici*, ed un complesso di linee dette *archi* che collegano alcune coppie di vertici diversi e che, a due a due, non abbiano altri punti a comune. Il complesso di linee è detto *mappa*, e se è possibile muoversi da ogni vertice a qualunque altro lungo gli archi, la mappa è detta *connessa*. Denotiamo con  $a$  il numero degli archi e con  $r$  il numero delle regioni che sono delimitate da archi (compresa la parte illimitata del piano). Per esempio,



è una mappa piana connessa con  $v = 10$ ,  $a = 13$  e  $r = 5$ . In questo esempio abbiamo disegnato gli archi come segmenti, ma avremmo potuto usare un qualunque arco di curva. Potremmo pensare a questa mappa come una specie di carta dei sentieri che unisce le località  $A_1, \dots, A_{10}$  (paesi, luoghi d'interesse o semplicemente incroci). Come nelle mappe reali sono possibili archi che ritornano al punto di partenza e più di un arco che collega gli stessi punti. Per esempio,



$$v = 5, a = 8, r = 5.$$

Si osservi che in entrambi gli esempi  $v - a + r = 2$ . Questo è un fatto del tutto generale, come mostrato dal seguente

**Teorema 2.2.1** (di Eulero). *Per una mappa connessa piana si ha,*

$$v - a + r = 2. \quad (2.4)$$

<sup>4</sup>Leonhard Euler, 1707–1783.

Prima di impegnarci nella dimostrazione di questo teorema, osserviamo che la (2.4) implica la (2.3). Infatti, in una configurazione generica di tagli della pizza, consideriamo tutti i bordi delle porzioni come archi che congiungono i vertici, quindi  $b = a$  e osserviamo che il numero delle regioni è  $r = p + 1$  perchè tra queste è compresa la regione illimitata che non è una porzione. Dunque,  $2 = v - a + r = v - b + p + 1$  da cui segue la (2.3). Notiamo inoltre che i tagli che facciamo nella pizza non devono necessariamente essere dritti perchè la (2.3) funzioni, basta che vertici, tagli e bordi della pizza formino una mappa piana.

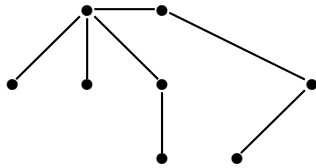
*Dimostrazione del teorema 2.2.1.* Procediamo per induzione sul numero  $a$  degli archi. Verifichiamo come prima cosa che la formula (2.4) è vera per  $a = 0$  (base d'induzione). In questo caso, infatti,  $v = 1$  (c'è sempre almeno un vertice ma non più di uno per la connessione) e  $r = 1$  (c'è solo la regione illimitata). Quindi  $v - a + r = 1 - 0 + 1 = 2$  e la base d'induzione è verificata.

Dimostriamo ora che se la (2.4) è vera per  $a = n > 0$  archi allora lo è per  $a = n + 1$  (passo d'induzione). Consideriamo una qualunque mappa piana connessa avente  $a = n + 1$ . Ci sono solo due possibilità:

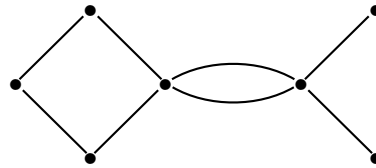
**Caso 1.** *Comunque presi due vertici, esiste un solo cammino che li congiunge lungo gli archi* (un tale cammino esiste sempre per la connessione). In questo caso, non esiste nessun cammino chiuso e quindi  $r = 1$ . Affermiamo che in questo caso esiste almeno un vertice che è estremo di un solo arco. Per provare quest'affermazione partiamo da un vertice arbitrario  $A$ . Se  $A$  ha la proprietà cercata abbiamo finito, altrimenti spostiamoci lungo uno degli archi che hanno  $A$  come estremo e ripetiamo il ragionamento senza però usare più gli archi percorsi. Dal momento che non ci sono cammini chiusi, non torneremo mai al punto di partenza. Inoltre, visto che c'è solo un numero finito di vertici la procedura deve terminare, ma può farlo solo se il vertice finale  $W$  ha la proprietà cercata. Consideriamo ora la mappa "ridotta" ottenuta eliminando da quella di partenza  $W$  con l'unico arco che ha  $W$  per estremo. La nuova mappa ridotta ha  $a' = n = a - 1$ ,  $v' = v - 1$  e  $r' = 1 = r$  (non abbiamo racchiuso nuove regioni). Quindi, siccome stiamo supponendo che (2.4) sia vera per  $a = n$ , abbiamo

$$2 = v' - a' + r' = v - 1 - (a - 1) + r = v - a + r,$$

come volevasi dimostrare.



Mappa nel caso 1.



Mappa nel caso 2.

**Caso 2.** *Esistono due vertici collegati per mezzo di più di un cammino.* In questo caso la mappa contiene un cammino chiuso che passa attraverso questi vertici. Consideriamo la mappa ridotta ottenuta eliminando uno degli archi che compongono questo cammino (senza eliminare i vertici). Chiaramente, questa eliminazione non sconnette la mappa e per la nuova mappa si ha  $v' = v$ ,  $a' = n = a - 1$  e  $r' = r - 1$ . Quindi, siccome come sopra stiamo supponendo che (2.4) sia vera per

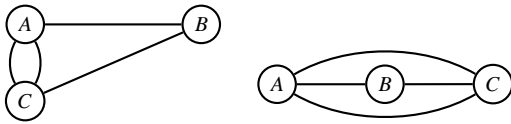
$a = n$ , abbiamo

$$2 = v' - a' + r' = v - (a - 1) + r - 1 = v - a + r,$$

come volevasi dimostrare.  $\square$

La nozione di *grafo* è un'astrazione di quella di mappa. Si potrebbe definire un grafo, in modo molto astratto, come una coppia  $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$  dove  $\mathcal{V}$  è un insieme di oggetti, detti vertici, e  $\mathcal{A}$  è un altro insieme di oggetti, che chiamiamo archi, ognuno dei quali è associato ad una sola coppia di vertici (non necessariamente distinti). Si dice che l'arco è *incidente* con questi punti. Osserviamo che più di un arco può essere incidente con la stessa coppia di oggetti. Due vertici  $w_1, w_2 \in \mathcal{V}$  si dicono connessi se esiste una famiglia finita di archi  $(\alpha_i)_{i=0}^m \subseteq \mathcal{A}$  associati a coppie  $(v_{i-1}, v_i)$  tale che  $v_0 = w_1$  e  $v_m = w_2$ . Una tale successione di archi si chiama *percorso* o *cammino* da  $w_1$  a  $w_2$ . Un grafo si dice *connesso* se, comunque data una coppia di vertici, esiste un percorso tra di loro. Un arco associato ad una coppia di vertici uguali è detto *cappio*. Se due o più archi uniscono la stessa coppia di vertici, questi sono detti *archi multipli*. In questo caso il grafo è detto *multigrafo*. Un grafo che non abbia cappi o archi multipli è detto *semplice*.

Come dicevamo, un grafo è un'astrazione. Rispetto alla nozione di mappa, per esempio, si perde completamente l'informazione geometrica. Le due figure seguenti rappresentano lo stesso grafo:



Notiamo che qui abbiamo usato una notazione leggermente diversa: abbiamo disegnato il nome sui vertici, invece di scrivere un'etichetta accanto. Spesso questo tipo di notazione è preferibile per motivi grafici.

Se si perdono informazioni, perché fare un'astrazione? Questa è una questione generale che si pone sempre quando si crea un modello di qualche cosa. Senza addentrarsi nelle profondità di un campo complesso e in qualche misura controverso, che avrebbe bisogno di un'ampia discussione, possiamo dire che un modello nasce per studiare soltanto alcuni aspetti –ritenuti significativi– di un fenomeno e non la sua interezza. Per farlo, deve concentrarsi sulle caratteristiche essenziali (in vista di ciò che si vuole analizzare) tralasciando tutto quello che complica l'analisi. In un certo senso si potrebbe dire che la perdita di alcune informazioni è un bene! Nel caso dei grafi, l'aspetto su cui è posto l'accento è la “connessione” tra i vertici.

Un grafo si dice *piano* se è possibile far corrispondere vertici a punti e archi ad archi di curva (con gli estremi nei punti corrispondenti ai suoi vertici) in modo tale che questi archi di curva si intersechino solo nei loro estremi. Non tutti i grafi sono piani. per quelli che lo sono vale ovviamente la formula (2.4) che, come vedremo, risulta piuttosto utile. I grafi sono usati per modellare una grande quantità di situazioni reali, problemi di trasporto, connessioni, relazioni. . . li studieremo in maggiore dettaglio in una prossima lezione.

Troviamo una condizione necessaria perché un grafo semplice sia piano.

**Teorema 2.2.2.** *Un grafo piano connesso e semplice con  $v \geq 3$  vertici ha al più  $3v - 6$  archi.*

*Dimostrazione.* Se  $v = 3$  ci sono chiaramente non più di 3 archi. Se  $v > 3$ , siano  $F_1, \dots, F_f$  le facce e  $r_1, \dots, r_f$  il numero relativo di archi che le delimitano. Ovviamente  $r_i \geq 3$  per  $i = 1, \dots, f$ .

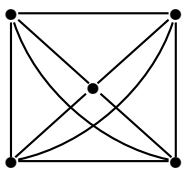
Dunque,  $3f \leq \sum_{i=1}^f r_i$ . Inoltre sommando il numero di archi delimitanti le facce, ogni arco è contato al più 2 volte. Quindi  $\sum_{i=1}^f r_i \leq 2a$ . Dunque  $3f \leq 2a$  e, per la (2.4),  $a = v + f - 2 \leq v + \frac{2}{3}a - 2$  da cui  $a/3 \leq v - 2$  e quindi  $a \leq 3v - 6$  che è quello che si voleva.  $\square$

Consideriamo la seguente questione: “Dato un grafo con  $n$  vertici, quanti archi deve avere affinché per ogni coppia di vertici ci sia almeno un arco incidente con essi? (Un tale grafo è detto completo.) Il problema è puramente combinatorio, Per ogni coppia di vertici vogliamo almeno un arco, le coppie di vertici sono

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Quindi un grafo completo con  $n$  vertici ha almeno  $n(n-1)/2$  archi.

Come esempio di applicazione consideriamo la seguente questione: “È possibile unire 5 punti del piano a due a due con linee che non si intersecano?”. Se fosse possibile farlo il grafo corrispondente sarebbe piano.

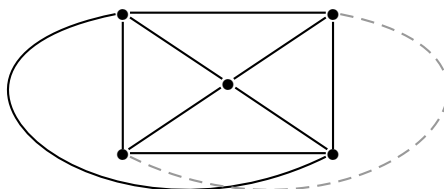


Questo è un grafo, detto  $K_5$  e non una mappa piana. Nota-  
re l'assenza dei punti in grassetto in corrispondenza delle  
intersezioni che non rappresentano vertici.

Il teorema 2.2.2 ci dice subito che non è questo il caso, perché per unire a due a due 5 punti, per la discussione precedente, ci vogliono

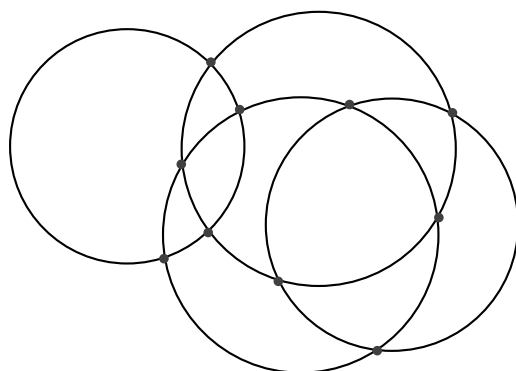
$$10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$$

archi ma  $10 > 3v - 6 = 15 - 6 = 9$  in violazione della condizione del teorema. In pratica, c'è un arco di troppo:



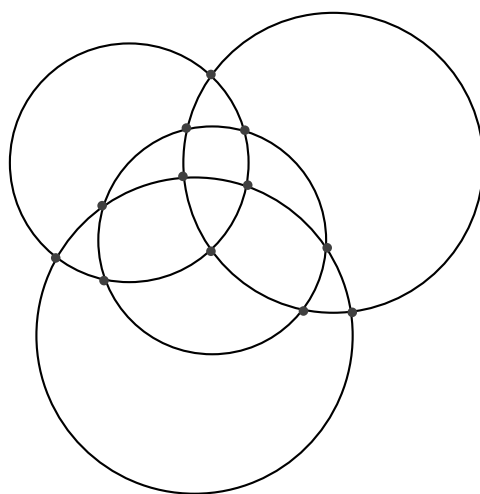
### 2.2.1 Fondi di bicchiere

Sarà capitato a tutti di appoggiare un bicchiere umido su un tavolo e di lasciarci un'impronta circolare anzi, spesso più di una. Ci poniamo il seguente problema: dati  $n$  cerchi anche di diametro diverso (usiamo bicchieri diversi) quante sono al massimo le regioni ritagliate?



Regioni ritagliate da quattro cerchi: 11 limitate e 1 illimitata. La configurazione non è ottimale.

Come nel caso del taglio della pizza, il massimo viene raggiunto quando ogni cerchio interseca tutti gli altri ma non esistono tre cerchi che passano per lo stesso punto. Per  $n = 1$  le regioni sono ovviamente 2, una interna al cerchio ed una esterna. Consideriamo  $n \geq 2$  e supponiamo che l'insieme dei cerchi formi un connesso. Se consideriamo i punti di intersezione dei cerchi come vertici, possiamo vedere la configurazione con  $n$  cerchi come una mappa piana connessa.



Quattro cerchi in configurazione ottimale.

**Esercizio 2.2.3.** Dimostrare per induzione che in una configurazione ottimale con  $n$  cerchi, ogni circonferenza contiene esattamente  $2(n - 1)$  punti di intersezione con le altre.

(Suggerimento: Ogni nuova circonferenza aggiunge 2 nuovi punti di intersezione ad una circonferenza data.)

Siccome ogni circonferenza incontra tutte le altre, su ognuna delle  $n$  circonferenze ci sono  $2(n - 1)$  punti di intersezione con le altre. Questi punti determinano un totale di  $a = 2n(n - 1)$  archi per questa mappa piana. Osserviamo inoltre che ogni punto appartiene ad esattamente 2 circonferenze quindi, il totale dei punti di intersezione tra circonferenze è  $n(n - 1)$ . Questa osservazione, dunque,

ci dice che per questa mappa  $v = n(n - 1)$ . Applicando la formula (2.4) otteniamo che

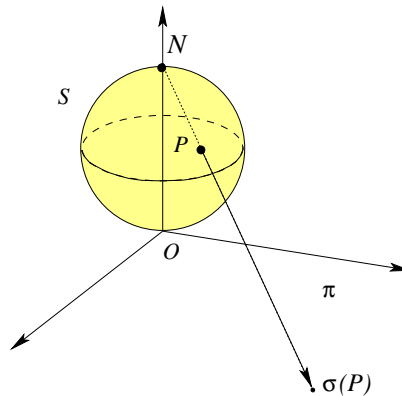
$$r = 2 - v + a = 2 - n(n - 1) + 2n(n - 1) = n^2 - n + 2, \quad n \geq 2.$$

In definitiva,  $n \geq 2$  cerchi nel piano determinano al più  $n^2 - n + 2$  regioni.

## 2.3 Poliedri

La formula (2.4) ha un'importante applicazione ai solidi tridimensionali. Dato un poliedro convesso  $\Pi$ , costruiamo una sua "mappa sferica"  $\tilde{\Pi}$  nel modo seguente: Prendiamo una sfera  $S$  il cui centro sia contenuto in  $\Pi$  e sufficientemente grande da contenere  $\Pi$ . Proiettiamo poi  $\Pi$  su  $S$  dal centro di  $S$ . Il complesso di linee e punti così ottenuto lo chiameremo  $\tilde{\Pi}$ . Chiaramente c'è una corrispondenza biunivoca tra gli spigoli e vertici di  $\Pi$  con gli archi e i vertici, rispettivamente, di  $\tilde{\Pi}$ . Per poter applicare (2.4) a  $\tilde{\Pi}$  dobbiamo trasformarlo in un oggetto piano senza però perdere le informazioni relative ad archi e vertici. Faremo uso di una proiezione che trasforma una sfera privata di un suo punto  $N$  in un piano.

Data una sfera  $S$ , sia  $N$  un punto sulla sfera,  $O$  il punto diametralmente opposto ad  $N$  e  $\pi$  il piano tangente ad  $S$  in  $O$ . Fissato un punto  $P \in S$ , chiamiamo  $\sigma(P)$  il punto di intersezione di  $\pi$  con la semiretta uscente da  $N$  e passante per  $P$ . Questo punto si chiama proiezione stereografica di  $P$  su  $\pi$ . Fissato  $N$ , questa proiezione fa corrispondere i punti di  $S \setminus N$  a quelli di  $\pi$  in modo biunivoco e continuo<sup>5</sup>.



Proiezione stereografica della sfera  $S$  sul piano  $\pi$ .

Scegliamo un punto  $N$  su  $S$  che non appartenga a nessuno degli archi di  $\tilde{\Pi}$  e consideriamo l'immagine  $\sigma(\tilde{\Pi})$ . Chiaramente questa è una mappa connessa piana e la regione illimitata corrisponde alla faccia del poliedro che proiettata su  $S$  contiene  $N$ . Dalla formula (2.4) segue che

$$v - s + f = 2, \quad (2.5)$$

dove  $v$  è il numero di vertici,  $s$  quello di spigoli e  $f$  quello di facce di  $\Pi$ .

<sup>5</sup>È noto che questa proiezione è liscia e conserva gli angoli.



### 2.3.1 Poliedri possibili

La formula (2.5) impone alcune limitazioni su come possono essere fatti i poliedri. Cominciamo con un'osservazione molto semplice:

**Osservazione 2.3.1.** *Ogni poliedro convesso deve avere almeno una faccia che sia un triangolo o un quadrato o un pentagono (anche non regolari).*

Per verificare quest'affermazione osserviamo che in ogni vertice si incontrano almeno 3 spigoli e che ogni spigolo congiunge 2 vertici, cioè  $3v \leq 2s$ . Se per assurdo ogni faccia avesse almeno 6 lati (=spigoli), dal momento che ogni spigolo separa due facce, avremmo  $6f \leq 2s$ . Per la (2.5), otteniamo una contraddizione:

$$2 = v - s + f \leq \frac{2}{3}s - s + \frac{1}{3}s = 0.$$



In particolare, non è possibile costruire un poliedro convesso le cui facce siano tutti esagoni (anche non regolari). Se vogliamo andarci vicino, possiamo pensare di sostituire alcuni esagoni con dei pentagoni (i moderni palloni da calcio sono dei poliedri “gonfiati” di questo tipo). Quanti pentagoni sono necessari per farlo?

Cerchiamo un poliedro nei cui vertici si incontrano tre facce. Se  $n_6$  e  $n_5$  rappresentano rispettivamente il numero degli esagoni e dei pentagoni,  $6n_6 + 5n_5$  rappresenta il numero dei vertici contati tre volte e quello degli spigoli contati due volte. Dunque per la (2.5),

$$n_6 + n_5 - \frac{6n_6 + 5n_5}{2} + \frac{6n_6 + 5n_5}{3} = 2.$$

Da cui segue  $n_5 = 12$ . Questo argomento, si può applicare per ottenere informazioni sui poliedri di cui sia fissato il numero di spigoli per ogni vertice e il numero di lati dei vari tipi di facce.

**Esercizio 2.3.2.** *Dimostrare che non esiste un poliedro con 7 spigoli.*

(Suggerimento: Considerando  $s = 7$  nella relazione  $v + f = 2 + s$ , fare una lista dei valori possibili per  $v$  ed  $f$  e vedere quali sono i solidi che possono esistere.)

Se limitiamo la nostra attenzione ai poliedri convessi le cui facce siano poligoni regolari tutti uguali (poliedri regolari convessi) possiamo però dire molto di più:

**Teorema 2.3.3.** *Esistono (a meno di trasformazioni affini) soltanto 5 poliedri regolari convessi.*

*Dimostrazione.* Sia  $\Pi$  un tale poliedro. Denotiamo con  $m$  il numero degli spigoli che si incontrano ad ogni vertice e con  $n$  il numero di spigoli di ogni faccia. Notiamo che deve essere  $n \geq 3$ . Allora,  $mv = 2s = nf$  ed essendo  $v - s + f = 2$  abbiamo

$$\frac{nf}{m} - \frac{nf}{2} + F = 2.$$

Da cui

$$(2n - mn + 2m)f = 4m. \tag{2.6}$$

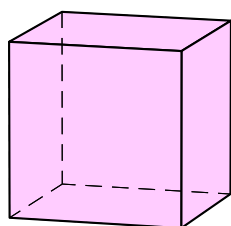
In particolare si dovrà avere  $2n - mn + 2m > 0$  e, essendo  $n \geq 3$ , questo implica

$$2m > n(m - 2) \geq 3(m - 2) = 3m - 6.$$

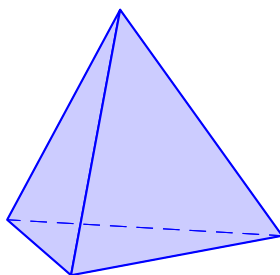
Da cui segue  $m < 6$ . Gli unici valori possibili per  $m$  allora sono 1, 2, 3, 4 o 5. Usando la (2.6) con i vincoli  $m < 6$  e  $n \geq 3$  permette di fare una lista per tutti i valori permissibili delle terne  $(m, n, f)$ . Si vede subito che queste sono: (3, 3, 4), (3, 4, 6) (4, 3, 8), (3, 5, 12), (5, 3, 20). Quello che abbiamo dimostrato finora è che non sono possibili altre configurazioni diverse dalle cinque trovate.

Per provare che effettivamente esistono cinque poliedri regolari convessi dovremmo esibirli o fare vedere che questi possono veramente essere costruiti. Omettiamo questa parte della dimostrazione perché dovrebbe essere una cosa nota di geometria solida.  $\square$

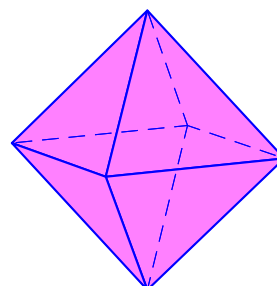
*I 5 poliedri di cui parla il teorema sono detti solidi platonici e sono rappresentati nella figura sotto assieme alle corrispondenti terne soluzione della (2.6).*



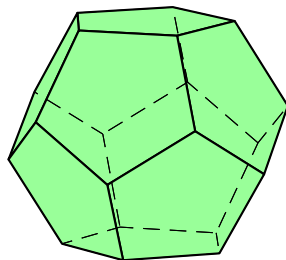
Cubo:  $m = 3, n = 4, f = 6$ .



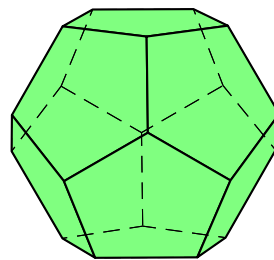
Tetraedro:  $m = 3, n = 3, f = 4$ .



Ottaedro:  $m = 3, n = 4, f = 6$ .



Dodecaedro:  $m = 3, n = 5, f = 12$ .



Icosaedro:  $m = 5, n = 3, f = 20$ .

*I cinque solidi platonici.*

---

## Riferimenti ed approfondimenti

- ✓ V. K. Balakrishnan. *Introductory discrete mathematics*. Dover publ. New York, 1996.
- ✓ F. H. Croom. *Basic concepts of algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- ✓ L. I. Golovina, I. M. Yaglom. *L'induzione in Geometria*. Progresso Tecnico Editoriale, Milano 1966.
- ✓ T. S. Michael. *How to guard an art gallery*. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore 2009.

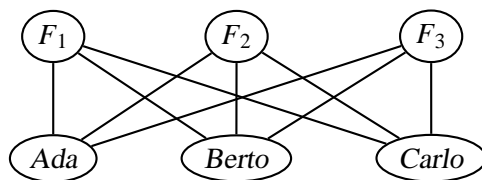
## Lezione 3

# Relazioni tra oggetti: grafi e digrafi

Nella lezione precedente abbiamo già incontrato la nozione di grafo come astrazione di quella di mappa. In questa andiamo molto più lontano per scoprire che la nozione di grafo può essere usata come modello di molte realtà anche quotidiane. Il motivo è che questa nozione si presta bene a descrivere molti tipi di relazioni, non solo spaziali. Per un'esposizione divertente e informativa delle molte possibilità si possono vedere i libri di Chartrand<sup>1</sup> o di Tannenbaum<sup>2</sup>

### 3.1 Un indovinello: il problema delle utenze

A chi non è capitato, prima o poi, di sentirsi proporre il problema di collegare tre fornitori di servizi:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  a tre utenti, Ada, Berto e Carlo senza che i loro cavi o tubi si sovrappongano. È possibile farlo? Esprimiamo il problema con un grafo:



La risposta sarà affermativa se questo è un grafo piano. Per vedere se questo è il caso, abbiamo bisogno di introdurre una definizione

**Definizione 3.1.1.** Diremo che due vertici di un grafo sono adiacenti se esiste un arco che li congiunge. Un grafo si dice bipartito se l'insieme dei suoi vertici si può partizionare in due sottoinsiemi, diciamo  $V$  e  $W$ , tali che

1. I vertici di  $V$  non sono tra di loro a due a due adiacenti, e la stessa cosa è vera per  $W$ ;

<sup>1</sup>G. Chartrand. *Introductory Graph theory*, Dover Publ., New York, 1985

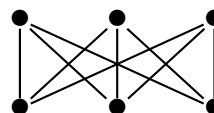
<sup>2</sup>P. Tannenbaum. *Excursion in modern mathematics 8<sup>th</sup> edition*, Pearson Education Limited, Edinburgh Gate, 2014.

2. ogni arco ha un estremo in  $V$  e uno in  $W$ .

In pratica un grafo è bipartito se è possibile distinguere due gruppi di vertici tale che gli archi del grafo vanno solo da un gruppo all'altro.

**Osservazione 3.1.1.** Osserviamo che un percorso chiuso in un grafo bipartito deve per forza essere composto da un numero pari di archi.

Consideriamo ora il grafo bipartito, detto  $K_{3,3}$ , nella figura accanto. Ci sono due gruppi di tre vertici ciascuno e 9 archi in totale



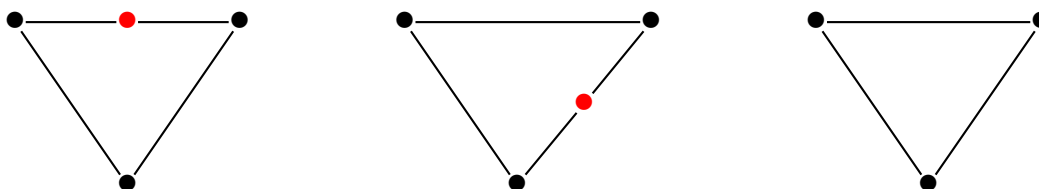
Ci chiediamo se questo sia un grafo piano. Se lo fosse, dal momento che  $v = 6$  e  $a = 9$  dovremmo avere  $r = 2 - v + a = 5$  per la (2.4). Dal momento che i cammini chiusi possono avere solo un numero pari di archi. Siccome non è un multigrafo ci sono almeno quattro archi che delimitano ogni regione. Quindi almeno 20 archi contati (ognuno) al più 2 volte. Questo implica che ci sono almeno 10 archi. Ma sappiamo che ce ne sono solo 9. Questa contraddizione implica che il grafo non è piano.

In definitiva, possiamo dire che il problema delle utenze proposto non ha soluzione. Nel capitolo precedente avevamo visto un altro esempio di grafo non piano ( $K_5$ ). Ci chiediamo se ve ne siano altri e, più in generale, se sia possibile caratterizzare i grafi piani. Abbiamo bisogno di un altro paio di definizioni.

**Definizione 3.1.2.** Il grado o valenza di un vertice di un grafo è il numero degli archi incidenti con esso.

Dato un grafo  $G$  con vertici  $V$  e archi  $A$ , un sottografo  $G'$  di  $G$  è un grafo il cui insieme di archi  $A'$  è un sottoinsieme di  $A$  e i cui vertici  $V'$  formano un sottoinsieme di  $V$ . (Quest'ultima condizione è automatica se ci limitiamo a grafi connessi.) Due grafi sono detti omeomorfi se possono essere entrambi ottenuti dallo stesso grafo con l'aggiunta (o la rimozione) di vertici di grado 2 lungo gli archi.<sup>3</sup>

Per esempio:



Tre grafi omeomorfi. I vertici in rosso hanno grado due.

Vale la seguente caratterizzazione dei grafi piani ottenuta da Kuratowski<sup>4</sup> nel 1930 di cui omettiamo la dimostrazione:

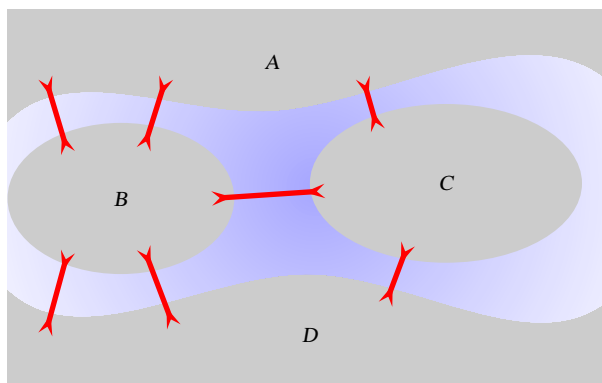
<sup>3</sup>Questa nozione non è da confondere con quella di isomorfismo. Due grafi  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  e  $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{A}')$  sono detti isomorfi se esistono corrispondenze biunivoche  $\phi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  e  $\phi_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  tali che per ogni arco  $a \in \mathcal{A}$  incidente coi vertici  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$  si ha che  $\phi_{\mathcal{A}}(a)$  è incidente con  $w_1 = \phi_{\mathcal{V}}(v_1) \in \mathcal{V}'$  e  $w_2 = \phi_{\mathcal{V}}(v_2) \in \mathcal{V}'$ .

<sup>4</sup>Kazimierz Kuratowski, 1896–1980.

**Teorema 3.1.2.** *Un grafo è piano se e soltanto se non contiene sottografi omeomorfi a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$ .*

## 3.2 I ponti di Königsberg

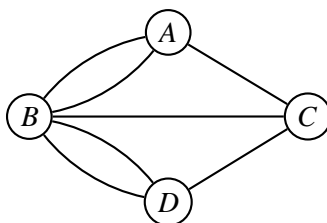
L'attuale città di Kaliningrad (Russia), che un tempo apparteneva alla Prussia, è attraversata dal fiume Pregel su cui si trovano due isole. Nei primi anni del secolo diciottesimo esistevano sette ponti, che collegavano la città con le isole, disposti schematicamente come nel disegno qui sotto



Rappresentazione molto schematica della disposizione dei ponti di Königsberg

in modo tale da collegare tra di loro i quattro quartieri della città che noi abbiamo chiamato A, B, C e D.

Per qualche motivo, oscuro per noi moderni, era divenuta materia di sfida tra gli abitanti della città il riuscire a trovare un modo per fare una passeggiata per la città toccando tutti i quartieri ma attraversando ogni ponte esattamente una volta tornando infine al punto di partenza. Dal momento che è possibile, all'interno di ogni quartiere muoversi liberamente tra le imboccature dei ponti, è chiaro che la soluzione del problema non può dipendere dalla particolare topografia della città ma solo da come sono distribuiti i collegamenti (i ponti) tra i quartieri (del resto quella fatta sopra è una rappresentazione estremamente grossolana di Königsberg). Rappresentare la città come un grafo, prendendo i quartieri come vertici e i ponti come archi, ci permette di astrarre il problema da tutti gli elementi irrilevanti e concentrarci sulle connessioni tra i quartieri. Questo è proprio il punto di forza dell'approccio mediante grafi.



Una rappresentazione della città di Königsberg come grafo. Notiamo che è un grafo piano.

In che modo, oltre a liberare il campo da questioni irrilevanti come la forma delle sponde o altro, questo tipo di rappresentazione ci può aiutare? Per capirlo abbiamo bisogno di sviluppare un po' la teoria dei grafi.

**Definizione 3.2.1.** *Un cammino in un grafo è detto euleriano se attraversa ogni arco del grafo esattamente una volta. Un cammino euleriano chiuso è detto circuito euleriano. Un grafo è detto euleriano se possiede un circuito euleriano.*

Vale il seguente risultato di Eulero:

**Teorema 3.2.1.** *Un grafo connesso privo di cappi è euleriano se e soltanto se il grado di ogni vertice è pari.*

Prima di affrontare la dimostrazione, osserviamo che da questo teorema segue subito che il problema dei ponti di Königsberg non può avere soluzione (tutti i vertici hanno grado dispari,  $A$ ,  $C$  e  $D$  hanno grado 3 e  $B$  ha grado 5). Questo risultato, che risolve in modo negativo il problema, fu pubblicato da Eulero nel 1736 in un articolo che molti ritengono la fondazione della teoria dei grafi.

*Dimostrazione del teorema 3.2.1.* La parte del “soltanto se” è facile: un circuito euleriano lascia ogni vertice tante volte quante ci entra, quindi ogni vertice ha grado pari.

Viceversa, se  $G$  è un grafo connesso privo di cappi con tutti i vertici di grado pari, facciamo vedere che è euleriano. Per farlo mostriamo esplicitamente come costruire un circuito euleriano<sup>5</sup>. Partiamo da un vertice arbitrario  $v$ , dal momento che il grado di ogni vertice è pari, possiamo attraversare archi distinti finché non torniamo a  $v$ . In questa maniera abbiamo creato un circuito  $C_1$ . Se  $C_1$  passa per tutti gli archi di  $G$  abbiamo finito, altrimenti creiamo un nuovo grafo  $G_1$  cancellando, in  $G$ , tutti gli archi di  $C_1$  e tutti i vertici che sono diventati di grado 0. Siccome per ogni vertice abbiamo cancellato un numero pari di archi (possibilmente 0), i vertici di  $G_1$  hanno ancora grado pari. È anche facile vedere che la connessione di  $G$  implica quella di  $G_1$  e che, sempre per la connessione di  $G$ , deve esistere almeno un vertice  $u$  di  $C_1$  che appartiene anche a  $G_1$ . Partiamo ora da  $u$  e creiamo un circuito  $C_2$  attraversando archi distinti finché non torniamo a  $u$ . Accoppiamo  $C_1$  e  $C_2$  generando un nuovo circuito  $C_3$  secondo la seguente regola:

- Se  $u = v$ ,  $C_3$  consiste nel circuito ottenuto concatenando  $C_1$  a  $C_2$ , cioè a partire da  $u$  si seguono prima gli archi di  $C_1$  e poi quelli di  $C_2$ ;
- Se  $u \neq v$ , per ottenere  $C_3$  si parte da  $u$  e si seguono gli archi di  $C_1$  finché si arriva a  $v$ , poi si segue tutto  $C_2$  (a questo punto siamo tornati a  $v$ ) e infine si seguono gli archi rimanenti di  $C_1$  (tornando dunque a  $u$ ).

Se  $C_3$  contiene tutti i vertici di  $G$  abbiamo finito. Altrimenti, ripetiamo la costruzione.

Per la finitezza del numero di vertici, la procedura deve necessariamente terminare. Il circuito ottenuto con questi successivi accoppiamenti è euleriano per costruzione.  $\square$

<sup>5</sup>Esistono vari algoritmi per farlo, noi ne abbiamo scelto uno facile da descrivere, non necessariamente il migliore.

Un'osservazione interessante è che per risolvere il problema dei ponti di Königsberg è sufficiente la parte facile del "soltanto se" del teorema.

### 3.2.1 Passeggiate senza ritorno

È naturale porsi la domanda se proprio la richiesta di avere un circuito euleriano sia la causa dell'impossibilità di risolvere il problema dei ponti di Königsberg. Cioè, potremmo chiederci se, evitando di tornare al punto di partenza, sia possibile fare una passeggiata per la città di Königsberg toccando tutti i quartieri e attraversando ogni ponte esattamente una volta.

In termini di grafi questo equivale a chiedere un cammino euleriano. Anche questo problema "indebolito" ha una risposta negativa. Vale infatti il seguente risultato:

**Teorema 3.2.2.** *Un grafo connesso privo di cappi e privo di un circuito euleriano ammette un cammino euleriano se e soltanto se ha esattamente due vertici di grado dispari.*

Come già osservato, il grafo della città di Königsberg ha tre vertici di grado dispari da cui l'impossibilità di un cammino euleriano.

*Dimostrazione parziale del teorema 3.2.2. 'Solo se'.* Supponiamo che ci sia un cammino euleriano. Questo cammino passa attraverso ogni vertice e percorre ogni arco esattamente una volta, pertanto il grado di un qualunque vertice è la somma di quante volte il cammino vi 'entra' e di quante volte vi 'esce'. Siano  $u$  e  $v$  gli estremi di un cammino euleriano. Se  $w$  è un qualunque vertice diverso da  $u$  e  $v$  allora il cammino deve entrare in  $w$  lo stesso numero di volte che ne esce, e la somma di questi numeri, che è uguale al grado di  $w$ , è pari. Osserviamo che invece per gli estremi questa somma risulta essere dispari. Supponiamo per fissare le idee che  $u$  sia il punto di partenza del cammino allora questo 'esce' da  $u$  una volta in più di quante vi entri. Similmente, il cammino 'entra' in  $v$  una volta in più di quante vi esca.

*'Se'.* La dimostrazione è costruttiva, nel senso che viene esplicitamente mostrato un algoritmo per costruire un cammino euleriano che parte da uno dei vertici con grado dispari e finisce nell'altro. Presentiamo la costruzione per sommi capi ma omettiamo la dimostrazione che il percorso ottenuto è effettivamente euleriano.

Diremo che un arco è un *ponte* se la sua rimozione sconnette il grafo. La procedura è la seguente:

1. Partire da uno dei due vertici con grado dispari.
2. Percorrere che non sia stato percorso in precedenza, facendo attenzione a non scegliere un ponte a meno che non ci sia altra scelta, e marcarlo come fatto.

La procedura termina quando non è possibile scegliere un nuovo arco. □

*L'algoritmo mostrato nella dimostrazione del teorema 3.2.2 è detta algoritmo di Fleury<sup>6</sup>. In effetti, la procedura può essere modificata in modo banale anche per la ricerca dei circuiti euleriani.*

<sup>6</sup>Publicato da M. (o 'H.') Fleury nel 1883. "Deux problèmes de Géométrie de situation", Journal de mathématiques élémentaires, pp. 257-261, 1883.

Vista l'importanza rivestita dal grado dei vertici di un grafo, è naturale chiedersi che legami ci siano tra questi e, in particolare, quanti siano i vertici con grado dispari.

Vale il seguente risultato:

**Teorema 3.2.3.** *La somma dei gradi dei vertici di un grafo è uguale a due volte il numero degli archi.*

*Dimostrazione.* Notiamo che il grado di un vertice isolato è 0. È allora sufficiente osservare che ogni arco ha due estremi (non necessariamente distinti) e che quindi contribuisce con 2 alla somma dei gradi dei vertici.  $\square$

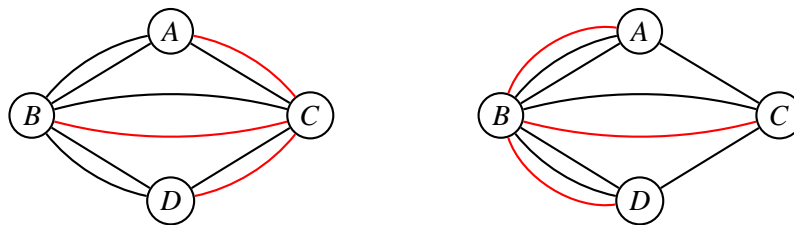
**Corollario 3.2.4.** *Il numero dei vertici con grado dispari è pari.*

*Dimostrazione.* Sia  $d$  il numero di vertici con grado dispari. Siano  $D$  e  $P$ , rispettivamente, le somme dei gradi dei vertici di grado dispari e di quelli di grado pari. Chiaramente,  $P$  è pari. Il teorema (3.2.3) dice che  $P + D$  è pari. Dunque  $D$  è pari. Questo implica che anche  $d$  è necessariamente pari, infatti la somma di un numero dispari di numeri dispari è dispari.  $\square$

### 3.2.2 La passeggiata a tutti i costi: eulerizzazione e semi-eulerizzazione

Sappiamo che per fare una passeggiata per la città di Königsberg toccando tutti i quartieri e attraversando ogni ponte almeno una volta tornando infine al punto di partenza, si deve attraversare almeno due volte qualcuno dei ponti. Ci chiediamo quali siano i ponti da riattraversare e quale sia il minimo numero di "riattraversamenti" necessari. La risposta è molto facile da fornire in termini di grafi. L'idea è di aggiungere archi in modo da rendere pari il grado di quei vertici che l'hanno dispari. In generale, con  $2m$  vertici di grado dispari (ricordiamo che sono in numero pari) ci vogliono almeno  $m$  nuovi archi, ma ne possono essere necessari di più. Il grafo così modificato è detto eulerizzazione del grafo originale. Chiaramente questa non è unica. La diremo ottimale se il numero degli archi raddoppiati è minimo.

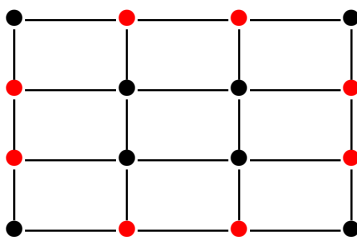
Consideriamo il grafo a pagina 31 che rappresenta la città di Königsberg con i suoi ponti. Percorrere due volte un ponte equivale a raddoppiare l'arco corrispondente (in rosso nel disegno):



Due eulerizzazioni del grafo della città di Königsberg.

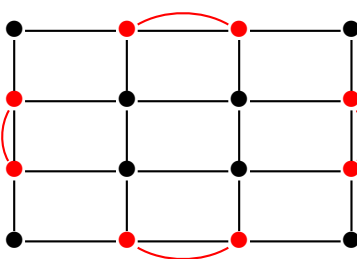
Consideriamo, per esempio una guardia che deve pattugliare una rete di  $4 \times 4$  strade (cioè fare un circuito euleriano). Può farlo senza dover percorrere due volte uno stesso tratto? Si può rappresentare un problema con un grafo.





I vertici rappresentano gli incroci. In rosso i vertici con grado dispari.

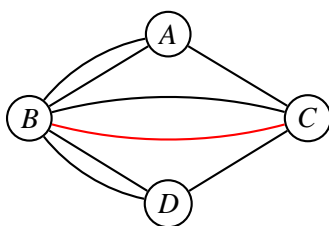
La risposta è no: ci sono 4 vertici con grado dispari. Per eulerizzare questo grafo aggiungiamo 4 archi (in rosso):



Quindi ci sono almeno 4 tratti di strada da percorrere 2 volte.

Supponiamo di non voler fare un cammino chiuso ma di desiderare di spostarsi da uno all'altro di una coppia assegnata di vertici, sempre però attraversando tutti gli archi il minimo numero possibile di volte. Perché ciò sia possibile bisogna che i vertici scelti come estremi abbiano grado dispari e tutti gli altri abbiano grado pari. Possiamo ottenere questo risultato raddoppiando alcuni archi. Questa procedura è nota come semi-eulerizzazione che diremo ottimale se il numero degli archi raddoppiati è minimo.

Per esempio, se nella città di Königsberg decidiamo di andare dal quartiere A al quartiere D attraversando tutti i ponti almeno una volta, dobbiamo attraversare uno di essi almeno due volte:



Semi-eulerizzazione ottimale del grafo della città di Königsberg relativamente ai vertici A e D.

### 3.3 Rappresentare i grafi e far di conto

Rappresentare i grafi con i disegni come abbiamo fatto nei paragrafi precedenti è molto intuitivo e si presta bene a fare alcuni calcoli come, per esempio, calcolare il grado dei vertici. Nel caso di

un grafo molto grande però, tutto questo non è molto pratico. Quello che vogliamo è un modo per rappresentare le informazioni contenute in un grafo in una forma compatta, magari adatta ad un computer.

Un modo banale è fare una lista di tutti gli archi di un grafo. Un altro è avere una lista dei vertici contenente, per ogni vertice, una lista di puntatori ai vertici adiacenti. Questi metodi, possono impiegati con un computer e possono tornare utili in alcune applicazioni. Noi però ci concentreremo su due diverse tecniche basate sulle matrici.

### 3.3.1 Matrice di adiacenza (o connessione)

Sia  $G$  un grafo senza archi multipli (non un multigrafo quindi) e senza cappi con  $n$  vertici che chiamiamo  $v_1, \dots, v_n$ . Consideriamo la matrice quadrata  $n \times n$ ,  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ è adiacente a } v_j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La matrice  $A$ , detta matrice di adiacenza di  $G$ , è chiaramente simmetrica.

Dato  $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , chiamiamo  $r$ -cammino un cammino che consiste di  $r$  archi. Ricordiamo che un cammino non è orientato. Denotiamo con  $a_{ij}^{(r)}$  l'elemento  $(i, j)$ -esimo di  $A^r$ .

**Teorema 3.3.1.** Sia  $k \geq 1$ . Per  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_{ij}^{(k)}$  è il numero di  $k$ -cammini che uniscono  $v_i$  e  $v_j$ .

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $k$ . Per  $k = 1$  non c'è niente da dimostrare. Supponiamo che l'asserzione sia vera per  $k - 1$ . Siccome  $A^k = A^{k-1} \cdot A$ ,

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{s=1}^n a_{is}^{(k-1)} a_{sj}. \quad (3.1)$$

Ricordando la definizione di  $a_{ij}$ ,

$$a_{is}^{(k-1)} a_{sj} = \begin{cases} a_{is}^{(k-1)} & \text{se } v_s \text{ e } v_j \text{ sono adiacenti,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per l'ipotesi induttiva,  $a_{is}^{(k-1)}$  è il numero di cammini composti da  $k - 1$  archi che uniscono  $v_i$  e  $v_s$ , dunque  $a_{is}^{(k-1)} a_{sj}$  sarà il numero di  $k$ -cammini da  $v_i$  a  $v_j$  in cui il vertice che precede immediatamente  $v_j$  è  $v_s$ . Sommando tutti questi numeri per  $s = 1, \dots, n$ , otteniamo il numero di  $k$ -cammini che uniscono  $v_i$  e  $v_j$ ; cioè la tesi grazie alla (3.1).  $\square$

Di particolare interesse è il seguente:

**Corollario 3.3.2.** Il grado del vertice  $v_i$  è dato da  $a_{ii}^{(2)}$ .

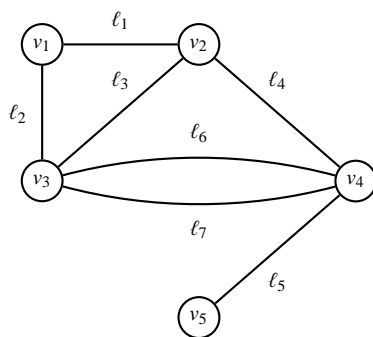
### 3.3.2 Matrice d'incidenza

Diversamente dalla matrice di adiacenza, quella d'incidenza è in grado di rappresentare anche multigrafi. Sia  $G$  un grafo con vertici  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e archi  $\ell_1, \dots, \ell_m$ . La matrice d'incidenza  $B = (b_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$  è una matrice  $n \times m$  (non necessariamente quadrata, quindi, a differenza di quella di adiacenza) con,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \ell_j \text{ è incidente con } v_i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La matrice di incidenza è particolarmente utile per i grafici diretti (li vedremo più avanti) cioè quelli in cui gli archi si considerano orientati.

Consideriamo, per esempio, il grafo seguente:



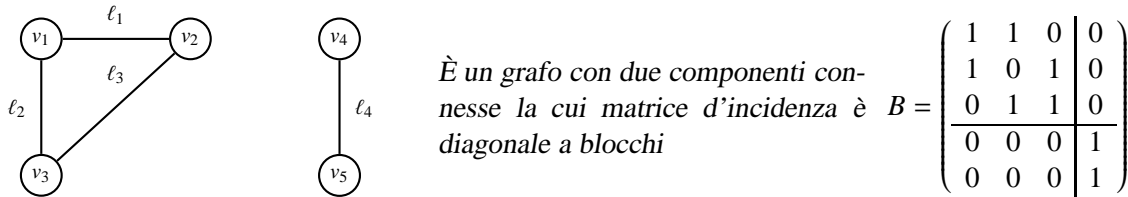
La sua matrice d'incidenza  $B$  è

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 & \ell_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Osservazione 3.3.3.** Dalla definizione di matrice d'incidenza seguono immediatamente i seguenti fatti:

1. Siccome ogni arco è incidente con al più due vertici (uno solo se è un cappio), allora ogni colonna contiene al più due elementi uguali a 1 (ne contiene uno solo se la colonna corrisponde ad un cappio).
2. La somma degli elementi lungo ogni riga fornisce il grado del vertice corrispondente.
3. Un vertice isolato corrisponde ad una riga di zeri.
4. Archi "paralleli" (cioè con gli stessi vertici) inducono colonne uguali.
5. Una permutazione delle righe (colonne) corrisponde a rinominare i vertici (archi) del grafo.

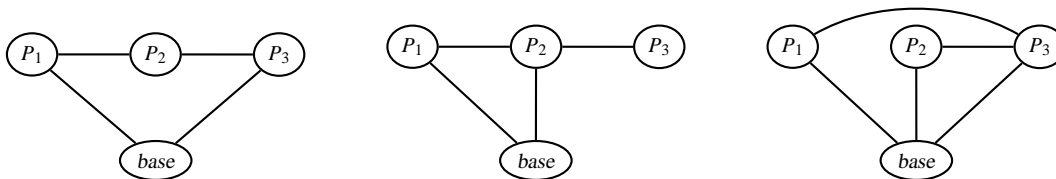
Non è poi difficile provare che a meno di permutazioni di righe e colonne (cioè di cambiamento di nomi per vertici e archi), la matrice d'incidenza di un grafo sconnesso può essere scritta in forma diagonale a blocchi. Per esempio:



Si potrebbe inoltre dimostrare (ma non lo faremo) che il numero  $C$  di componenti connesse di un grafo con  $n$  vertici è dato da  $C = n - \text{rank}(B)$ . In particolare, il grafo sarà connesso se e soltanto se  $n - \text{rank}(B) = 1$ .

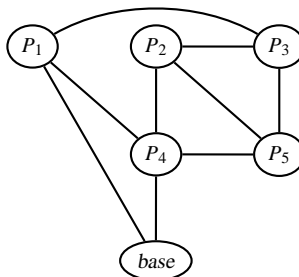
### 3.4 Raggiungere tutti i vertici una volta sola

Il principe Fortunato deve liberare tre principesse. Queste vivono in tre castelli uniti tra di loro e con la sua base da dei sentieri magici. Per via della magia del luogo, Fortunato non può uscire dai sentieri e ogni volta che raggiunge un castello deve entrarci. Inoltre, ogni volta che penetra in uno dei castelli gli orchi di guardia si svegliano e lui non può più passare da lì. Come se non bastasse, il mago Arcigno che presiede alla base di Fortunato gli ha ingiunto di non provare neppure a ritornare alla base se non in compagnia delle tre principesse. Ci chiediamo se il principe riuscirà a liberare tutte le principesse e a tornare alla sua base senza incorrere nell'ira di Arcigno. Chiamiamo  $P_1, p_2$  e  $P_3$  le tre principesse e consideriamo tre diverse configurazioni.



È facile vedere che nella prima ed nell'ultima configurazione è possibile liberare tutte le principesse ma in quella centrale no. Notiamo che non è necessario usare tutti i sentieri magici.

La strategia da usare è leggermente più complicata se abbiamo 5 principesse nella seguente configurazione:



In questo caso, una sequenza “giusta” di liberazioni è  $P_4, P_2, P_5, P_3, P_1$

Dal punto di vista della teoria dei grafi, il problema del principe consiste nel trovare un cammino chiuso che attraversi tutti i vertici esattamente una volta (in effetti l'ultimo vertice è visitato 2 volte, ma ci capiamo). Un tale cammino sarà detto circuito hamiltoniano<sup>7</sup>. Similmente, un cammino aperto che attraversa ogni vertice esattamente una volta è detto percorso hamiltoniano.

Per quanto riguarda l'esistenza di un circuito hamiltoniano abbiamo il seguente teorema di Ore<sup>8</sup> del 1963:

**Teorema 3.4.1.** *Sia  $G$  un grafo semplice (i.e. privo di cappi e di archi multipli) con  $n \geq 3$  vertici. Se la somma dei gradi per ogni coppia di vertici non adiacenti è almeno  $n$ , allora  $G$  ammette un circuito hamiltoniano.*

Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

**Corollario 3.4.2** (Teorema di Dirac<sup>9</sup>, 1952). *Sia  $G$  un grafo semplice con  $n \geq 3$  vertici. Se il grado di ogni vertice è almeno  $n/2$ , allora  $G$  ammette un circuito hamiltoniano.*

Il grafo del problema delle 5 principesse mostra che queste condizioni non sono necessarie. In effetti la situazione qui è più complessa che per i circuiti euleriani. Notiamo inoltre che l'aggiunta di cappi o di archi multipli non altera l'esistenza di un circuito hamiltoniano. Pertanto dato un grafo generale  $G$  per applicare il teoremi precedenti possiamo sempre  $G$  cancellando i cappi e gli eventuali archi multipli.

Similmente, per i percorsi hamiltoniani, abbiamo la seguente condizione sufficiente:

**Teorema 3.4.3.** *Sia  $G$  un grafo semplice con  $n$  vertici. Se la somma dei gradi per ogni coppia di vertici non adiacenti è almeno  $n - 1$ , allora  $G$  ammette un percorso hamiltoniano.*

**Corollario 3.4.4.** *Sia  $G$  un grafo semplice con  $n$  vertici. Se il grado di ogni vertice è almeno  $(n - 1)/2$ , allora  $G$  ammette un percorso hamiltoniano.*

In linea di principio, non possiamo escludere che possano esistere più di un percorso o circuito hamiltoniano. Concentriamoci su dei particolari tipi di grafi. Chiamiamo  $K_n$  un grafo semplice tale che ogni vertice è adiacente a tutti gli altri (abbiamo già incontrato  $K_5$ ). Ovviamente,

1.  $K_n$  ha esattamente  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  archi;
2. Il grado di ogni vertice è  $n - 1$ .

Si può inoltre verificare che  $K_n$  ammette esattamente  $n!$  percorsi hamiltoniani e  $(n - 1)!$  circuiti hamiltoniani.

<sup>7</sup>In onore di Sir William Hamilton, 1805–1865.

<sup>8</sup>Oystein Ore, 1899–1968.

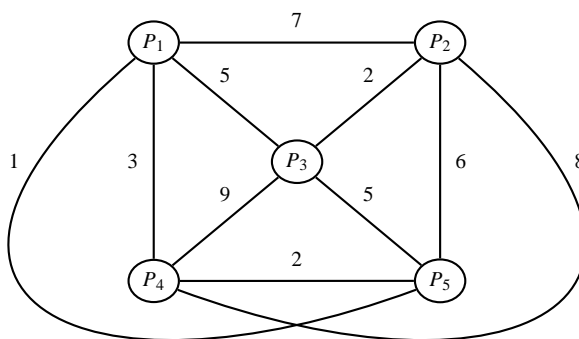
<sup>9</sup>Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984.

### 3.5 Inserire più informazioni in un grafo

A volte la semplice informazione riguardante la connessione tra vertici è insufficiente per modellare adeguatamente un problema. A questo si può ovviare introducendo delle nozioni speciali.

#### 3.5.1 Grafi pesati e problema del commesso viaggiatore

Jella, l'assistente più odiato del mago Arcigno, in previsione dell'impresa del principe Fortunato, viene spedito dal proprio maestro a distribuire delle pozioni di bellezza alle 5 principesse. Differentemente dal principe, Jella può liberamente spostarsi da un castello all'altro lungo degli appositi sentieri fatati, ma certamente non vuole presentarsi due volte alla porta di una stessa principessa (sarebbe un insulto mortale, come dire che ha un bisogno doppio della pozione!). Arcigno, inoltre ha fornito al suo assistente un talismano in grado di farlo materializzare in un castello a sua scelta e di farlo ritornare alla base appena terminato il giro. Sfortunatamente per Jella i sentieri sono infestati da un certo numero di orchi inferociti. Per cercare di ridurre il rischio al minimo, Jella ha diligentemente compilato una lista dei percorsi possibili con il numero di orchi presenti su ogni sentiero. Per comodità dispone le informazioni su un grafo come segue:



In pratica Jella deve seguire un percorso hamiltoniano e, per ridurre il rischio al minimo, deve scegliere quello in cui incontrerà meno orchi.

Una possibile strategia per risolvere questo problema è fare la lista di tutti i possibili percorsi hamiltoniani la relativa somma degli orchi incontrati. Per esempio, lungo il percorso hamiltoniano

$$P_5 \rightarrow P_4 \rightarrow P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 ,$$

Jella incontrerà 12 orchi, ma ben 14 se segue il percorso

$$P_1 \rightarrow P_5 \rightarrow P_4 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 .$$

In questa situazione, non è difficile (anche se un po' noioso) trovare il percorso migliore facendo un elenco di tutti quelli possibili, infatti il grafo è  $K_5$  che ammette soltanto  $5! = 120$  percorsi hamiltoniani.

Un problema simile e ben noto può essere presentato in termini più prosaici. Si consideri un commesso viaggiatore che per il suo lavoro deve fare il giro di diverse città (assegnate d'ufficio)

visitando ognuna una sola volta per ogni giro. Supponiamo che queste città siano tutte collegate l'una con l'altra mediante mezzi di trasporto il cui costo è noto. Il problema è trovare il "giro" più economico. Ovviamente, questo si può fare cercando il circuito hamiltoniano di costo complessivo minore. In generale non si conoscono strategie efficienti. Per analizzare tutte le alternative, se ci sono  $n$  città, si devono valutare  $(n - 1)!$  circuiti (per costruzione il grafo è  $K_n$ ). Questo numero diventa rapidamente troppo grande anche per un computer, per questo motivo sono stati inventati alcuni algoritmi che, sebbene non forniscono necessariamente il percorso ottimale, permettono in molti casi di trovarne uno accettabile.

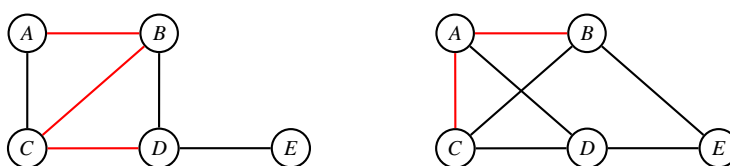
### 3.5.2 Grafi con segno: un problema sociale

Consideriamo un caso particolare di grafo pesato in cui agli archi assegnamo soltanto  $+1$  o  $-1$  come valore. (O, per maggiore brevità, un "+" o un "-".)

Dato un certo gruppo di persone di una certa consistenza, è esperienza comune che i rapporti interpersonali possano essere caratterizzati in "antipatia", "amicizia", "indifferenza". Nelle situazioni reali ci sono naturalmente delle gradazioni, ma allo scopo di costruire un modello semplice di interazione sociale manteniamo questa classificazione piuttosto cruda.

Supponiamo dunque di avere un certo numero di persone che rappresentiamo come vertici. Tracciamo degli archi con peso positivo se tra loro c'è amicizia, e negativo se c'è inimicizia. Non tracciamo un arco se c'è indifferenza.

Consideriamo le seguenti due situazioni (5 persone A, B, C, D, E, per semplicità gli archi positivi sono in nero e quelli negativi in rosso):



Nelle due situazioni rappresentate c'è una differenza fondamentale, nella prima si formano due gruppi {A,C} contro tutti gli altri. Nella seconda, A si trova nella situazione precaria di rimanere amico di D ma in difficili rapporti con alcuni suoi amici.

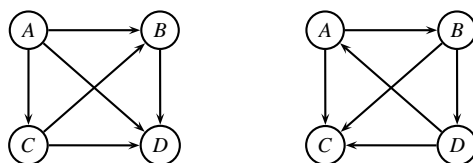
Grafi di questo tipo si chiamano sistemi sociali. Un sistema sociale si dice bilanciato se le relazioni tra gli individui (vertici) sono tutte positive o se si possono dividere i vertici in due sottoinsiemi tali che tutte le relazioni positive sussistono tra individui dello stesso sottoinsieme. Chiaramente il secondo grafo sopra non rappresenta un sistema bilanciato.

Si potrebbe provare il seguente teorema (ma non lo facciamo):

**Teorema 3.5.1.** *Un grafo con segno  $S$  è bilanciato se e soltanto se per ogni coppia di vertici tutti i cammini che li uniscono hanno lo stesso segno.*

### 3.5.3 Grafi diretti, traffico automobilistico e tornei

Diciamo informalmente che un grafo diretto o digrafo è un grafo ai cui archi è associata una direzione (graficamente sono rappresentati da frecce). Questo tipo di grafi sono utili in quelle situazioni in cui tra i vertici sussistono relazioni asimmetriche. Si può pensare, ad esempio, ad un grafo che descriva un'organizzazione gerarchica: i vertici sono le persone e le frecce rappresentano la relazione "ha autorità su". Un altro esempio ci viene fornito dal mondo dello sport. In un girone all'italiana (round robin tournament) ogni squadra deve incontrare ogni altra e non è possibile un pareggio. Il risultato di un girone di questo tipo si può rappresentare in questo modo: ogni squadra viene rappresentata da un punto e, per ogni incontro, si traccia una freccia dal vincitore al vinto. L'oggetto così ottenuto è detto grafo di dominanza. Per esempio, con quattro squadre  $A, B, C, D$  potremmo avere varie situazioni. La figura seguente illustra due casi.



Due grafi di dominanza. Nelle due situazioni c'è una differenza fondamentale, il primo è transitivo cioè: "se  $(x$  sconfigge  $y)$  e  $(y$  sconfigge  $z) \Rightarrow (x$  sconfigge  $z)$ ". Il secondo non è transitivo.

Chiaramente, in un grafo diretto ha due vertici, uno detto di partenza e uno di arrivo. Un cammino o percorso in un grafo diretto è un cammino nel grafo che rispetta la direzione degli archi. La nozione di grado di un vertice  $v$ , per così dire, si divide in due: il grado entrante di  $v$  è il numero di archi che hanno il secondo estremo (l'arrivo) in  $v$ , il grado uscente di  $v$  è il numero di archi che hanno il primo estremo (la partenza) in  $v$ .

Anche la nozione di grafo connesso si complica un po'.

**Definizione 3.5.1.** Un grafo diretto si dice debolmente connesso se il grafo su cui è basato (tolta l'orientazione degli archi) è connesso. Si dice fortemente connesso se per ogni coppia di vertici esiste un cammino orientato dal primo al secondo e dal secondo al primo.

Molte delle nozioni che abbiamo visto per i grafi si estendono in modo molto naturale ai grafi diretti, in particolare quelle di cammino o ciclo euleriano e hamiltoniano. In effetti, per i primi, esistono condizioni necessarie e sufficienti e per i secondi condizioni necessarie. Non sorprendentemente, le condizioni diventano un po' più complicate nel caso dei grafi diretti. Per esempio

**Teorema 3.5.2.** Un grafo diretto debolmente connesso ammette un circuito euleriano diretto se e soltanto se in ogni vertice il grado entrante è uguale a quello uscente.

Inoltre,

un grafo diretto debolmente connesso privo di un circuito euleriano diretto ammette un cammino euleriano diretto se e soltanto se in ogni vertice, eccettuati esattamente due,  $u$  e  $v$ , il grado entrante è uguale a quello uscente, mentre il grado uscente (entrante) di  $u$  ( $v$ ) è uguale a quello entrante (uscente) più uno.



Per quanto riguarda i cammini hamiltoniani ci limitiamo a citare il seguente teorema:

**Teorema 3.5.3** (Rédei<sup>10</sup>, 1934). *Ogni torneo (grafo di dominanza) ammette un percorso hamiltoniano diretto.*

Ed il suo corollario:

**Corollario 3.5.4.** *Un torneo transitivo ha un unico percorso hamiltoniano diretto.*

Esistono anche le nozioni di matrice di adiacenza e di matrice d'incidenza. La matrice d'incidenza si ottiene segnando +1 o -1 nel posto  $(i, j)$ -simo a seconda che l'arco  $J$ -simo sia entrante o uscente da  $v_i$ , e 0 altrimenti. Invece, per la matrice di adiacenza, si scrive 1 nella posizione  $(i, j)$ -sima se e soltanto se esiste un arco dal vertice  $v_i$  al vertice  $v_j$ . Anche queste matrici sono dotate di proprietà interessanti, qui ci limitiamo a menzionare il seguente adattamento del teorema 3.3.1:

Dato  $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , chiamiamo  $r$ -cammino un cammino che consiste di  $r$  archi orientati. Denotiamo  $A$  la matrice di adiacenza di un grafo orientato e con  $a_{ij}^{(r)}$  l'elemento  $(i, j)$ -esimo di  $A^r$ .

**Teorema 3.5.5.** *Sia  $k \geq 1$ . Per  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_{ij}^{(k)}$  è il numero di  $k$ -cammini orientati che vanno da  $v_i$  a  $v_j$ .*

Concludiamo questa lezione con un'applicazione interessante e sorprendente alla viabilità. Consideriamo un gruppo di strade che rappresentiamo come un grafo, prendendo come vertici i crocicchi e come archi le strade stesse. Supponiamo che il grafo risultante sia connesso (quindi si può viaggiare legalmente da un crocicchio a qualunque altro). Ci chiediamo: "È possibile far diventare tutte le strade a senso unico mantenendo questa proprietà?". Questo è un tipo di problema che si può presentare quando, per un qualche tipo di evento, il traffico aumenta e si deve escogitare un'alternativa più scorrevole alla viabilità esistente.

La risposta è contenuta nel seguente teorema (di cui omettiamo la dimostrazione, ma una parte è banale):

**Teorema 3.5.6.** *Sia  $G$  un grafo connesso. È possibile assegnare un'orientazione ad ognuno dei suoi archi in modo tale che il grafo diretto risultante sia fortemente connesso (in questo caso il grafo si dice orientabile) se e soltanto se  $G$  non contiene ponti.*

---

## Riferimenti ed approfondimenti

✓ V. K. Balakrishnan. *Introductory discrete mathematics*. Dover publ. New York, 1996.

---

<sup>10</sup>László Rédei, 1900–1980.

- ✓ Mauro Cerasoli, Franco Eugeni, Marco Protasi. *Elementi di matematica discreta*, Zanichelli, Bologna 1992.
- ✓ Gary Chartrand. *Introductory Graph theory*, Dover Publ., New York, 1985.
- ✓ Hugo Steinhaus. *Mathematical snapshots*, Dover Publ., New York, 1999.
- ✓ Peter Tannenbaum. *Excursion in modern mathematics 8<sup>th</sup> edition*, Pearson Education Limited, Edinburgh Gate, 2014.

## Lezione 4

# Fenomeni che si evolvono per stadi successivi: tempo discreto

*In questa lezione introdurremo alcuni modelli che si evolvono in modo non continuo, per così dire, per stadi successivi come potrebbe essere per un sistema che descriva la crescita di una popolazione soggetta a dei cicli naturali (e.g. stagionali) riproduttivi. Tuttavia, la nostra analisi non riflette necessariamente la realtà fisica dei sistemi studiati, ma piuttosto il modo in cui questi vengono analizzati. Si pensi, per esempio, a delle rilevazioni periodiche di una popolazione o ad un sistema complesso che viene fotografato ad istanti ben definiti di tempo.*

*Studieremo qualche metodo che consente un'analisi qualitativa di modelli semplici. Daremo per scontate alcune nozioni di algebra lineare (matrici e spazi vettoriali, determinanti) e di analisi (limiti di successioni).*

### 4.1 Alcuni modelli 1- e 2-dimensionali

*Prendiamo in considerazione alcuni esempi di natura biologica o economica. Gli esempi 2-dimensionali rappresenteranno modelli di interazioni tra due agenti. Più in generale si potrebbero considerare esempi in dimensione più alta, diciamo  $n > 2$ , rappresentanti interazioni tra  $n$  agenti.*

#### 4.1.1 Crescita di una popolazione

*Consideriamo una popolazione di insetti che si riproducono in una stagione bene definita. Diciamo la primavera. Se siamo interessati alla sua numerosità, l'unica variabile di stato della quale ci dobbiamo preoccupare è il numero  $x_t$  di individui presenti al tempo  $t$ .*

*Idealmente, vorremmo trovare una funzione di  $t$  che esprima (con una certa approssimazione) il numero di individui presenti, ma come procedere per farlo? Cercheremo di esprimere un legame*

“ragionevole” tra la numerosità della popolazione ad un dato stadio e quella allo stadio successivo (l’anno successivo nel nostro caso).

Supponiamo dunque di avere  $x_t > 0$  individui al tempo  $t$  e che alla primavera successiva nasca una certa frazione  $r \in [0, \infty)$  di questi insetti e che una certa frazione  $m \in [0, 1]$  muoia. (Il caso  $r > 1$  può significare una popolazione di insetti in cui ogni individuo è capace di mettere al mondo molti figli.) Cosicché avremo  $rx_t$  nuovi individui ma perderemo  $mx_t$  vecchi insetti. (Tanto per fare un esempio, potremmo avere  $r = 1.2$  e  $m = 0.7$  che significherebbe che dovremo aggiungere il 120% di individui, mentre il 70% muore.) Possiamo esprimere questa relazione in una formula:

$$x_{t+1} = x_t + rx_t - mx_t, \quad (4.1)$$

ovvero, posto  $\alpha = (1 + r - m)$ ,

$$x_{t+1} = \alpha x_t. \quad (4.2)$$

Notiamo che, secondo questa formula,  $x_{t+1}$  potrebbe anche non essere un intero. Questo non ci deve preoccupare eccessivamente dal momento che un modello esprime la realtà solo fino ad una certa approssimazione. In fondo, le modifiche necessarie per far sì che il valore espresso da questa formula sia sempre un intero servirebbero solo a rendere il modello più difficile da analizzare senza però alterare la sostanza delle previsioni che se ne possono trarre. In futuro non ci occuperemo più di questa questione.

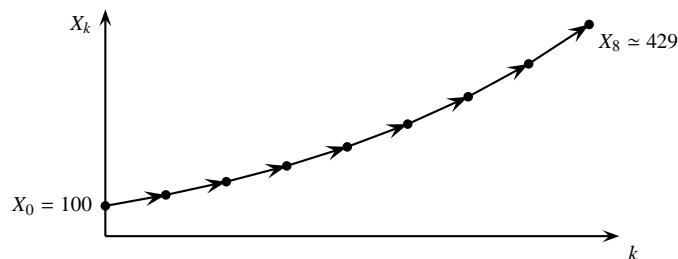
La legge, o modello, di evoluzione (4.2) è detta lineare. Chiaramente, se  $r > m$  allora  $\alpha > 1$ . In questo caso, come è facile vedere, la successione  $\{x_{t+n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  è monotona crescente e, per di più, tendente all’infinito (ricordiamoci che  $x_t > 0$ ). Infatti, posto  $t = t_0 + k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , si ha

$$x_{t_0+k+1} = \alpha x_{t_0+k} = \alpha(\alpha x_{t_0+k-1}) = \alpha^2 x_{t_0+k-1} = \dots = \alpha^{k+1} x_{t_0}.$$

O, in altri termini,  $x_{t_0+k} = \alpha^k x_{t_0}$ . Questa espressione può essere semplificata ponendo  $X_k = x_{t_0+k}$  e  $X_0 = x_{t_0}$ . In questa maniera, abbiamo la seguente relazione per ricorrenza:

$$\begin{cases} X_{k+1} = \alpha X_k, & \text{for } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ X_0 = x_{t_0}. \end{cases}$$

che definisce induttivamente  $X_k = \alpha^k x_{t_0}$ .



Crescita malthusiana di una popolazione per  $X_0 = 100$  e  $\alpha = 1.2$ .

Questa formula corrisponde al principio ecologico che una specie senza competitori, in un ambiente dotato di una quantità praticamente illimitata di spazio e risorse, si riproduce in maniera direttamente proporzionale al numero di individui presenti.<sup>1</sup>

Se il nostro scopo è descrivere l'andamento di una popolazione per periodi relativamente brevi e in presenza di grandi risorse, la relazione appena determinata può essere sufficiente anche se  $\alpha > 1$ . D'altronde, nel caso  $\alpha > 1$ , l'evoluzione della popolazione di insetti, così come determinata da questa relazione, non può essere realistica nel lungo termine. È chiaro infatti che i limiti imposti da risorse limitate non possono permettere una crescita arbitraria di una popolazione.

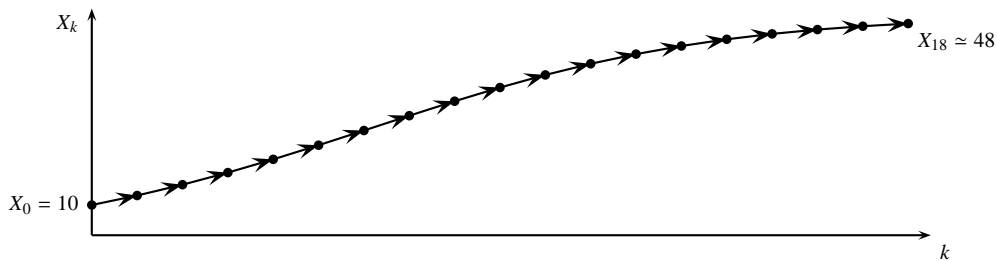
Un modello più aderente alla realtà si può ottenere ipotizzando che la mortalità non sia una costante ma dipenda a sua volta dalla numerosità della popolazione. Una possibile interpretazione di questo fatto è che la sovrappopolazione crea conflitti per l'accesso alle risorse e maggiore diffusione di malattie.

Per mantenere il modello semplice potremmo, per esempio, supporre che il tasso di mortalità sia proporzionale al numero di individui presenti, cioè  $m = sx_t$  per un opportuno coefficiente  $s > 0$ . In questa maniera, il modello diventa

$$x_{t+1} = (1 + r)x_t - sx_t^2, \quad (4.3)$$

che, a differenza di (4.1), è non lineare. Con la notazione usata sopra, abbiamo la seguente relazione per ricorrenza:

$$\begin{cases} X_{k+1} = (1 + r)X_k - sX_k^2, & \text{for } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ X_0 = x_{t_0}. \end{cases} \quad (4.4)$$



Crescita di una popolazione secondo la (4.4) per  $X_0 = 10$ ,  $\alpha = 1.25$  e  $s = 0.005$ .

Un'osservazione importante da fare è che, a seconda di come si prende  $X_0$ ,  $X_k$  potrebbe diventare nullo o anche negativo. Questo fatto va interpretato come l'estinzione della specie e, naturalmente, non ha senso calcolare ulteriori valori di  $X_k$ . In particolare, se nella (4.4) abbiamo  $X_k > (r + 1)/s$  per qualche  $k \in \mathbb{N}$ , allora  $X_{k+1} < 0$  cioè si ha l'estinzione. D'altra parte, se  $X_k < (r + 1)/s$  allora  $X_{k+1} > 0$ . Notiamo anche che prendendo  $X_0 = r/s$  si ottiene  $X_k \equiv r/s$ , cioè questo è un valore d'equilibrio. Si tratta di un valore molto importante infatti, dalla (4.4) segue subito che  $X_{k+1} > X_k$  se e soltanto se  $X_k < r/s$ . Se poi supponiamo  $r < 1$ , abbiamo che  $0 < X_k < r/s$  o  $X_k > 1/s$  implica  $X_{k+1} < r/s$  mentre  $r/s < X_k < 1/s$  implica  $X_{k+1} > r/s$ .

<sup>1</sup>Questo principio è stato enunciato da Thomas Malthus nel saggio "An essay on the principle of population, as it affects the future improvement of society with remarks on the speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and other writers". Pubblicato a Londra nel 1798. <http://www.gutenberg.org/files/4239/4239-h/4239-h.htm>

Osserviamo infine che l'unico valore limite non nullo a cui la successione  $X_k$  può tendere (ammesso che il limite esista) è proprio  $r/s$ . Infatti questa è l'unica soluzione non nulla dell'equazione  $x = (1+r)x - sx^2$ . (Torneremo più avanti su questo punto in maggiore dettaglio.)

Mettendo insieme le cose vediamo che (sempre nell'ipotesi  $0 < r < 1$ ) ci sono le seguenti possibilità (ci limitiamo a  $X_0 > 0$  altrimenti non ha senso procedere):

$0 < X_0 < \frac{r}{s}$	$X_k < \frac{r}{s}$ cresce in modo monotono verso $\frac{r}{s}$
$X_0 = \frac{r}{s}$	$X_k$ è costantemente uguale a $\frac{r}{s}$
$\frac{r}{s} < X_0 < \frac{1+r}{s}$	$X_k > \frac{r}{s}$ decresce in modo monotono verso $\frac{r}{s}$
$X_0 = \frac{1+r}{s}$	$X_k = \frac{1+r}{s}$ per $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\frac{1}{s} < X_0 < \frac{1+r}{s}$	$0 < X_1 < \frac{r}{s}$ da qui in poi la successione cresce in modo monotono verso $\frac{r}{s}$
$X_0 \geq \frac{1+r}{s}$	$X_1 \leq 0$ estinzione!

Possibili comportamenti della (4.4) a seconda della condizione iniziale.

Il valore  $r/s$  è detto valore massimo di carico dell'ecosistema.

Un po' più in generale potremmo supporre  $m = m_0 + sx_t$  per opportuni coefficienti  $m_0 > 0$  e  $s > 0$ . Tuttavia, se  $m_0 < r$ , questo non porta a comportamenti qualitativamente diversi da quello espresso dalla relazione (4.4).

Trovare un'espressione chiusa (cioè una formula dipendente solo da  $k$ ) per la  $X_k$  definita in (4.4) è difficile. Un problema per certi versi più interessante è stabilire in generale l'esistenza o meno di punti di equilibrio per la popolazione e se questo, ammesso che esista, sia stabile oppure no. Vedremo più avanti come affrontare queste questioni.

#### 4.1.2 Andamento dei prezzi

Sia  $p_t$  il prezzo (unitario) al tempo  $t$  di un certo prodotto – non ha importanza cosa. Supponiamo che sia la domanda  $D_t$  che l'offerta  $O_t$  di tale prodotto al tempo  $t$  siano funzioni dipendenti esclusivamente dal prezzo. Cioè supponiamo che esistano funzioni  $f$  e  $g$  tali che  $D_t = f(p_t)$  e  $O_t = g(p_t)$ . Se supponiamo che il mercato ad un certo istante sia in equilibrio, cioè che non ci sia merce invenduta o compratori senza merce da comprare, allora deve essere  $f(p_t) = D_t = O_t = g(p_t)$ . In altre parole, il prezzo di equilibrio deve corrispondere all'ascissa intersezione dei grafici di  $f$  e  $g$  (ammesso che esista). Per esempio, se poniamo

$$f(p) = a - bp, \quad g(p) = dp - c, \quad (4.5)$$

per opportuni coefficienti positivi  $a$ ,  $b$ ,  $d$  e  $c$ , abbiamo che i grafici di  $f$  e  $g$  sono rette che si intersecano per

$$p = \frac{a+c}{b+d},$$

che pertanto fornisce il prezzo di equilibrio.

Semberebbe perciò facile regolare il prezzo del nostro prodotto in modo tale che non ci siano rimanenze o compratori insoddisfatti. La situazione è però più complicata di così. Infatti, la produzione di beni da introdurre sul mercato richiede un certo tempo e quindi i produttori devono decidere in anticipo le quantità da introdurre sul mercato e il prezzo. Si pensi ad esempio a dei prodotti agricoli la cui semina deve essere decisa un anno (ma a volte anche di più per certe colture) prima della vendita del raccolto.

Al momento in cui pianificano la produzione, i produttori non conoscono il prezzo di vendita a cui potranno piazzare la loro merce una volta pronta. Se  $p_{t+1}^{\text{atteso}}$  è il prezzo che essi si aspettano al tempo  $t + 1$  basandosi sulle informazioni disponibili al tempo  $t$ , l'equazione di equilibrio diventa

$$g(p_{t+1}^{\text{atteso}}) = f(p_{t+1}),$$

che esprime che l'offerta  $O_{t+1}$  basata su prezzo atteso sia uguale alla domanda  $D_{t+1}$  che invece sarà basata sul prezzo reale al tempo  $t + 1$ . Ricordiamo che  $p_{t+1}^{\text{atteso}}$  è il prezzo che i produttori stimano per il tempo  $t + 1$  mentre  $p_{t+1}$  è il prezzo reale al tempo  $t + 1$ .

Una congettura particolarmente semplice, in mancanza di informazioni migliori, che i produttori potrebbero fare è che il prezzo al ciclo successivo sia uguale a quello attuale. Cioè  $p_{t+1}^{\text{atteso}} = p_t$ . Con quest'ipotesi, l'equazione di equilibrio si riduce a

$$f(p_{t+1}) = g(p). \quad (4.6)$$

Che se assumiamo la validità di (4.5) diventa

$$a - bp_{t+1} = dp_t - c,$$

ovvero

$$p_{t+1} = -\frac{d}{b}p_t + \frac{a+c}{b},$$

che è un modello lineare.

Posto  $t = t_0 + k$ ,  $P_k = p_{t_0+k}$  e  $P_0 = p_{t_0}$  si ottiene la seguente relazione ricorsiva:

$$\begin{cases} P_{k+1} = -\frac{d}{b}P_k + \frac{a+c}{b}, & \text{for } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ P_0 = p_{t_0}. \end{cases} \quad (4.7)$$

La cui soluzione può essere determinata esplicitamente. Infatti, procedendo in modo euristico troviamo che

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= -\frac{d}{b}P_k + \frac{a+c}{b} = -\frac{d}{b}\left(-\frac{d}{b}P_{k-1} + \frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\ &= \left(-\frac{d}{b}\right)^2\left(-\frac{d}{b}P_{k-2} + \frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} - \frac{d}{b}\frac{a+c}{b} = \dots \\ &\dots = \left(-\frac{d}{b}\right)^{k+1}P_0 + \frac{a+c}{b}\left(1 + \left(-\frac{d}{b}\right) + \dots + \left(-\frac{d}{b}\right)^k\right) = \left(-\frac{d}{b}\right)^{k+1}P_0 + \frac{a+c}{b}\sum_{i=0}^k\left(-\frac{d}{b}\right)^i, \end{aligned}$$

da cui segue la formula:

$$P_K = (-1)^k \frac{d^k}{b^k} P_0 + \frac{(a+c) \left( \left( -\frac{d}{b} \right)^k - 1 \right)}{b+d}.$$

Notiamo che l'uso di stime più complicate per il prezzo atteso, così come l'uso di funzioni più sofisticate delle  $f$  e  $g$  espresse dalle (4.5) potrebbero portare a modelli più complessi anche se forse più realistici.

### 4.1.3 Prede, predatori e competizione

Alcuni autori fanno coincidere la nascita dell'ecologia matematica con la formulazione, intorno agli anni '20 e '30, da parte dei matematici A. J. Lotka<sup>2</sup> e V. Volterra<sup>3</sup> di modelli dinamici per la descrizione delle interazioni tra specie che convivono sullo stesso territorio. Vito Volterra, in particolare, era stato stimolato a questi studi dal genero, il biologo Umberto d'Ancona, che si era interessato alle fluttuazioni periodiche osservate in alcune popolazioni ittiche dell'Adriatico.

Consideriamo due specie di animali che condividono lo stesso territorio. Supponendo che la prima sia l'unica fonte di sostentamento per la seconda, vogliamo descrivere l'interazione tra queste due specie.<sup>4</sup> I modelli che svilupperemo in questo paragrafo sono di tipo discreto (differentemente da quelli originali di Lotka e Volterra). Come vedremo più avanti, la versione discreta, almeno del primo modello non è una rappresentazione molto buona come del fenomeno reale per motivi intrinseci.

Facciamo l'ipotesi che, in assenza di interazione, il tasso di crescita delle prede e il tasso di mortalità (per mancanza di cibo) dei predatori siano costanti. Per descrivere l'interazione stessa, ipotizziamo che la probabilità d'incontro e cattura (con conseguente uccisione) di una preda da parte di un predatore sia proporzionale al prodotto delle densità delle popolazioni; in questo modo il numero di prede sottratte dall'ambiente è proporzionale al prodotto del numero di prede e di predatori. Similmente, per i predatori, supponiamo che questi traggano l'energia necessaria a riprodursi in modo proporzionale al numero di prede uccise.

Se  $x_t$  e  $y_t$  rappresentano il numero di prede e di predatori, rispettivamente, al tempo  $t$ , il modello che ne segue è:

$$\begin{cases} x_{t+1} = (a - by_t)x_t, \\ y_{t+1} = (cx_t - d)y_t, \end{cases}$$

dove  $a, b, c$  e  $d$  sono coefficienti positivi. Ponendo, come al solito,  $t = t_0 + k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_k = x_{t_0+k}$ ,  $Y_k = y_{t_0+k}$ ,  $X_0 = x_{t_0}$  e  $Y_0 = y_{t_0}$ , otteniamo la seguente relazione per ricorrenza:

$$\begin{cases} X_{k+1} = (a - bY_k)X_k, \\ Y_{k+1} = (cX_k - d)Y_k, \\ X_0 = x_{t_0}, \quad Y_0 = y_{t_0}. \end{cases} \quad \text{per } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (4.8)$$

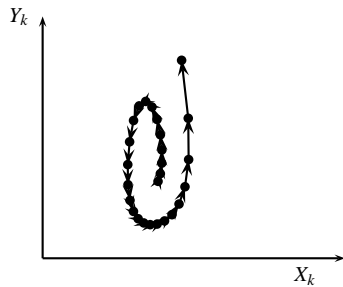
<sup>2</sup>Alfred James Lotka, 1880–1949.

<sup>3</sup>Vito Volterra, 1860–1940.

<sup>4</sup>Lotka, A.J., "Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems", Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., 6, 410415, (1920). Lotka, A.J., Elements of Physical Biology, Williams and Wilkins, (1925). V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars et Cie Éditeurs, Parigi, 1932.



Come vedremo, gli andamenti di  $X_k$  e  $Y_k$  sono di tipo oscillatorio. È facile capirlo intuitivamente: se ad un certo istante ci sono poche prede, i predatori non riescono a riprodursi abbastanza da compensare la mortalità e quindi il numero di questi ultimi inizia a diminuire. Questa diminuzione permette alle prede di aumentare nuovamente il proprio numero, ma l'aumentata disponibilità di risorse fa sì che i predatori possano nascere ma così facendo provocano una diminuzione nel numero delle prede...



Comportamento del sistema (4.8) per  $X_0 = 120$ ,  $Y_0 = 80$ ,  $a = 1.1$ ,  $b = 0.001$ ,  $c = 0.01$  e  $d = 0.1$ . Con gli stessi parametri, c'è un equilibrio per  $(X_0, Y_0) = (110, 100)$ ; in altre parole, scegliendo  $X_0$  e  $y_0$  a questo modo,  $X_k \equiv X_0$  e  $Y_k \equiv Y_0$ .

Consideriamo ora due specie che condividono la stessa nicchia ecologica.<sup>5</sup>

In questo caso, consideriamo per ciascuna specie un modello del tipo (4.3) in cui la mortalità aumenta proporzionalmente alla numerosità dell'altra specie (che consuma risorse). In breve, se  $x_t$  e  $y_t$  rappresentano la rispettiva numerosità delle due specie,

$$\begin{cases} x_{t+1} = (a_1 - b_1 x_t - c_1 y_t)x_t, \\ y_{t+1} = (a_2 - b_2 x_t - c_2 y_t)y_t. \end{cases}$$

dove i parametri sono tutti positivi. Posto, come al solito,  $t = t_0 + k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_k = x_{t_0+k}$ ,  $Y_k = y_{t_0+k}$ ,  $X_0 = x_{t_0}$  e  $Y_0 = y_{t_0}$ , si ottiene la seguente relazione per ricorrenza:

$$\begin{cases} X_{k+1} = (a_1 - b_1 X_k - c_1 Y_k)X_k, \\ Y_{k+1} = (a_2 - b_2 X_k - c_2 Y_k)Y_k, \\ X_0 = x_{t_0}, \quad Y_0 = y_{t_0}. \end{cases} \quad \text{per } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (4.9)$$

L'evoluzione qualitativa di questo modello dipende dalla scelta dei parametri. Vedremo che alcune scelte portano al cosiddetto principio di esclusione di Gause<sup>6</sup>, cioè che specie che occupano la stessa nicchia ecologica non possono coesistere a lungo sullo stesso territorio: prima o poi una di esse si estinguerà.

#### 4.1.4 Concorrenza e prezzi

Consideriamo due aziende che producono la stessa merce che immettono sullo stesso mercato. Esse si trovano in competizione tra loro. Lo scopo di ognuna di esse è massimizzare il proprio

<sup>5</sup>Anche questo tipo di modello trae ispirazione da un lavoro di V. Volterra: *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. Memorie della R. Accademia dei Lincei, s. VI, vol. II, 1926, pp. 31-113.

<sup>6</sup>Georgii Frantsevich Gause, 1910–1986.

profitto. Il modello che studiamo qui è basato su quello proposto nel 1838 da A. Cournot<sup>7</sup> nel suo trattato *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesse*.

Supponiamo che, come in agricoltura, ci siano periodi ben precisi di produzione alla fine dei quali sia necessario pianificare la produzione del ciclo successivo. Chiamiamo  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  le quantità di merce prodotte al tempo  $t$  dalle due aziende e  $p(t)$  il prezzo unitario. Ogni impresa deve decidere che quantità produrre al tempo  $t + 1$  in modo tale da rendere massimo il suo “profitto atteso”, cioè l’introito (il prodotto della quantità per il prezzo) meno il costo (costo unitario moltiplicato la quantità). Per l’impresa numero uno il profitto atteso al tempo  $t + 1$  è dato da

$$q_1(t + 1)p(t + 1) - c_1q_1(t + 1).$$

Qui  $c_1$  è il costo unitario della merce per l’industria numero uno.

Il prezzo  $p$  della merce dipenderà dalla quantità immessa sul mercato per cui ciascuna delle due industrie non può prescindere nelle sue decisioni da quello che farà l’altra. Infatti, pur di evitare che della merce rimanga invenduta i prezzi verranno abbassati. Se, come nel paragrafo 4.1.2,  $f$  rappresenta la funzione che fornisce la domanda in funzione del prezzo, supponendo che  $f$  sia invertibile, avremo  $p = f^{-1}(q_1 + q_2)$ . Per esempio se  $f$  è come in (4.5), ricaviamo

$$p = \frac{a - q_1 - q_2}{b}.$$

Inserendo questo prezzo nell’espressione del profitto atteso, otteniamo la funzione di profitto atteso per il produttore 1:

$$q_1(t + 1) \mapsto q_1(t + 1) \left( \frac{a - q_1(t + 1) - q_2^{\text{atteso}}(t + 1)}{b} - c_1 \right),$$

dove  $q_2^{\text{atteso}}(t + 1)$  è la quantità che il produttore numero uno si aspetta che l’altro introduca sul mercato. Come si vede subito, il massimo di questa funzione si ottiene scegliendo

$$q_1(t + 1) = \frac{1}{2} (a - bc_1 - q_2^{\text{atteso}}(t + 1)).$$

Non è sorprendente che questa scelta dipenda da ciò che ci si aspetta che faccia il produttore 2.

Per scegliere veramente  $q_1(t + 1)$ , dunque, bisogna fare una congettura sulle intenzioni del produttore 2. In mancanza di informazioni migliori, il produttore 1 suporrà che  $q_2^{\text{atteso}}(t + 1) = q_2(t)$ , cioè che il produttore due non cambi la propria produzione (questa è un’ipotesi semplificatoria simile a quella fatta nel paragrafo 4.1.2).

Supponiamo che le stesse considerazioni vengano fatte dal produttore numero 2. Allora avremo il seguente sistema che descrive la dinamica della produzione delle due industrie:

$$\begin{cases} q_1(t + 1) = \frac{1}{2} (a - bc_1 - q_2(t)), \\ q_2(t + 1) = \frac{1}{2} (a - bc_2 - q_1(t)). \end{cases} \quad (4.10)$$

Questo modello è noto come gioco di duopolio di Cournot e, nonostante le molte semplificazioni introdotte, esso è considerato molto importante in economia matematica.

<sup>7</sup>Antoine Augustin Cournot, 1801–1877.

Con le consuete convenzioni, il sistema (4.10) porta al sistema per ricorrenza

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1(k+1) = \frac{1}{2}(a - bc_1 - Q_2(k)), \\ Q_2(k+1) = \frac{1}{2}(a - bc_2 - Q_1(k)), \end{array} \right\} \text{ per } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (4.11)$$

$$Q_1(0) = q_1(t_0), \quad Q_2(0) = q_2(t_0).$$

## 4.2 Procedimento di iterazione e mappe definite per ricorrenza

In questa sezione consideriamo esclusivamente di successioni in  $\mathbb{R}$  e in  $\mathbb{R}^2$ . Tuttavia, alcune considerazioni e definizioni sono del tutto generali; queste le esprimeremo in  $\mathbb{R}^n$  dal momento che il farlo non comporterà un aggravio di tempo e fatica.

Ci occuperemo di successioni definite per ricorrenza. In generale, cioè, di successioni definite da regole del tipo

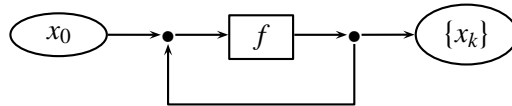
$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = F(k, x_k), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ x_0 = \xi_0 \end{array} \right.$$

dove  $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$  è assegnato e  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione data.

In realtà studieremo **esclusivamente** il caso particolare “autonomo” in cui la  $F$  dipende solo dalla seconda variabile, cioè  $F(k, x) = f(x)$ . In altri termini:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = f(x_k), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ x_0 = \xi_0 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Questa situazione può essere illustrata con un semplice diagramma:



Osserviamo che, se  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$  è definita da (4.12), allora possiamo scrivere, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,

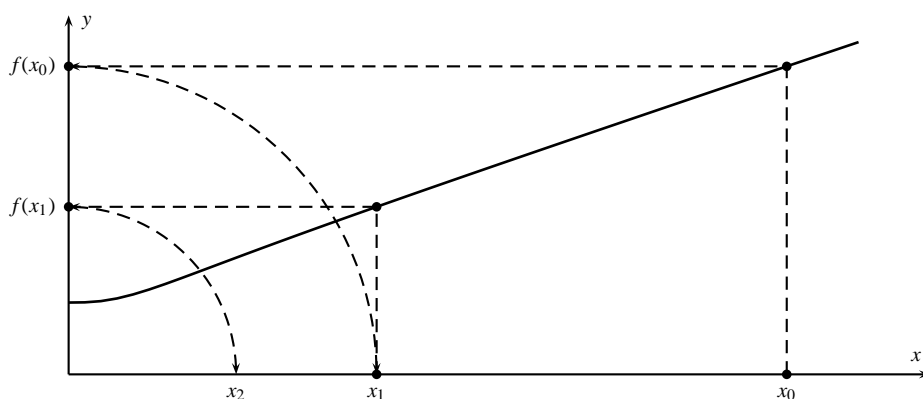
$$x_k = f(x_{k-1}) = f(f(x_{k-2})) = \dots = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ times}}(x_0) = f^k(x_0).$$

Qui “ $\circ$ ” indica la composizione di funzioni.

### 4.2.1 Successioni ricorsive in $\mathbb{R}$ , diagrammi a scala

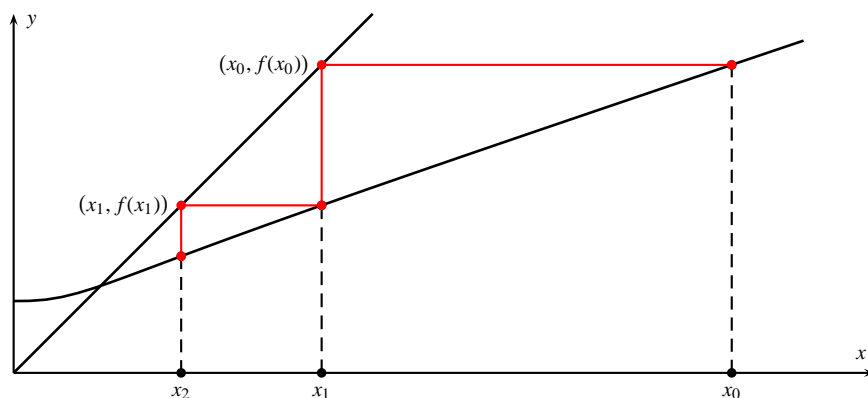
Nel caso scalare, se si sa disegnare il grafico di  $f$  la successione  $\{x_k\}$  definita da (4.12) può essere ottenuta (ovviamente in modo approssimato) con riga e compasso. Questo ci dà un modo geometrico di esplorare questo tipo di successioni.

In pratica, si disegna la parallela all'asse delle ordinate passante da  $x_0$  fino ad intersecare il grafico di  $f$  e dal punto trovato si conduce la parallela all'asse delle ascisse fino ad incontrare le ordinate. Il punto di intersezione sarà  $(0, f(x_0))$ . Centrando poi il compasso nell'origine si disegna la circonferenza per  $(0, f(x_0))$ . il punto d'intersezione di questa con l'asse delle ascisse ci fornisce  $x_1$ . Si ripete poi il procedimento a partire da  $x_1$ . Il procedimento è illustrato nella figura seguente:



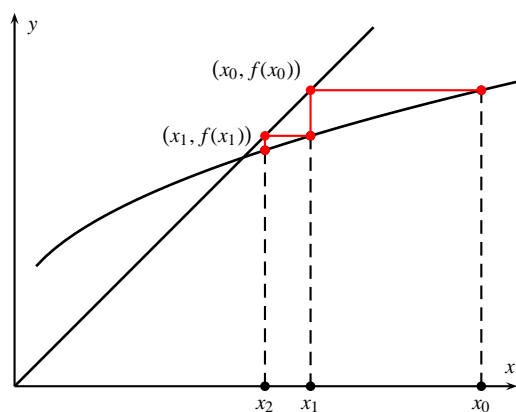
I primi termini della successione ricorsiva definita da (4.12) per  $f(x) = 1 + \frac{x^3}{4+3x^2}$ ,  $x_0 = 10$ .

In realtà si può anche fare a meno del compasso se possiamo disegnare la bisettrice  $b$  degli assi. Infatti, nei punti  $(x, y) \in b$  si ha  $x = y$ ; questo permette di riportare i valori di  $f(x_k)$  senza usare il compasso. Il procedimento così modificato è illustrato nelle seguenti figure:

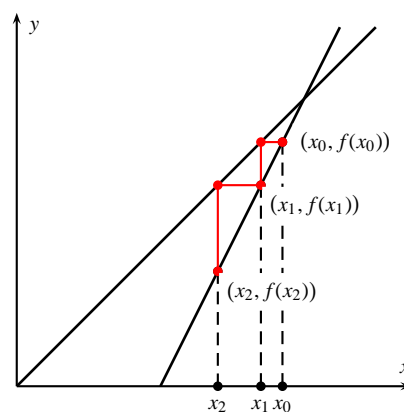


La successione della figura precedente con il metodo modificato.

I diagrammi come quello dell'ultima figura sono detti diagrammi a scala.

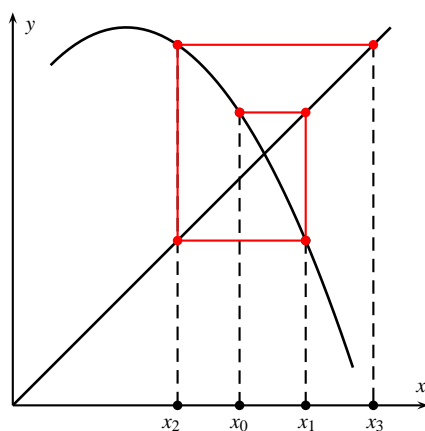


$$f(x) = 1 + \sqrt{3x/2}, x_0 = 13/2.$$

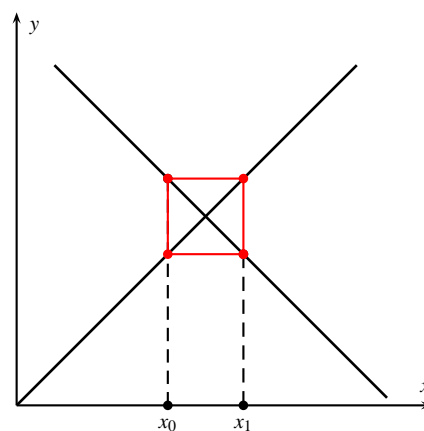


$$f(x) = 2(x-2), x_0 = 3.7.$$

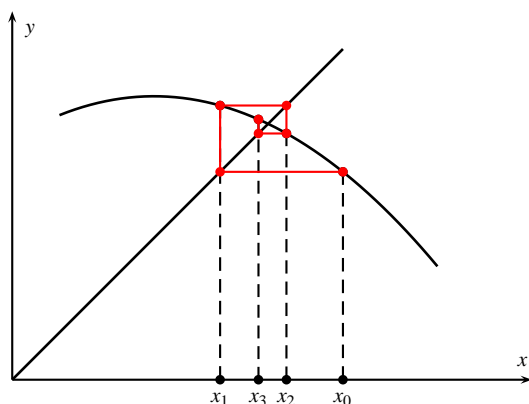
Sono anche possibili comportamenti di tipo “oscillatorio”, come illustrato dalle seguenti figure:



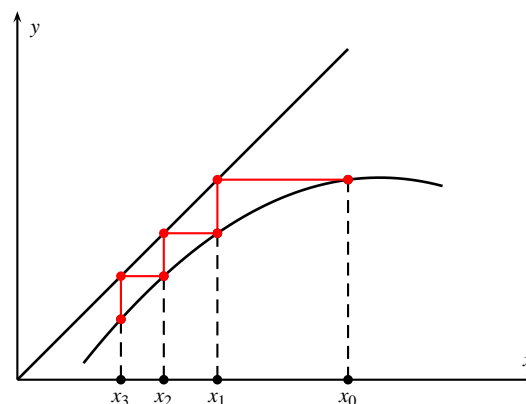
$$f(x) = 5 - (x - 3/2)^2 / 2, x_0 = 3.$$



$$f(x) = 5 - x, x_0 = 3.$$



$$f(x) = 3 - (x - 3/2)^2 / 5, x_0 = 3.5.$$



$$f(x) = 1 - (x - 3)^2 / 5 + x/3, x_0 = 3.5.$$

Queste figure suggeriscono l'importanza dei punti di intersezione tra la diagonale e il grafico di  $f$ , cioè dei punti fissi di  $f$ . Si intuisce inoltre che l'angolo con cui la diagonale ed il grafico si

incontrano determina, almeno localmente, il comportamento della successione. Queste cose sono l'argomento di paragrafi seguenti.

### 4.2.2 Limiti e punti fissi

Sia  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$  una successione. Ricordiamo che un suo punto di accumulazione  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  è tale che  $\forall \varepsilon > 0, \forall \bar{n} \in \mathbb{N}, \exists k \geq \bar{n}$  con la proprietà che  $\|\bar{x} - x_k\| < \varepsilon$ . La nozione di punto di accumulazione non deve essere confusa con quella di limite: se esiste  $x_\infty$  tale che  $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$  con la proprietà che  $\forall k \geq \bar{n}$  si ha  $\|x_\infty - x_k\| < \varepsilon$ , allora  $x_\infty$  è detto limite della successione  $x_k$ . Si dimostra facilmente che  $x_\infty$ , se esiste, è unico e si scrive

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

Notiamo che se il limite esiste allora è un punto limite.<sup>8</sup> Una successione che ammette limite è detta convergente.

**Esempio 4.2.1.** Se in (4.12) prendiamo  $f(x) = -x$  con  $\xi_0 = 1$ , otteniamo la successione  $x_k = (-1)^k$ . Come si vede subito,  $\pm 1$  sono i punti limite di questa successione che però non ha limite.

Per determinare il limite possiamo ricorrere al seguente utile risultato:

**Proposizione 4.2.2.** Siano  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  e  $f$  come in (4.12) per qualche  $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$  assegnato. Supponiamo che  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  sia continua. Allora,

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \quad \text{implica} \quad x_\infty = f(x_\infty).$$

La dimostrazione, molto elementare, è basata sulla continuità di  $f$  ed è lasciata al lettore.

Le soluzioni dell'equazione  $x = f(x)$  sono i cosiddetti punti fissi di  $f$ . Notiamo che, fissato  $\xi_0$  non necessariamente ogni soluzione di  $x = f(x)$  è il limite di  $\{x_k\}$ ; semplicemente, il limite va ricercato tra i punti fissi. Notiamo che, al variare di  $\xi_0$ , la successione cambia e il limite, se esiste, può cambiare ma è sempre da cercare nell'insieme delle soluzioni di quest'equazione. In particolare, scegliendo  $\xi_0$  tra i punti fissi di  $f$  abbiamo che  $x_k \equiv x_0 = \xi_0$  quindi  $\xi_0$  è il limite.

## 4.3 Orbite ed equilibri

Come abbiamo visto nella sezione precedente, le successioni definite da regole ricorsive del tipo (4.12) possono essere usate come modelli di fenomeni reali. (La successione rappresenta una sequenza di stati successivi del sistema oggetto di studio.) È quindi importante capire il comportamento della successione così definita al variare del punto iniziale. Spesso per fare questo viene

<sup>8</sup>I punti di accumulazione di  $\{x_k\}$  sono, in effetti, i punti di accumulazione dell'insieme  $O(x_0) := \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$  e non sono necessariamente unici. Si vede anche che, dato un punto di accumulazione  $\bar{x}$  di  $\{x_k\}$  esiste una sottosuccessione  $\{x_{k_r}\}$  tale che  $\bar{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} x_{k_r}$ . Ricordiamo che una sottosuccessione è una successione del tipo  $\{x_{k_r}\}$  dove  $\{k_r\}$  è una successione in  $\mathbb{N}$  strettamente crescente.

usato il linguaggio dei sistemi dinamici discreti. È altresì chiaro che i punti fissi della  $f$  in (4.12) rappresentano stati importanti: rappresentano gli stati in cui il sistema si trova in equilibrio.

Per ogni  $x_0$  consideriamo l'insieme

$$O(x_0) := \{f^k(x_0) : k \in \mathbb{N}\},$$

detto orbita di  $x_0$ . Conviene distinguere tra l'orbita di  $x_0$  e la sua traiettoria, cioè la successione  $\{f^k(x_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

Come abbiamo visto, se  $x_0$  è un punto fisso di  $f$  allora la sua orbita è il singolo  $x_0$  e la sua traiettoria è costante. Un altro tipo di traiettorie importanti sono quelle periodiche: Un'orbita  $O(x_0)$  è un  $r$ -ciclo,  $1 \leq r \in \mathbb{N}$ , se  $x_0 = f^r(x_0)$ . In questo caso la traiettoria si ripete ogni  $r$  elementi. Si dice che è  $r$ -periodica. Osserviamo che ogni elemento di un  $r$ -ciclo è punto iniziale di una traiettoria  $r$ -periodica. Se  $r = 1$  allora  $x_0$  è un equilibrio, dunque un punto fisso di  $f$ .

Se si considera la successione dell'esempio 4.2.1, si vede che  $O(1) = \{-1, +1\}$  è un 2-ciclo che coincide con  $O(-1)$ . Le traiettorie di  $+1$  e di  $-1$  però sono diverse. Sono, per così dire, sfasate di una unità.

Una questione importante riguarda la stabilità degli equilibri. Esistono molte nozioni di stabilità (la scelta dipende da cosa dobbiamo fare con il modello che stiamo analizzando). Noi useremo le seguenti:

**Definizione 4.3.1.** Un punto fisso  $\bar{x}$  è detto asintoticamente stabile (o attrattivo) se esiste  $\varepsilon > 0$  tale che

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x_0)$$

per ogni  $x_0$  tale che  $\|\bar{x} - x_0\| \leq \varepsilon$ .

In altre parole  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile se ogni traiettoria che parte sufficientemente vicino a  $\bar{x}$  tende a  $\bar{x}$ .

**Definizione 4.3.2.** Un punto fisso  $\bar{x}$  è detto stabile se esiste  $\delta > 0$  tale che  $\|\bar{x} - x_0\| \leq \delta$  implica  $\|f^k(x_0) - \bar{x}\| \leq \delta$ .

Un punto fisso che non è stabile è detto instabile. È molto utile anche la seguente definizione:

**Definizione 4.3.3.** Un punto fisso  $\bar{x}$  è detto repulsivo se per ogni  $x_0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $\|f^k(x_0) - \bar{x}\| > \delta$  per infiniti valori di  $k$ .

Chiaramente, un equilibrio repulsivo è instabile e viceversa. Attenzione che la repulsività non è l'opposto dell'attrattività. Si pensi sempre all'esempio 4.2.1.

### 4.3.1 Caso scalare

Consideriamo il caso  $n = 1$ . Cioè supponiamo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Cerchiamo di caratterizzare il comportamento della successione (4.12) quando il punto iniziale è scelto vicino ad un punto di equilibrio.

Consideriamo dapprima il caso in cui  $f(x) = ax + b$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  assegnati. Per trovare i punti fissi consideriamo l'equazione  $ax + b = x$ . Chiaramente, se un punto fisso esiste allora è unico. Ci sono due possibilità:

- Se  $a = 1$  non ci sono punti fissi a meno che  $b = 0$  e, in questo caso tutti i punti sono fissi, quindi tutte le traiettorie sono costanti.
- Se  $a \neq 1$  l'unico punto fisso è  $\bar{x} := \frac{b}{1-a}$ .

Se  $a \neq 1$  siamo interessati al comportamento della successione (4.12) quando il punto iniziale è scelto vicino a  $\frac{b}{1-a}$ . Osserviamo che, posto  $y_k = x_k + b/(a-1)$ , otteniamo che

$$\begin{cases} y_{k+1} = ay_k, & k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ y_0 = \xi_0 + \frac{b}{a-1} \end{cases} \quad (4.13)$$

Possiamo quindi studiare la successione  $y_k$  (che è più semplice) vicino al suo unico punto fisso  $\bar{y} := 0$ . Consideriamo quattro possibilità:

- Se  $a > 1$ , la (4.13) ci dice che  $y_k$  è monotona, crescente se  $y_0 > 0$  e decrescente se  $y_0 < 0$ .
- Se  $a = -1$ , la traiettoria è periodica di periodo 2.
- Se  $a < -1$ , la (4.13) ci dice che  $|y_k|$  è monotona crescente e, siccome i segni degli  $y_k$  si alternano,  $y_k$  diverge oscillando.
- Se  $0 < a < 1$ , la (4.13) ci dice che  $y_k$  è monotona,
  - decrescente positiva se  $y_0 > 0$ ,
  - crescente negativa se  $y_0 < 0$ .

in entrambi i casi  $y_k$  è convergente.

- Se  $-1 < a < 0$ , la (4.13) ci dice che  $|y_k|$  è monotona decrescente e, siccome i segni degli  $y_k$  si alternano,  $y_k$  converge oscillando.
- Se  $a = 0$ ,  $y_k = 0$  per ogni  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ .

Ricordando il legame di  $y_k$  con  $x_k$ , possiamo riassumere questa discussione nella seguente tabella:

$ a  < 1$	$\bar{x}$ è asintoticamente stabile	Se $0 < a < 1$ la successione è monotona, se $a = 0$ è costante, se $-1 < a < 0$ converge oscillando
$a = 1$	Tutti i punti sono d'equilibrio. Tutte le traiettorie sono costanti	
$a = -1$	$\bar{x}$ è stabile	Le traiettorie sono 2-periodiche
$ a  > 1$	$\bar{x}$ è instabile	Se $a > 1$ la successione è monotona divergente, se $a < -1$ diverge oscillando

Consideriamo ora, più in generale, il caso non lineare. Supponiamo sempre che la funzione  $f$  sia differenziabile. Vale il seguente risultato:



**Teorema 4.3.1.** *Sia  $\bar{x}$  un punto fisso di  $f$ . Sia  $I$  un intervallo contenente  $\bar{x}$  nel suo interno e tale che  $|f'(x)| \leq 1$  (eccettuato possibilmente in  $\bar{x}$ ). Allora  $\bar{x}$  è stabile.*

*Dimostrazione.* Se  $x_0 \in I$ , per il teorema del valor medio si ha, per qualche  $c \in I$ ,

$$|x_1 - \bar{x}| = |f(x_0) - f(\bar{x})| = f'(c)|x_0 - \bar{x}| \leq |x_0 - \bar{x}|.$$

Dunque, induttivamente

$$|x_k - \bar{x}| = |f(x_{k-1}) - f(\bar{x})| = f'(c)|x_{k-1} - \bar{x}| \leq |x_{k-1} - \bar{x}| \leq |x_0 - \bar{x}|,$$

da cui la stabilità. □

*La stabilità asintotica è leggermente più difficile da determinare.*

**Teorema 4.3.2.** *Sia  $\bar{x}$  un punto fisso di  $f$ . Supponiamo che  $f$  sia differenziabile con continuità e che  $|f'(\bar{x})| < 1$ . Allora  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $\delta$  un numero tale che  $|f'(\bar{x})| < \delta < 1$ . Allora (è una conseguenza del teorema della permanenza del segno) esiste un intervallo  $I$  che contiene  $\bar{x}$  al suo interno tale che  $|f'(x)| < \delta$  per ogni  $x \in I$ . Prendiamo  $x_0 \in I$ . Per il teorema del valor medio, per qualche  $c \in I$ ,

$$|x_1 - \bar{x}| = |f(x_0) - f(\bar{x})| = f'(c)|x_0 - \bar{x}| \leq \delta|x_0 - \bar{x}|.$$

Quindi  $x_1 \in I$ . Applicando questa disuguaglianza induttivamente otteniamo

$$|x_k - \bar{x}| = |f(x_{k-1}) - f(\bar{x})| \leq \delta|x_{k-1} - \bar{x}| \leq \delta^2|x_{k-2} - \bar{x}| \dots \leq \delta^k|x_0 - \bar{x}|.$$

Siccome  $\delta \in (0, 1)$  si ha  $\delta^k \rightarrow 0$ , da cui la tesi. □

**Osservazione 4.3.3.** *La disuguaglianze ottenuta nella dimostrazione del teorema 4.3.2 possono essere usate per ottenere una stima della velocità di convergenza della traiettoria. Infatti,*

$$|x_0 - \bar{x}| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - \bar{x}|, \quad e \quad |x_1 - \bar{x}| \leq \delta|x_0 - \bar{x}|$$

forniscono  $|x_0 - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-\delta}|x_1 - \bar{x}|$ . Combinando questa con l'ultima disuguaglianza della dimostrazione del teorema 4.3.2, otteniamo

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{\delta^k}{1-\delta}|x_1 - \bar{x}|.$$

Si possono inoltre provare, ma non lo faremo, i seguenti due teoremi:

**Teorema 4.3.4.** *Sia  $\bar{x}$  un punto fisso di  $f$ . Sia  $I$  un intervallo contenente  $\bar{x}$  nel suo interno e tale che  $|f'(x)| \geq 1$  (eccettuato possibilmente in  $\bar{x}$ ). Allora  $\bar{x}$  è un repulsore.*

**Teorema 4.3.5.** *Sia  $\bar{x}$  un punto fisso di  $f$ . Supponiamo che  $f$  sia differenziabile con continuità e che  $|f'(\bar{x})| > 1$ . Allora  $\bar{x}$  è un repulsore.*

### 4.3.2 Particolari successioni nel piano

In questo paragrafo supponiamo  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Consideriamo dapprima mappe affini, cioè della forma

$$f(x) = Ax + B$$

dove  $A$  è una matrice  $2 \times 2$  e  $B$  è un vettore di  $\mathbb{R}^2$ . Supponiamo che  $A$  sia tale che  $A - I$  è non singolare. Ci interessa stabilire la natura dell'unico punto fisso di  $f$ .

Cominciamo con l'osservare che se la matrice  $A$  è diagonalizzabile<sup>9</sup> allora, a meno di un cambiamento di coordinate, lo studio della successione (vettoriale) data da (4.12) si riduce allo studio di una coppia di successioni del tipo di quelle studiate nel paragrafo precedente. Cioè

$$\begin{cases} x_{k+1} = \lambda_1 x_k + b_1, \\ y_{k+1} = \lambda_2 y_k + b_2, \end{cases}$$

i cui coefficienti  $\lambda_1, \lambda_2$  sono gli autovalori di  $A$ . È facile allora studiare la successione  $(x_k, y_k)$ . In particolare, si vede che se entrambi gli autovalori sono in valore assoluto più piccoli di 1 si deve avere un equilibrio asintoticamente stabile.

Ricordiamo un fatto generale:  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ . Quindi se  $|\det(A)| > 1$  almeno uno dei due autovalori deve essere maggiore in valore assoluto di 1, in tale caso non può esserci stabilità.

Consideriamo ora  $f$  non lineare. Argomentazioni molto simili a quelle sviluppate nel paragrafo precedente permettono di dare condizioni per la stabilità o instabilità. Questo è facile se entrambi gli autovalori del sistema linearizzato, cioè di  $f'(\bar{x})$ , sono maggiori o minori di uno. Lasciamo al lettore il compito di formulare questi risultati. Osserviamo che in  $\mathbb{R}^2$  può presentarsi il caso che un autovalore sia maggiore e un altro minore di uno. In tale caso  $\bar{x}$  non è nè un attrattore nè un repulsore, si parla di punto sella.

#### Il teorema delle contrazioni

**Teorema 4.3.6** (S. Banach<sup>10</sup>). Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione tale che

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{per } L < 1.$$

allora  $f$  ammette un'unico punto fisso  $\bar{x}$  e la successione (4.12) converge a  $\bar{x}$  qualunque sia il suo punto iniziale.

È facile dedurre che se  $f$  è differenziabile con continuità,  $\bar{x}$  è un punto fisso con  $\|f'(\bar{x})\| < 1$  allora esiste una palla centrata in  $\bar{x}$  a partire dai cui punti la traiettoria converge a  $\bar{x}$ . Notiamo che qui la norma di  $f'$  è intesa nel senso degli operatori; se in  $\mathbb{R}^2$  mettiamo la norma euclidea, allora la norma di  $f'$  è quella spettrale (nel senso delle matrici).

**Esercizio 4.3.7.** Studiare gli equilibri dei modelli presentati nel paragrafo 4.1.

<sup>9</sup>Si può per esempio testare se gli autovalori sono distinti o, più in generale, se la loro molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica. Anche, più semplicemente, se la matrice è simmetrica

<sup>10</sup>Stefan Banach, 1892–1945.

---

## **Riferimenti ed approfondimenti**

- ✓ *Gian Italo Bischi, Rosa Carini, Laura Giardini, Paolo Tenti. Sulle orme del caos. Bruno Mondadori. Pavia, 2004.*
- ✓ *Mario Martelli. Introduction to discrete dynamical systems and chaos. Wiley interscience, New York, 1999.*

## Lezione 5

# Equazioni alle differenze e modelli

Ci occupiamo ora di un tema importante dal punto di vista applicativo ma che viene spesso omesso nei corsi di base: le equazioni alle differenze. Si tratta di un argomento relativamente semplice ma che ha alcuni aspetti interessanti come, per esempio, un certo grado di similitudine con la teoria delle equazioni differenziali ordinarie e un'indubbia rilevanza per ciò che riguarda l'approssimazione e soluzione numerica di queste ultime. Non si deve però dimenticare che, dal punto di vista applicativo, le equazioni alle differenze hanno un ruolo importante nella modellazione di quei fenomeni che hanno un'evoluzione, per così dire, "a balzi". In questa lezione vedremo qualche modello di questo tipo, altri ne abbiamo visti in quella precedente, ma porremo principalmente l'accento sugli aspetti matematici.

### 5.1 Calcolo delle differenze finite

Definiamo gli operatori  $E$  e  $\Delta$ , detti rispettivamente operatore di shift e operatore differenza, nello spazio delle funzioni  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nel modo seguente:

$$(Ey)(x) := y(x + 1), \quad \text{e} \quad (\Delta y)(x) := y(x + 1) - y(x),$$

per ogni funzione  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; inoltre con  $E^n$  e  $\Delta^n$ ,  $1 < n \in \mathbb{N}$ , indicheremo rispettivamente gli operatori definiti da  $E(E^{n-1}y)$  e  $\Delta(\Delta^{n-1}y)$ , e  $E^0 = \Delta^0 = I$ , dove  $I$  indica l'operatore identità.

#### 5.1.1 Proprietà principali di $E$ e $\Delta$

Chiaramente, valgono le seguenti proprietà la cui dimostrazione è banale: Per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq n \in \mathbb{N}$  e  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

- $\Delta y(x) = Ey(x) - y(x)$ , cioè  $\Delta = E - I$ ;
- $E^n y(x) = y(x + n)$  e

$$\Delta^n y(x) = (E - I)^n y(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k y(x), \quad (5.1)$$

ovvero,  $\Delta^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k$ . Similmente,  $E^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k$ ;

- se  $y_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a_1, \dots, a_k, i = 1, \dots, k$ , sono funzioni e costanti assegnate,  $E(\sum_{i=1}^k a_i y_i)(x) = \sum_{i=1}^k (a_i E y_i(x))$ , e  $\Delta(\sum_{i=1}^k a_i y_i)(x) = \sum_{i=1}^k (a_i \Delta y_i(x))$ ;
- $\Delta E = E \Delta$ .

Conviene introdurre la seguente notazione:

Per  $n = 1, 2, 3, \dots$ , poniamo  $x^n := x(x-1)(x-2) \cdots (x-(n-1))$  e  $x^0 := 1$ .

Le espressioni  $x^n$  sono dette potenze fattoriali discendenti della  $x$ .<sup>1</sup>

Si verifica che, per  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\begin{aligned} \Delta x^k &= (x+1)^k - x^k = \\ &= (x+1)x(x-1) \cdots (x-(k-2)) - x(x-1)(x-2) \cdots (x-(k-1)) = \\ &= x(x-1)(x-2) \cdots (x-(k-2)) [(x+1) - (x-(k-1))] = kx^{k-1}. \end{aligned}$$

Dunque, per  $n \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^n x^m = n! x^{m-n}$ , in particolare  $\Delta^n x^n = n!$ . Notiamo che, invece, dalla (5.1) segue, prendendo  $y(x) = x^n$ ,

$$\Delta^n x^m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (x+k)^m, \quad (5.2)$$

Vale la seguente proposizione la cui dimostrazione, che può essere fatta per induzione, omettiamo:<sup>2</sup>

**Proposizione 5.1.1.** Se  $y$  è un polinomio di grado  $n$  allora  $\Delta^n y(x)$  è costante e, conseguentemente,  $\Delta^p y(x) \equiv 0$  per ogni  $n < p \in \mathbb{N}$ .

Siano  $u$  e  $v$  funzioni assegnate. Una formula importante è la seguente:

$$\Delta[uv](x) = Eu(x)\Delta v(x) + v(x)\Delta u(x) = Ev(x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x). \quad (5.3)$$

Similmente,

$$\Delta \frac{u}{v}(x) = \frac{v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x)Ev(x)}, \quad \text{se } v(x)Ev(x) \neq 0. \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>È possibile introdurre questa nozione anche per valori più generali dell'esponente. Per esempio ponendo

$$x^{-n} := \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)}, \quad \text{se } 0 < n \in \mathbb{N}.$$

abbiamo una legge degli esponenti:  $x^{m+n} = x^m(x+n)^n$  e, forse più importante la relazione  $\Delta x^m = mx^{m-1}$  funziona anche con  $m$  intero negativo.

<sup>2</sup>Ricordiamo però che, usando la formula del polinomio interpolante di Newton, data una funzione  $y$ :

$$f(x) := \Delta^0 y(x_0) + \Delta^1 y(x_0)(x-x_0)^1 + \dots + \Delta^n y(x_0)(x-x_0)^n$$

è un polinomio di grado  $n$  che coincide con  $y$  nei punti di ascissa  $x_0 + k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Quindi, se  $y$  è a sua volta un polinomio di grado  $n$ ,  $\Delta^n y(x_0)$  è il coefficiente del termine di grado massimo di  $y$  per il principio d'identità dei polinomi, e dunque non può dipendere da  $x_0$ .

**Esempio 5.1.2.** Supponiamo che il prezzo  $P(t)$  dei titoli di una certa banca all'istante  $t$  sia legato alla quantità di denaro liquido  $L(t)$  depositato e al valore del totale dei titoli  $T(t)$  emessi dalla banca stessa, mediante la legge

$$P(t) = k \frac{L(t)}{T(t)},$$

con  $k > 0$  una costante nota. Se conosciamo il variare  $\Delta L(t)$  e  $\Delta T(t)$  delle quantità  $L$  e  $T$  nell'intervallo di tempo  $[t, t + 1]$ , possiamo calcolare la variazione di  $P$  nello stesso intervallo per mezzo della formula (5.4):

$$\Delta P(t) = k \frac{T(t)\Delta L(t) - L(t)\Delta T(t)}{T(t)ET(t)} = k \frac{T(t)\Delta L(t) - L(t)\Delta T(t)}{T(t)(T(t) + \Delta T(t))}.$$

### 5.1.2 Gli operatori inversi di $E$ e $\Delta$

Data una qualunque funzione  $y$  poniamo  $E^{-1}y(x) := y(x - 1)$ . In questo modo  $EE^{-1} = E^{-1}E = I$ . Chiaramente  $E$  soddisferà la legge degli esponenti.

L'inversa di  $\Delta$  è un po' più complicata:  $\Delta^{-1}$  deve essere tale che se  $Y(x) = \Delta^{-1}y(x)$  allora  $\Delta Y(x) = y(x)$ . Come possiamo scrivere un tale operatore inverso? Decrivere esplicitamente  $\Delta^{-1}$  è un po' complicato, limitiamoci a farlo in un caso particolare. Consideriamo dapprima il caso in cui  $x = k \in \mathbb{N}$ . Allora, comunque fissato  $k_0 \in \mathbb{N}$ , poniamo

$$Y(k) = \sum_{r=k_0}^{k-1} y(r), \quad \text{per } k > k_0.$$

Allora si ha  $\Delta Y(k) = y(k)$  e il valore scelto per  $k_0$  è irrilevante (Attenzione! La linearità di  $\Delta$  è irrilevante per questo passaggio). Per questo motivo  $\Delta^{-1}y(x)$  è detta una somma indefinita di  $y$ .<sup>3</sup>

Notiamo che,  $\Delta^{-1}y(x)$  non è definito in modo univoco; infatti, se  $Y(x) = \Delta^{-1}y(x)$ , allora  $\hat{Y}(x) := Y(x) + C$  con  $C$  costante ha ancora la proprietà che  $\Delta \hat{Y}(x) = y(x)$ . In generale,

**Teorema 5.1.3.** Se  $Y_1$  e  $Y_2$  sono tali che  $\Delta Y_1(x) = \Delta Y_2(x) = y(x)$ , allora  $x \mapsto Y_1(x) - Y_2(x)$  è una funzione di periodo  $h$ .

*Dimostrazione.* Basta osservare che  $\Delta(Y_1 - Y_2)(x) = y(x) - y(x) = 0$ . □

Il teorema prova che per trovare tutte le somme indefinite di  $y$  basta conoscerne una. Chiamiamola  $Y$ . Qualunque somma indefinita sarà allora della forma  $Y(x) + p(x)$  dove  $p$  è una qualunque funzione di periodo  $h$ .

<sup>3</sup>Tanto per curiosità consideriamo il caso  $x \in \mathbb{R}$  qualunque. Non è difficile vedere che

$$\Delta \left( \sum_{r=k_0}^{\lfloor x \rfloor - 1} y(r + x - \lfloor x \rfloor) \right) = y(x),$$

purché  $k_0 \in \mathbb{Z}$  sia minore di  $\lfloor x \rfloor - 1$ . Ricordiamo che  $\lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ .

Una proprietà importante dell'operatore di somma indefinita  $\Delta^{-1}$  è la sua linearità:

Date funzioni  $y_1, \dots, y_n$  e costanti  $a_1, \dots, a_n$ , si ha

$$\Delta^{-1} \sum_{k=1}^n a_k y_k(x) = \sum_{k=1}^n a_k \Delta^{-1} y_k(x).$$

La dimostrazione di questo fatto è basata sulla linearità di  $\Delta$  ed è lasciata al lettore.

**Esempio 5.1.4.** Troviamo  $\Delta^{-1} x^3$ . Osserviamo che  $x^3 = x^{(3)} + a_2 x^{(2)} + a_1 x^{(1)}$  con  $a_1, a_2$  costanti opportune. Per trovarle poniamo  $x = 1$  e  $x = 2$  in quest'equazione e risolviamo rispetto ad  $a_1$  e  $a_2$ . Si ottiene,  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 3$ ; quindi

$$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Siccome  $\Delta^{-1} x^{\underline{n}} = x^{\underline{n+1}}/n + 1$ , la linearità di  $\Delta^{-1}$  ci dice che

$$\Delta^{-1} x^3 = \frac{x^{\underline{4}}}{4} + 3 \frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2} + p(x) = \frac{x^{\underline{4}}}{4} + x^{\underline{3}} + \frac{x^{\underline{2}}}{2} + p(x).$$

per una qualunque funzione 1-periodica  $p$ .

**Esempio 5.1.5.** Osserviamo che, dato  $0 < c \neq 1$ ,  $\Delta c^x = c^x(c - 1)$ . Dunque

$$\Delta^{-1} c^x = \frac{c^x}{c - 1}.$$

Se ci limitiamo a  $x \in \mathbb{N}$  possiamo permettere anche  $c < 0$  e la formula sopra rimane vera.

L'operatore  $\Delta^{-1}$  è utile per esplicitare il calcolo di somme finite:

Se  $Y$  è una somma indefinita di  $y$ , allora

$$\sum_{k=a}^b y(k) = Y(b) - Y(a).$$

Per l'esempio 5.1.5, allora si ha

$$\sum_{k=a}^b c^x = \frac{c^b - c^a}{c - 1},$$

se  $0 < c \neq 1$ .

**Osservazione 5.1.6.** Si potrebbe dimostrare, come conseguenza delle formule per le potenze fattoriali discendenti, che

$$\sum_{0 \leq k < n} k^m = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m + 1}$$

per tutti gli interi (anche negativi)  $m \neq -1$ . Si noti la somiglianza con le formule note per gli integrali.

### 5.1.3 La formula di somma per parti

Dall'equazione (5.3) segue che, per funzioni  $u$  e  $v$ ,

$$\Delta^{-1}(u\Delta v) = uv - \Delta^{-1}(Ev\Delta u). \quad (5.5)$$

Questa formula è detta di somma per parti.

**Esempio 5.1.7.** Applicando (5.5), si ha

$$\Delta^{-1}x2^x = x2^x - \Delta^{-1}2^x.$$

Ne segue

$$\sum_{k=0}^n k2^k = k2^k \Big|_{k=0}^{k=n} - \sum_{k=0}^n 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

In generale, date  $f$  e  $g$ , la (5.5) implica

$$\sum_{k=a}^b f(k)\Delta g(k) = f(b+1)g(b+1) - f(a)g(a) - \sum_{k=a}^b g(k+1)\Delta f(k)$$

Potremmo ottenere una questa formula (o meglio una sua forma equivalente) anche in modo più diretto:

Date due successioni  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  e posto  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  e  $A_{-1} = 0$  si ha che, per ogni  $0 \leq p \leq q$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q a_n b_n &= \sum_{n=p}^q (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^q A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p. \end{aligned}$$

## 5.2 Equazioni alle differenze

Con “equazione alle differenze” intendiamo un’equazione che mette in relazione i valori di una funzione  $y(x)$  con una o più delle sue differenze  $\Delta y(x)$ ,  $\Delta^2 y(x)$ , ... per ognuno dei valori della variabile indipendente  $x$  che si suppone prenda valori in un sottoinsieme  $S \subseteq \mathbb{Z}$  o  $S \subseteq \mathbb{N}$  formato da valori consecutivi. In altre parole, un’equazione alle differenze può essere scritta nella forma seguente:

$$F(k, y_k, \Delta y_k, \dots, \Delta^n y_k) = 0, \quad (5.6)$$

dove si è posto  $x = k \in S$  e scritto  $y_k$  in luogo di  $y(k)$ , e  $F$  è una qualche funzione.



Per esempio, sono equazioni alle differenze le seguenti:

$$\Delta y_k + 2y_k = 0, \quad (5.7)$$

$$\Delta^2 y_k + 2\Delta y_k + y_k = 1, \quad (5.8)$$

$$\Delta^2 y_k - y_k = 0, \quad (5.9)$$

$$y_k \Delta^2 y_k - k^2 y_k = k + 3, \quad (5.10)$$

$$y_k^2 + (\Delta y_k)^2 - 2y_k \Delta y_k + 1 = 0, \quad (5.11)$$

$$y_k^2 + (\Delta y_k)^2 = 1, \quad (5.12)$$

Saremmo tentati di definire l'ordine di una equazione alle differenze come il più alto ordine di differenziazione che compare nell'equazione stessa. Questo però potrebbe creare qualche confusione. Per esempio l'equazione (5.8), può essere scritta esplicitamente come

$$y_{k+2} = 1,$$

che, posto  $\eta_k = y_{k+2}$ , diventa la banale  $\eta_k = 1$  (che sarebbe, secondo una tale "definizione", di ordine 0). Un'osservazione simile si può fare per l'equazione (5.9). Per questo motivo ci limiteremo, più avanti, a dare la definizione di ordine per un'equazione lineare.

### 5.2.1 Soluzioni

Consideriamo la nozione di soluzione per un'equazione in forma (5.6).

**Definizione 5.2.1.** Una successione  $\{\eta_k\}_{k \in S}$  è una soluzione di (5.6) se

$$F(k, \eta_k, \Delta \eta_k, \dots, \Delta^n \eta_k) = 0,$$

per ogni  $k \in S$ .

In altre parole una soluzione è una successione (in  $S$ ) che inserita nella (5.6) la rende un'identità (sempre in  $S$ ).

Una cosa da osservare è che un'equazione alle differenze potrebbe non avere alcuna soluzione. Per esempio, la (5.11) potrebbe essere riscritta come  $(y_k - \Delta y_k)^2 = -1$  che non può avere soluzioni (qualunque sia  $S$ ).

Se  $n_0 = \min S$  chiamiamo problema ai valori iniziali il seguente

$$\begin{cases} F(k, y_k, \Delta y_k, \dots, \Delta^n y_k) = 0, & k \in S \\ y_{n_0} = \bar{y}_0, \dots, y_{n_0+n-1} = \bar{y}_{n-1}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Chiaramente questa definizione ha senso se  $n_0, \dots, n-1$  appartengono a  $S$ . Una soluzione  $\{\eta_k\}_{k \in S}$  di (5.6) è una soluzione di (5.13) se soddisfa anche le condizioni iniziali, cioè  $\eta_r = \bar{y}_r$  per  $r = n_0, \dots, n-1$ .

Notiamo che, anche se una soluzione di (5.13) esiste non è per niente detto che sia unica anche a partire da uniche condizioni. Se consideriamo la (5.12) con  $S = \mathbb{N}$ , le successioni  $\{0, 1, 1, \dots\}$  e  $\{0, -1, -1, \dots\}$  sono entrambe soluzioni che soddisfano la stessa condizione iniziale  $y_0 = 0$ .

Consideriamo una classe di equazioni che hanno la bella proprietà che il problema ai valori iniziali ammette unica soluzione. Diremo che un'equazione alle differenze è in forma normale se può essere scritta nella forma

$$\Delta^n y_k = f(k, y_k, \Delta y_k, \dots, \Delta^{n-1} y_k), \quad (5.14)$$

per un'opportuna funzione  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se teniamo conto della (5.2) e definiamo la funzione  $\varphi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  come segue

$$\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = f\left(x_0, x_2 - x_1, x_3 - 2x_2 + x_1, \dots, \sum_{r=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-r} x_r\right)$$

troviamo che la (5.14) può essere riscritta come nella forma seguente:

$$y_{k+n} = \varphi(k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n-1}).$$

Vale il seguente semplice fatto:

**Teorema 5.2.1.** *Supponiamo che  $n_0, \dots, n-1$  siano i primi elementi di  $S$ . Allora, il problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} \Delta^n y_k = f(k, y_k, \Delta y_k, \dots, \Delta^{n-1} y_k), & k \in S \\ y_{n_0} = \bar{y}_0, \dots, y_{n_0+n-1} = \bar{y}_{n-1}, \end{cases}$$

o, in modo equivalente,

$$\begin{cases} y_{k+n} = \varphi(k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n-1}), & k \in S \\ y_{n_0} = \bar{y}_0, \dots, y_{n_0+n-1} = \bar{y}_{n-1}, \end{cases}$$

ammette unica soluzione su  $S$ .

*Dimostrazione.* Basta osservare che

$$\begin{cases} y_{k+n} = \varphi(k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n-1}), & k \in S \\ y_{n_0} = \bar{y}_0, \dots, y_{n_0+n-1} = \bar{y}_{n-1}. \end{cases}$$

definisce per ricorrenza l'unica soluzione possibile.  $\square$

## 5.2.2 Equazioni lineari

Diremo che un'equazione alle differenze su un insieme  $S$  è lineare su  $S$  se può essere scritta nella forma:

$$a_0(k)y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = g(k), \quad (5.15)$$

dove  $a_0, \dots, a_n$  sono tutte funzioni della sola variabile  $k$  definite su tutto  $S$ . Inoltre la (5.15) è detta di grado  $n$  su  $S$  se entrambe  $a_0(k)$  e  $a_n(k)$  sono non nulle su  $S$ .

Si vede subito che, se la (5.15) è di ordine  $n$ , in conseguenza del teorema 5.2.1 che il problema ai valori iniziali con  $n$  punti associato alla (5.15) ammette unica soluzione su  $S$ . Per vederlo, basta porre

$$\varphi(k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n-1}) = \frac{1}{a_0(k)} (g(k) - a_1(k)y_{k+n-1} - \dots - a_n(k)y_k).$$

Studiamo ora la struttura dell'insieme  $\mathcal{A}$  delle soluzioni di (5.15). Iniziamo con il caso omogeneo, cioè il caso in cui  $g(k) \equiv 0$ . In altre parole consideriamo l'equazione

$$a_0(k)y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = 0. \quad (5.16)$$

Siano  $\{y_k^{(1)}\}_{k \in S}$  e  $\{y_k^{(2)}\}_{k \in S}$  due soluzioni di (5.16). Si verifica immediatamente, in modo diretto, che ogni loro combinazione lineare  $\alpha_1 y_k^{(1)} + \alpha_2 y_k^{(2)}$  è ancora una soluzione su  $S$ . Quindi l'insieme delle soluzioni di (5.16),  $\mathcal{V}$ , ha una struttura di spazio vettoriale. Facciamo vedere che  $\dim \mathcal{V} = n$ . Procediamo in due passi: mostriamo dapprima che  $\dim \mathcal{V} \leq n$ , mostreremo subito dopo che  $\dim \mathcal{V} \geq n$ .

Data una qualunque soluzione  $\{y_k\}_{k \in S}$  di (5.16), poniamo  $\alpha_i = y_{n_0+i}$  per ogni  $i = 0, \dots, n-1$ , e denotiamo con  $\{y_k^{(i)}\}_{k \in S}$ , l'unica soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} a_0(k)y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = 0, & k \in S \\ y_{n_0} = 0, \dots, y_{n_0+i} = 1, \dots, y_{n_0+n-1} = 0. \end{cases}$$

Allora,

$$y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y_k^{(i)}, \quad k \in S.$$

Abbiamo dunque scritto il generico elemento  $\{y_k\} \in \mathcal{V}$  come combinazione lineare di  $n$  elementi di  $\mathcal{V}$ . Questo implica che  $\dim \mathcal{V} \leq n$ .

Osserviamo ora che le soluzioni  $\{y_k^{(i)}\}_{k \in S}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , sono tra di loro linearmente indipendenti. Per vederlo, supponiamo che esistano costanti  $\beta_0, \dots, \beta_n$  tali che

$$\eta_k := \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i y_k^{(i)}, \quad k \in S,$$

è la successione nulla per  $k \in S$ . Si ha allora, in particolare, che

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i y_{n_0}^{(i)} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i y_{n_0+n-1}^{(i)} = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} \implies \\ \text{(per le condizioni iniziali)} \\ \implies \end{matrix} \quad \begin{cases} \beta_0 = 0, \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = 0, \end{cases}$$

Questo dimostra che le  $\{y_k^{(i)}\}_{k \in S}$  sono  $n$  soluzioni linearmente indipendenti. dunque  $\dim \mathcal{V} \geq n$ . Abbiamo dunque finalmente che  $\dim \mathcal{V} = n$ .

L'argomentazione appena esposta ci permette di dire che per trovare tutte le soluzioni della (5.16) basta trovarne  $n$  linearmente indipendenti.

Passiamo ora a studiare la (5.15). Osserviamo che se  $\{v_k\}_{k \in S}$  e  $\{u_k\}_{k \in S}$  sono due soluzioni della (5.15), allora  $\{v_k - u_k\}_{k \in S}$  è una soluzione di (5.16). Per vederlo basta sostituire direttamente  $y_k = v_k - u_k$  dentro la (5.15).

Sia ora  $\{\bar{y}_k\}_{k \in S}$  una soluzione fissata (ad arbitrio) di (5.15). Comunque presa una qualunque soluzione  $\{y_k\}_{k \in S}$  di (5.15), abbiamo che  $\eta_k := y_k - \bar{y}_k$  è una qualche soluzione di (5.16). Dunque possiamo scrivere una qualunque soluzione (5.15) come la somma di una qualunque soluzione di (5.16) e di una particolare soluzione di (5.15). In altre parole,

$$y_k = \eta_k + \bar{y}_k.$$

Questo da all'insieme  $\mathcal{A}$  la struttura di varietà affine. In definitiva, se conosciamo una base  $\{y_k^{(i)}\}_{k \in S}$  di  $\mathcal{V}$ , ed una soluzione particolare della (5.15) allora possiamo scrivere qualunque soluzione della (5.15) nella forma:

$$y_k = \bar{y}_k + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y_k^{(i)}, \quad k \in S,$$

con  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  costanti. Risolvere un problema ai valori iniziali per la (5.15) significa, in questo caso, determinare le costanti  $\alpha_i$ .

### 5.2.3 Un test per l'indipendenza lineare

Sia  $S \subseteq \mathbb{Z}$  un insieme formato da valori consecutivi. Le successioni con indice in  $S$  formano uno spazio vettoriale.

Consideriamo  $n$  successioni  $\{y_k^{(i)}\}_{k \in S}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Se queste sono linearmente dipendenti allora ognuna di esse può essere rappresentata come combinazione lineare delle altre. In particolare, comunque fissato  $k$  tale che  $k+n-1 \in S$  si ha che i vettori

$$\begin{pmatrix} y_k^{(0)} \\ y_{k+1}^{(0)} \\ \vdots \\ y_{k+n-1}^{(0)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_k^{(n-1)} \\ y_{k+1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ y_{k+n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

sono linearmente indipendenti. Se, viceversa, per ogni  $k$  per cui questi vettori hanno senso essi sono indipendenti, allora le successioni  $\{y_k^{(i)}\}_{k \in S}$  sono linearmente indipendenti.

Possiamo esprimere questo concetto in forma più compatta: formiamo la matrice (detta di Casorati<sup>4</sup>)

$$\begin{pmatrix} y_k^{(0)} & y_k^{(1)} & \dots & y_k^{(n-1)} \\ y_{k+1}^{(0)} & y_{k+1}^{(1)} & \dots & y_{k+1}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{k+n-1}^{(0)} & y_{k+n-1}^{(1)} & \dots & y_{k+n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

<sup>4</sup>Felice Casorati, 1835–1890.

Il suo determinante (detto determinante di Casorati), per ogni  $k$  per cui questa matrice ha senso, è non zero se e soltanto se le successioni  $\{y_k^{(i)}\}_{k \in S}$  sono linearmente indipendenti. Denotiamo il determinante di Casorati con  $C(k)$ .

In particolare, se  $\{y_k^{(i)}\}_{k \in S}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  sono soluzioni di un'equazione lineare omogenea (5.16) di grado  $n$ , si ha che per controllare se queste successioni sono indipendenti basta vedere se  $C(k) \neq 0$  per un qualche valore di  $k$ , tipicamente per  $k = n_0 = \min S$ . Viceversa, per la discussione fatta nel precedente paragrafo, se  $C(n_0) \neq 0$  allora le  $\{y_k^{(i)}\}_{k \in S}$  sono linearmente indipendenti.

### 5.2.4 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Per risolvere una equazione lineare dobbiamo trovare una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea associata. In questo paragrafo vedremo un metodo che funziona nel caso di coefficienti costanti. Per semplicità ci limiteremo a equazioni di ordine al più 2.

#### Primo ordine

Nel caso di una equazione del primo ordine è sufficiente determinare una soluzione.

Consideriamo l'equazione

$$a_0 y_{k+1} + a_1 y_k = 0, \quad k \in S, \quad (5.17)$$

con  $a_0, a_1$  costanti,  $a_0 \neq 0$ . Possiamo riscriverla come segue:

$$y_{k+1} = -\frac{a_1}{a_0} y_k.$$

Osserviamo che la successione

$$k \mapsto \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^k$$

è una soluzione. Quindi tutte le soluzioni della (5.17) si possono scrivere nella forma

$$y_k = \alpha \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^k.$$

**Esempio 5.2.2.** Consideriamo il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y_{k+1} + 2y_k = 0 \\ y_5 = \bar{y} \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione è  $\alpha(-2)^k$ . Scegliendo la costante  $\alpha$  affinché la condizione iniziale sia soddisfatta otteniamo  $\alpha = (-2)^{-5}\bar{y}$ . Si ottiene che la soluzione del problema assegnato è  $y_k = (-2)^{k-5}\bar{y}$ .

Consideriamo ora l'equazione non omogenea

$$a_0 y_{k+1} + a_1 y_k = g_k, \quad k \in S, \quad (5.18)$$

Possiamo scriverne una soluzione con il metodo della “variazione delle costanti”. La soluzione generale dell’equazione omogenea associata è  $\alpha(-1)^k(a_1/a_0)^k$ . Cerchiamo una soluzione particolare della forma  $\bar{y}_k = \alpha_k(-1)^k(a_1/a_0)^k$ . Inserendo questa formula nella (5.18) e semplificando otteniamo

$$\Delta\alpha_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k = (-1)^{k+1} \frac{g_k a_0^k}{a_1^{k+1}},$$

da cui segue

$$\alpha_k = \Delta^{-1} \left( (-1)^{k+1} \frac{g_k a_0^k}{a_1^{k+1}} \right),$$

quindi una soluzione particolare è:

$$(-1)^k (a_1/a_0)^k \Delta^{-1} \left( (-1)^{k+1} \frac{g_k a_0^k}{a_1^{k+1}} \right)$$

L’integrale generale della (5.18) si ottiene sommando l’integrale generale della (5.17) con la soluzione particolare appena trovata:

$$A(-1)^k (a_1/a_0)^k + (-1)^k (a_1/a_0)^k \Delta^{-1} \left( (-1)^{k+1} \frac{g_k a_0^k}{a_1^{k+1}} \right),$$

con  $A$  costante arbitraria.

In particolare, se  $g_k \equiv r$  e  $a_0 = 1$ , usando la (5.1.5) otteniamo

$$\alpha_k = r \Delta^{-1} \left( \frac{-1}{a_1} \right)^{k+1} = -\frac{r \left( \frac{-1}{a_1} \right)^{k+1}}{\frac{1}{a_1} + 1}.$$

La soluzione generale dell’equazione (5.18), in questo caso, è allora:

$$A(-a_1)^k - \frac{r \left( \frac{-1}{a_1} \right)^{k+1}}{\frac{1}{a_1} + 1} (-a_1)^k = A(-a_1)^k + \frac{r}{a_1 + 1}$$

Come già avevamo avuto modo di vedere.

## Secondo ordine

Consideriamo l’equazione

$$a_0 y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0, \quad k \in S,$$

con  $a_0, a_1, a_2$  costanti,  $a_0$  e  $a_2$  divesi da zero. Per trovare la soluzione generale di (5.19) dobbiamo trovare due soluzioni linearmente indipendenti.

Senza perdere in generalità possiamo supporre  $a_0 = 1$ , quindi ci riduciamo a

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0, \quad k \in S. \quad (5.19)$$

Se scegliamo i numeri  $r_1, r_2$  in modo tale che  $-(r_1 + r_2) = a_1$  e  $r_1 r_2 = a_2$ , cioè  $r_1$  e  $r_2$  sono le radici del polinomio  $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ , allora possiamo riscrivere la (5.19) in una forma diversa:

$$(\Delta - r_1 I)(\Delta - r_2 I)y_k = 0.$$

Questa forma suggerisce la forma in cui cercare le soluzioni. Ci sono ovviamente tre possibilità:

$a_1^2 - 4a_2 > 0$ . Ci sono due radici distinte  $r_1 \neq r_2$ . Pertanto Si trovano due soluzioni  $y_k^{(1)} = r_1^k$  e  $y_k^{(2)} = r_2^k$ . La loro indipendenza si può dimostrare facilmente, per esempio con il metodo della matrice di Casorati.

$a_1^2 - 4a_2 = 0$ . Ci sono due radici coincidenti  $r := r_1 = r_2$ . Le soluzioni  $y_k^{(1)} = r^k$  e  $y_k^{(2)} = kr^k$ . Si verifica subito che sono soluzioni linearmente indipendenti di (5.19).

$a_1^2 - 4a_2 < 0$ . Ci sono due radici coniugate complesse  $r_1 = \rho e^{i\theta}$ ,  $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ . L'espressione  $c_1 r_1^k + c_2 r_2^k$ , combinazione lineare di due soluzioni, può essere scritta come  $c_1 \rho e^{ki\theta} + c_2 \rho e^{-ki\theta}$ . Siccome  $\rho e^{k\pm i\theta} = \rho(\cos k\theta \pm i \sin k\theta)$ , le scelte  $c_1 = c_2 = 1$  e  $c_1 = c_2 = -i$  suggerisce che soluzioni particolari sono  $\rho^k \cos k\theta$  e  $\rho^k \sin k\theta$ .

**Esempio 5.2.3.** Consideriamo la successione di Fibonacci. Questa è definita per ricorrenza da

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_1 = 1, \quad F_0 = 0.$$

L'equazione  $r^2 - r - 1 = 0$  ha due soluzioni distinte  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . La soluzione generale dell'equazione  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  è

$$c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Le condizioni iniziali ci portano a  $c_1 = 1/\sqrt{5}$  e  $c_2 = -1/\sqrt{5}$ , quindi abbiamo la seguente espressione del termine generale della successione della successione di Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Consideriamo infine il caso non omogeneo con termine costante. Cioè

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r,$$

$r$  costante. Cerchiamo una soluzione particolare costante  $\bar{y}_k = c$ . Sostituendo nell'equazione,

$$c + a_1 c + a_2 c = r,$$

da cui segue,  $c = \frac{r}{1+a_1+a_2}$  se  $a_1 + a_2 \neq -1$ . Altrimenti, se  $a_1 + a_2 = -1$ , l'equazione omogenea si può scrivere come

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} - 1 - a_1 = 0,$$

quindi  $y_k = 1$  è una soluzione dell'equazione omogenea, quindi le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea. Cerchiamo soluzioni della forma  $y_k = bk$ . Sostituendo e tenendo conto di  $a_2 = -1 - a_1$  troviamo

$$b(k+2) + a_1 b(k+1) - (1+a_1)bk = r$$

da cui  $b = \frac{r}{2+a_1}$  se  $a_1 \neq -2$ . Se  $a_1 = -2$ , cerchiamo soluzioni della forma  $y_k = pk^2$ . Sostituendo, e tenendo conto di  $a_2 = -1 - a_1$  e di  $a_1 = -2$ , troviamo

$$p(k+2)^2 - 2p(k+1)^2 - 3pk^2 = r,$$

da cui segue  $p = r/2$ .

In sostanza, abbiamo trovato le seguenti soluzioni particolari:

$\frac{r}{1+a_1+a_2}$	se $a_1 + a_2 \neq -1$
$\frac{rk}{2+a_1}$	se $a_1 + a_2 = -1$ e $a_1 \neq -2$
$\frac{r}{2}k^2$	se $a_1 = -2$ e $a_2 = 1$

### 5.2.5 Un modello di apprendimento

Consideriamo uno schema premio/punizione per l'apprendimento. Si pensi agli esperimenti sui primati o sui topi, l'addestramento degli animali. In questo schema, l'esercizio viene ripetuto e il livello di prestazione viene misurato ogni volta con un numero  $p_n$  che misura la probabilità di successo. Con  $p_0$  indichiamo la probabilità iniziale di successo (o predisposizione del soggetto a svolgere l'esercizio con successo).

Usiamo un semplice schema lineare<sup>5</sup>

$$\Delta p_n = a(1 - p_n) - bp_n,$$

dove  $0 \leq a \leq 1$  e  $0 \leq b \leq 1$ . Notiamo che  $1 - p_n$  è il massimo guadagno possibile in termini di prestazioni, mentre  $p_n$  è la massima perdita (per questo motivo si parla di forma guadagno-perdita del modello). In un certo senso, la differenza in prestazioni, ad ogni stadio è proporzionale al massimo guadagno e alla massima perdita.

Si interpretano  $a$  e  $b$  rispettivamente come quei fattori che rinforzano o inibiscono l'apprendimento.

Risolvendo l'equazione otteniamo

$$p_n = \begin{cases} (1 - a - b)^n \left( p_0 - \frac{a}{a+b} \right) + \frac{a}{a+b} & \text{se } a + b \neq 0, \\ p_0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se supponiamo di ripetere molte volte il ciclo di apprendimento, vediamo che (se  $0 < a + b < 2$ )

$$p_n \rightarrow p^* := \frac{a}{a+b}$$

perchè, per l'ipotesi fatta,  $(1 - a - b) \in (-1, 1)$ . Nel caso  $a = 1 = b$ , invece abbiamo che  $p_n$  oscilla tra i valori

$$\pm \left( p_0 - \frac{a}{a+b} \right) + \frac{a}{a+b}.$$

<sup>5</sup>R. R. Bush, F. Mosteller. *A mathematical model for simple learning*. Psychological Review, 50 (1951), 313–323.



quindi la successione  $\{p_n\}$  non ammette limite.

---

## Riferimenti ed approfondimenti

- ✓ M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa. *Matematica calcolo infinitesimale e algebra lineare*. Zanichelli, Bologna, 2004.
- ✓ S. Goldberg. *Introduction to difference equations*. Dover Publ., New York, 1986.
- ✓ R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete mathematics, 2nd edition*. Addison-Wesley 2008.

## Lezione 6

# Modelli, equilibri e ottimizzazione

*In questa lezione vedremo un certo numero di modelli e tratteremo il problema dell'ottimizzazione in senso quantitativo e qualitativo. Per essere più precisi diciamo che, dato un modello di un qualche fenomeno, ci chiederemo che cosa si possa fare per migliorare le conseguenze del fenomeno stesso (per esempio per ridurre le spese ad esso collegate) e se le risorse che stiamo impiegando siano adeguate, oppure quale sia il risultato migliore (in termini di costi o guadagni) che si possa ottenere in una certa situazione.*

### 6.1 Un approccio grafico

*In questa sezione descriviamo un approccio molto intuitivo alla questione dell'ottimizzazione basato su un'analisi grafica.*

#### 6.1.1 Un esempio qualitativo: corsa agli armamenti

*Gli Stati Uniti e l'Unione Sovietica, durante la guerra fredda, erano profondamente sospettosi gli uni dell'altra. Per sentirsi sicuri avevano costruito grandi arsenali nucleari. L'idea era quella del "deterrente nucleare" cioè che ognuno di questi stati fosse comunque in grado di infliggere danni inaccettabili all'altro come punizione nel caso di un attacco a sorpresa.*

*Il problema che si pone è se sia possibile trovare un numero soddisfacente di missili nucleari per ognuna delle due superpotenze e, visti i costi di questi apparecchi (per non parlare dei rischi connessi), se non sia possibile risparmiare sul numero dei missili ricorrendo ad altre misure.*

*Si noti che un missile lanciato da una delle due superpotenze contro l'altra potrebbe venire intercettato da qualche meccanismo difensivo e pertanto ha soltanto una probabilità limitata di raggiungere il suo bersaglio. D'altra parte un missile per poter venire lanciato per rappresaglia deve essere sopravvissuto all'attacco a sorpresa la cui efficacia dipenderà da numero di missili lanciati.*

Questo rende non banale il problema di stabilire quanti missili servono ad ogni superpotenza visto che non basta calcolare il numero di missili necessario per la distruzione totale dell'avversario.<sup>1</sup>

Siano  $x$  e  $y$ , rispettivamente, il numero di missili statunitensi e sovietici. Per semplicità li tratteremo come numeri reali e non interi (come sarebbe giusto) visto che, trattandosi di numeri piuttosto grandi, l'errore relativo che si commette è piccolo.

Supponiamo per il momento che i missili dei due schieramenti abbiano simili caratteristiche e siano egualmente protetti. Dalle osservazioni precedenti, segue che esiste una funzione monotona crescente  $f$  tale che gli Stati Uniti si sentono sicuri solo se  $x > f(y)$ . Similmente esiste una funzione monotona crescente  $g$  tale che l'Unione Sovietica si sente al sicuro solo se  $y > g(x)$ .

Cerchiamo, per prima cosa di capire che proprietà dovranno avere le funzioni  $f$  e  $g$ . Limitiamoci a studiare  $f$ ; risultati analoghi per la  $g$  seguiranno per simmetria. Se gli Stati Uniti stimano che siano necessari  $x_0 > 0$  missili per infliggere danni inaccettabili ai sovietici avremo che, se l'Unione Sovietica non avesse missili, il minimo numero di missili necessari per gli statunitensi sarebbe  $x_0$ . Cioè, abbiamo  $f(0) = x_0$ . Similmente, esisterà un numero  $y_0 > 0$  tale che  $g(0) = y_0$ .

Facciamo vedere che comunque fissato  $r > 0$ , esiste un  $x(r) > 0$  tale che  $x(r) = f(rx(r))$ ; in altre parole mostriamo che la curva  $y = rx$  interseca  $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y = f(x)\}$ , cioè il grafico di  $f$ . In termini del modello, questo significa che qualora  $x \geq x(r)$  e  $y = rx$ , gli Stati Uniti ritengono di avere abbastanza missili in modo tale che quelli sopravvissuti ad un attacco a sorpresa siano comunque in grado di infliggere danni inaccettabili al nemico (vale a dire che stimano che ne sopravvivano almeno  $x_0$ ). Facciamo dunque vedere che una tale funzione  $r \mapsto x(r)$  esiste.

Supponiamo  $y = rx$ . Per distruggere il massimo numero di missili statunitensi, i sovietici devono dirigere  $r$  missili verso ciascuno dei siti di lancio statunitensi. Ora, per varie cause (guasti, meccanismi difensivi) ogni missile sovietico ha una certa probabilità di non riuscire a colpire il bersaglio. Pertanto ogni missile statunitense ha una probabilità  $p(r)$  di sopravvivere.<sup>2</sup> Dunque gli Stati Uniti possono aspettarsi di rimanere con  $p(r)x$  missili dopo avere subito l'attacco a sorpresa. Se  $x = x(r)$  è scelto sufficientemente grande, allora  $p(r)x > x_0$ . Questo prova l'esistenza di  $x(r)$ .

Cosa ci dice tutto questo sulla forma della curva  $x = f(y)$ ? Visto che questo deve passare per  $(x_0, 0)$  e incontrare ogni retta della forma  $y = rx$ , allora deve essere crescente con pendenza crescente (quindi  $f$  è concava). Similmente, la funzione  $g$  gode delle stesse proprietà (quindi anche  $g$  è concava).

Possiamo rappresentare  $f$  e  $g$  su un grafico. La parte di piano al disotto del grafico di  $f$  rappresenta le condizioni (cioè le coppie  $(x, y)$ : missili USA, URSS) che sono accettabili per gli Stati Uniti. Invece la parte di piano al disopra della curva  $y = g(x)$  rappresenta le condizioni accettabili per l'Unione Sovietica. L'intersezione di queste parti di piano è accettabile per entrambe le superpotenze. Il punto  $(x_*, y_*)$  di intersezione delle curve  $x = f(y)$  e  $y = g(x)$  è particolarmente importante corrisponde al numero minimo di missili che rende la situazione accettabile per i due contendenti. Chiamiamo questo punto un "equilibrio" perché se USA e URSS si trovano rispettivamente con

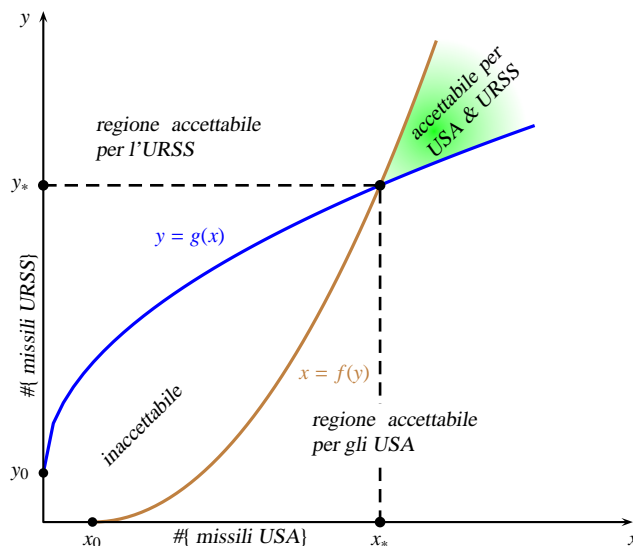
<sup>1</sup>Si veda T. L. Saaty. *Mathematical models of arms control and disarmament*. Wiley, 1968.

<sup>2</sup>Questa probabilità potrebbe dipendere anche in modo complicato da  $r$ , infatti la probabilità di successo di un qualunque missile assalitore dipenderà dal numero di missili lanciati verso lo stesso bersaglio. Questa osservazione però non cambia la nostra analisi.

$x_*$  e  $y_*$  missili nucleari, allora la corsa agli armamenti si ferma (cioè la situazione è stabile).

Osserviamo che tutto questo è basato sull'assunto che **entrambi i contendenti abbiano conoscenza perfetta della consistenza e capacità bellica dell'arsenale nemico**.

La situazione è illustrata nella seguente figura:



La regione ombreggiata rappresenta tutte quelle condizioni in cui le due superpotenze si sentono al sicuro perché ognuna ha abbastanza missili nucleari da distruggere l'altra anche in caso di attacco a sorpresa (regione di stabilità).

Notiamo che abbiamo assunto condizioni di “simmetria” soltanto per comodità. Nel caso di differenza di prestazioni dei mezzi sia offensivi che difensivi, semplicemente si modificano le funzioni  $f$  e  $g$  (e i numeri  $x_0$  e  $y_0$ ).

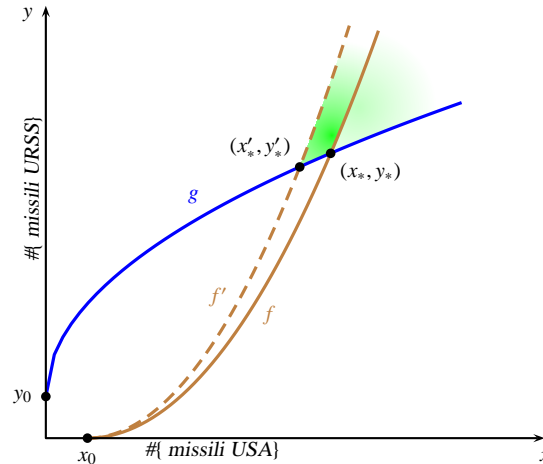
Questa argomentazione è di natura completamente qualitativa: non permette di calcolare veramente  $(x_*, y_*)$  a meno che non si facciano ipotesi su  $f$  e  $g$ . Tuttavia ci ha permesso di stabilire l'esistenza (cosa per niente chiara priori) di una regione di “sicurezza”, nella quale ognuna delle superpotenze ha abbastanza missili nucleari da scoraggiare un attacco a sorpresa da parte dell'altra. Vediamo inoltre che permette di ottenere qualche interessante indicazione operativa.

Chiediamoci, se una delle due superpotenze riesce a rendere più robusti i propri siti di lancio (corazzamenti, difese antimissile), come cambiano le cose? Per avere una condizione di sicurezza, ci vogliono più o meno missili? Se invece rendiamo più resistenti agli attacchi nucleari le città e le infrastrutture di una delle due potenze, che succede? Per tornare a condizioni di sicurezza ci vogliono più o meno missili? La stessa tecnica applicata sopra permette di fornire delle risposte sorprendenti.

Consideriamo per primo il caso in cui una delle superpotenze, per fissare le idee supponiamo si tratti degli USA, decida di rendere meno vulnerabili i propri siti di lancio. Questo ha l'effetto di aumentare la probabilità  $p(r)$  che ogni singolo missile americano sopravviva ad un attacco a sorpresa. Allora, ripensando all'argomentazione esposta sopra, vediamo che otteniamo una nuova

funzione  $f'$  in modo tale che passando dalla curva  $x = f(y)$  alla  $x = f'(y)$  ci “spostiamo” verso l’alto, possibilmente deformando un po’ la curva, ma mantenendo la concavità della funzione  $f$ . Notiamo che il punto di “equilibrio” si sposta da  $(x_*, y_*)$  a  $(x'_*, y'_*)$  e che sono necessari meno missili per entrambe le superpotenze per avere stabilità.

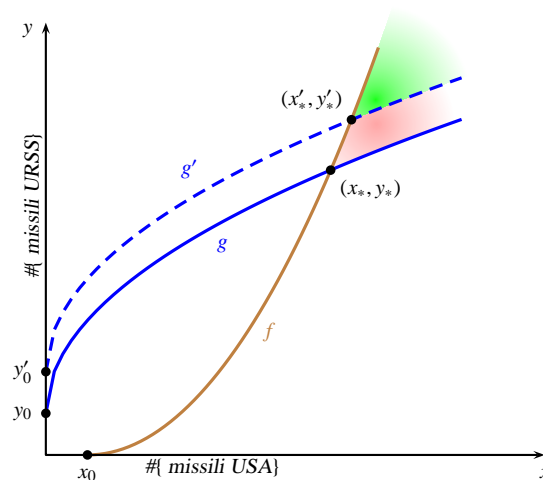
Quello che succede è illustrato nella seguente figura:



La zona ombreggiata in modo più intenso è la parte aggiunta alla regione accettabile (stabile) in conseguenza della protezione dei siti di lancio USA.

Studiamo ora la situazione in cui gli Stati Uniti decidono di proteggere meglio le proprie città invece dei propri siti di lancio. L’effetto immediato è che ora l’Unione Sovietica ha bisogno di un numero maggiore di missili per infliggere un danno inaccettabile. Si deve cioè passare da  $y_0$  a  $y'_0 > y_0$ . Questo ci fa passare dalla funzione  $g$  ad una funzione  $g'$  il cui grafico risulta “sollevato” rispetto a quello della  $g$ . Il punto di “equilibrio” si sposta da  $(x_*, y_*)$  a un nuovo  $(x'_*, y'_*)$  e che stavolta sono necessari meno missili per entrambe le superpotenze per avere stabilità.

Quello che succede è illustrato nella seguente figura:

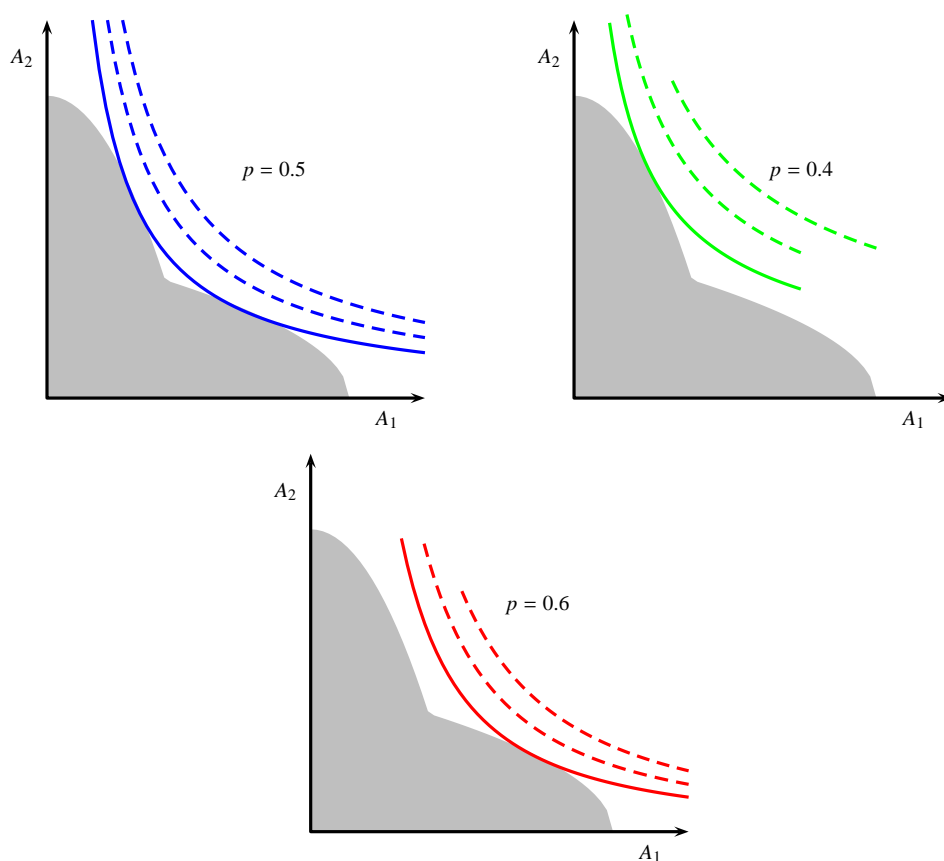


La zona ombreggiata in rosso è la parte “perduta” della regione accettabile in conseguenza della protezione delle città USA.

Le considerazioni fatte finora, per quanto siano su un piano completamente qualitativo mostrano con una certa chiarezza quali possano essere le conseguenze di scelte strategiche importanti. Naturalmente, tutto ciò vale nei limiti del modello stesso. Per esempio, considerazioni di tipo politico, o l'ingresso di altre potenze minori possono complicare notevolmente lo studio.

### 6.1.2 Adattamento delle specie

Consideriamo una specie di animali che vive di preferenza in due tipi di ambienti distinti,  $E_1$  e  $E_2$ . Indichiamo per un generico individuo con  $A_1$  e  $A_2$  il grado di adattamento (diciamo la capacità di riprodursi) a  $E_1$  e  $E_2$  rispettivamente. Se  $p$  rappresenta la frazione di tempo spesa dall'individuo nell'ambiente  $E_1$ ,  $1 - p$  sarà la frazione spesa in  $E_2$ . L'adattamento "complessivo" dell'individuo è dato da  $A_1^p A_2^{1-p}$ .



In grigio la regione in cui il grado di adattamento  $(A_1, A_2)$  è biologicamente possibile. Le famiglie di curve rappresentano i livelli di adattamento complessivo per un dato parametro. I punti di tangenza rappresentano il massimo adattamento ottenibile per il parametro.

Non tutte le combinazioni  $(A_1, A_2)$  sono biologicamente possibili. Rappresentiamo le combinazioni possibili con una regione del piano. Se vogliamo determinare da quale combinazione  $(A_1, A_2)$  sono caratterizzati gli individui di maggiore successo possiamo usare un metodo grafico: disegniamo la famiglia di curve  $A_1^p A_2^{1-p} = \text{cost.}$  (ricordiamo che  $p$  si considera costante) e determiniamo la

curva della famiglia che è tangente alla regione delle combinazioni possibili. Il punto di tangenza è il punto di massimo adattamento.

Se ora facciamo variare il parametro  $p$  osserviamo che il punto di massimo adattamento si sposta lungo la frontiera della regione ammissibile. Ovviamente la regione ammissibile può cambiare molto a seconda delle differenze degli ambienti  $E_1, E_2$  e delle caratteristiche biologiche della specie.

## 6.2 Approccio analitico

### 6.2.1 Incendi dei boschi

Il modello che presentiamo qui è stato pensato per valutare quale sia la consistenza ottimale di una squadra di pompieri destinati a combattere gli incendi boschivi.<sup>3</sup> L'idea è di assegnare un costo a tutti gli aspetti dell'intervento anti-incendio (alcuni di questi costi sono per ogni pompiere) e alla superficie di bosco bruciato e poi minimizzare il costo totale.

Usiamo le seguenti notazioni:

$t$	:	tempo dalla scoperta dell'incendio,
$B(t)$	:	area bruciata al tempo $t$ ,
$b(t)$	:	tasso di propagazione "naturale" (in assenza di intervento) dell'incendio,
$T_i$	:	istante dell'inizio dell'intervento,
$T_s$	:	primo istante in cui l'incendio è spento,
$x$	:	numero di pompieri impegnati
$C_b$	:	costo per ettaro incendiato (danni e costo di ripristino),
$C_x$	:	costo per unità di tempo di ogni singolo pompiere
$C_u$	:	costo una tantum per pompiere (indennizzo fisso, trasporto sul luogo dell'incendio),
$C_t$	:	costo per unità di tempo per il mantenimento della struttura di coordinazione, costi legati all'emergenza, etc.

Un incendio si ritiene spento ad un istante  $t$ , se  $B'(t) = 0$ . Quindi  $T_c = \min\{t > 0 : B'(t) = 0\}$ . La consistenza della squadra di pompieri sarà assunta costante tra gli istanti  $T_i$  e  $T_c$ . Tutti i costi sono assunti costanti nel tempo. Facciamo l'ipotesi che  $B$  sia due volte differenziabile.

<sup>3</sup>G. M. Parks. *Development and application of a model for suppression of forest fires*. Manage. Sci. **10**, 760–766.

Il costo totale  $C$  di un incendio (danni, ripristino, spegnimento) è allora:

$$C = C_b B(T_s) + (xC_x + C_t)(T_s - T_i) + xC_u. \quad (6.1)$$

Vorremmo minimizzare  $C$  come funzione di  $x$ , ma perché questo abbia senso dobbiamo rendere più esplicita la funzione  $B(t)$ . Assumiamo che ogni pompiere riduca la propagazione dell'incendio  $B'(t)$  ad un tasso costante  $E$  cioè che ogni pompiere faccia decrescere  $B''(t)$  di  $E$  (è chiaramente una semplificazione: stiamo assumendo che i nostri pompieri non si stanchino mai!). Più precisamente:

$$B'(t) = \begin{cases} b(t) & \text{se } t < T_i, \\ b(t) - E(t - T_i)x & \text{per } T_i \leq t \leq T_s. \end{cases} \quad (6.2)$$

Per poter lavorare abbiamo bisogno di esprimere  $b$ . Facciamo un'ipotesi esemplificativa piuttosto drastica: che l'incendio si diffonda circolarmente a tasso costante, nel senso che il perimetro del fuoco (o, equivalentemente, il raggio) cresca a tasso costante. In questo caso  $b(t) = G + Ht$  con  $G$  e  $H$  costanti non negative (dipenderanno dal tipo di bosco, per esempio).

Assumendo questa espressione per  $b$ , otteniamo

$$B'(t) = \begin{cases} G + Ht & \text{se } t < T_i, \\ G + Ht - E(t - T_i)x & \text{per } T_i \leq t \leq T_s. \end{cases} \quad (6.3)$$

Osserviamo che se  $Ex < H$  allora  $B'(t) > 0$  per ogni  $t > 0$ . Questo significa che ci sono troppo pochi pompieri perché l'incendio venga spento. Supponiamo quindi di avere un numero di pompieri adeguato alla velocità di propagazione del fuoco. Cioè tale che  $Ex > H$ .

Per trovare  $T_s$  risolviamo l'equazione  $B'(t) = 0$ . Dalla (6.3), otteniamo

$$T_s = T_i + \frac{G + HT_i}{Ex - H}$$

Sostituiamo nella (6.2) e integriamo per  $t \in [0, T_i]$ , e  $t \in [T_i, T_s]$ . Si ottiene:

$$B(T_i) = B(0) + GT_i + \frac{1}{2}HT_i^2, \quad B(T_s) = B(T_i) + \frac{(G + HT_i)^2}{2(Ex - H)};$$

da cui,

$$B(T_s) = B(0) + GT_i + \frac{1}{2}HT_i^2 + \frac{(G + HT_i)^2}{2(Ex - H)} = B(0) + GT_i + \frac{HT_i^2(Ex - H) + (G + HT_i)^2}{2}.$$

Ricordiamo che  $B(0)$  è la superficie boschiva già bruciata al momento della scoperta dell'incendio. Andando a sostituire nella (6.1), otteniamo la seguente espressione per il costo totale:

$$C = C_b \left( B(0) + GT_i + \frac{HT_i^2(Ex - H) + (G + HT_i)^2}{2} \right) + (xC_x + C_t) \frac{G + HT_i}{Ex - H} + xC_u.$$

Derivando quest'espressione rispetto a  $x$  e imponendo che questa sia uguale a zero troviamo il punto di minimo (infatti il costo tende a  $+\infty$  con il numero di pompieri che va a  $+\infty$  o a  $H/E^+$ ):

$$x^* = (G + HT_i) \sqrt{\frac{C_b}{2C_u E} + \frac{C_t + HC_x/E}{C_u E(G + HT_i)}} + \frac{H}{E},$$



che ci fornisce il numero ottimale di pompieri da usare per un dato incendio.

Tutte le costanti presenti in questa formula possono essere stimate. I costi, in particolare, possono essere calcolati con precisione in dipendenza dal luogo in cui avviene l'incendio. Le costanti  $H$ , ed  $E$  possono essere stimate sulla base del tipo di bosco coinvolto e delle condizioni del vento, mentre  $G$  può essere ottenuta dalla relazione  $B(T_i) = G + HT_i$ , infatti  $B(T_i)$  può essere misurato sul luogo e  $H$  e  $T_i$  sono noti.

Come abbiamo visto, questo modello contiene delle semplificazioni un po' drastiche. Notiamo, in particolare, che il numero minimo di pompieri necessari per spegnere (prima o poi) l'incendio è  $H/E$ . La cosa un po' sorprendente di questo numero è che non dipende dalla misura iniziale dell'incendio come invece sembrerebbe suggerito dal buon senso. C'è anche, dal punto di vista pratico anche il problema che alcune costanti possono contenere un certo grado d'incertezza, per esempio  $B(T_i)$  tende a venire sottostimato dalle vedette antincendio. Quindi si pone il problema della sensibilità agli errori del modello.

È poco probabile che il servizio forestale decida di avvalersi di questo modello piuttosto che dell'esperienza. Tuttavia il valore del modello consiste nella possibilità di valutare, anche a posteriori, la consistenza delle forze impegnate. Questo è stato fatto dall'autore del modello, G. M. Parks, per stimare i costi legati alla scarsità di personale impiegato per combattere gli incendi in California nel 1959.

C'è anche un altro aspetto qualitativo su cui il nostro modello getta luce. Per capirlo disegniamo il grafico di  $C$  in funzione di  $x$  per qualche insieme di costanti fissate (non importa come, ci interessa l'andamento qualitativo).

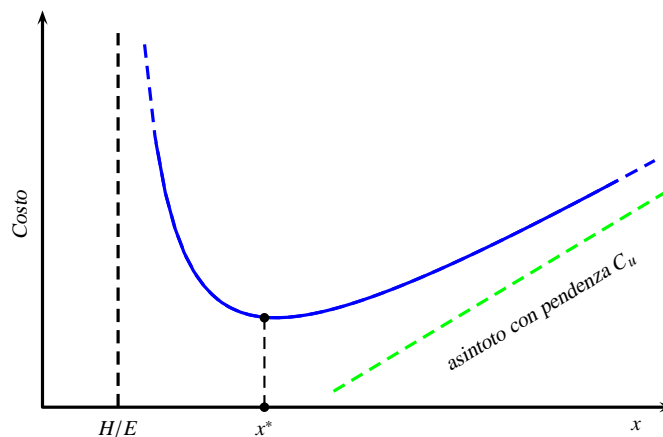


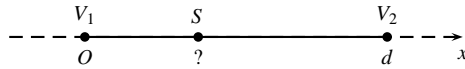
Grafico di  $C$  rispetto ad  $x$  (in blu). Le proporzioni tra gli assi sono stati alterate per motivi grafici

Questo disegno mette in luce un fatto: sbagliare per difetto nella stima del personale necessario di un incendio è potenzialmente molto più nocivo, in termini di costi, dello sbagliare per eccesso.

### 6.2.2 Posizionare una scuola tra due villaggi

Cominciamo con un problema molto semplice. Supponiamo che ci siano due villaggi  $V_1$  e  $V_2$  collegati da una strada. Si vuole costruire una scuola  $S$  che li serva entrambi e se ne vuole scegliere la posizione in modo tale che la distanza complessiva che i bambini devono percorrere per raggiungerla sia minima. La distanza complessiva è definita come la somma delle distanze percorse da ogni bambino. Sia  $d$  la distanza tra i due villaggi.

La situazione è illustrata con un diagramma



in cui abbiamo posto i due villaggi su una retta (non importa quante curve la strada faccia tra un villaggio e l'altro), e abbiamo posto l'origine in uno di essi.

Se  $N_1$  e  $N_2$  è il numero di scolari provenienti da  $V_1$  e  $V_2$  rispettivamente. Per fissare le idee, senza perdere in generalità, supponiamo  $N_1 \geq N_2$ . Dobbiamo minimizzare la funzione

$$f(x) = N_1x + N_2(d - x), \quad \text{con } x \in [0, d].$$

Chiaramente  $d$  e  $x$  devono essere misurate con la stessa unità di misura.

Siccome  $f'(x) = N_1 - N_2 \geq 0$  ci sono solo due possibilità:

$N_1 > N_2$ . In questo caso  $f$  è strettamente crescente. Il punto di minimo si ha per  $x = 0$ . La scuola dovrà essere piazzata nel villaggio  $V_1$ .

$N_1 = N_2$ . In questo caso  $f$  è costante. È indifferente dove la scuola verrà piazzata.

Si vede dunque che qui vale una sorta di regola della maggioranza nel senso che il villaggio con più scolari si prende la scuola, indipendentemente dalla distanza tra i due villaggi e dalla differenza tra il numero di scolari forniti. La situazione non cambia qualitativamente se consideriamo più di due scuole sulla stessa strada (verificarlo!).

Questo modo di procedere può non sembrare molto "giusto". Si pensi a un caso particolare:  $N_1 = 101$ ,  $N_2 = 100$  e  $d = 10\text{km}$ ; ben 100 scolari sono costretti a percorrere 10km mentre gli altri 101 hanno la scuola comodamente sotto casa e tutto per la misera differenza di 1 alunno! Forse si deve pensare ad un diverso parametro per valutare dove sia "giusto" piazzare la scuola che tenga conto degli sforzi fatti da tutti gli alunni.

Un approccio abbastanza semplice è considerare che la "fatica" che ogni scolaro fa per lo spostamento non cresce proporzionalmente allo spostamento ma proporzionalmente ad una sua qualche potenza  $\alpha$  (con esponente  $\alpha > 1$ ). In questo caso la funzione da minimizzare diventa:

$$g(x) = cN_1x^\alpha + cN_2(d - x)^\alpha, \quad \text{con } x \in [0, d],$$

dove  $c > 0$  è una costante di proporzionalità. Troviamo che

$$g'(x) = c(\alpha N_1x^{\alpha-1} - \alpha N_2(d - x)^{\alpha-1}),$$

che si annulla per

$$x^* := \frac{dN_2^\beta}{N_1^\beta + N_2^\beta}$$

(chiaramente  $c$  non gioca alcun ruolo) dove abbiamo posto  $\beta := \frac{1}{\alpha-1}$ . Chiaramente,  $\beta > 0$ . Notiamo che

$$0 < \frac{N_2^\beta}{N_1^\beta + N_2^\beta} < 1,$$

cosicché  $0 < x^* < d$ . Si vede che  $x^*$  deve essere un punto di minimo perché  $g'(0) = -c\alpha N_2 d^{\alpha-1} < 0$ ,  $g'(d) = c\alpha N_1 d^{\alpha-1} > 0$  e non ci sono altri zeri di  $g'$  in  $[0, d]$ .

Notiamo che per  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  e  $x^*$  risulta essere la media pesata (con pesi  $N_1$  e  $N_2$ ) delle ascisse dei villaggi.

**Esercizio 6.2.1.** Più in generale potremmo considerare una funzione “fatica”,  $\phi$ , che misura la fatica di ogni scolaro per fare uno spostamento  $s$ . Per esempio, possiamo prendere  $\phi(s) = s + 0.1s^2$  (questo potrebbe essere lo sviluppo di McLaurin, troncato al secondo termine, di una funzione “fatica” più complicata). In questo modo la funzione da minimizzare diventa

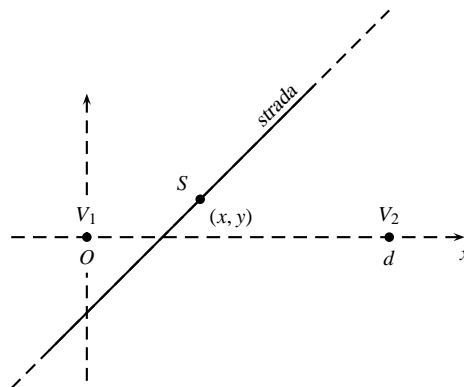
$$f(x) = N_1\phi(x) + N_2\phi(d-x).$$

Calcolare  $x^*$  con la scelta fatta sopra di  $\phi$ , se  $N_1 = 101$ ,  $N_2 = 100$ ,  $d = 10$ .

[Risposta:  $x = \frac{995}{201} \approx 4.95$ .]

Consideriamo ora un problema leggermente più complicato in cui la scuola deve necessariamente essere costruita lungo una strada che passa tra i due villaggi (o, più in generale, che interseca la linea che li congiunge). Gli scolari la raggiungeranno attraversando i campi. Per semplicità consideriamo la funzione “fatica” proporzionale allo spostamento. Sempre per semplicità supponiamo che la strada sia una retta.

La situazione è illustrata dal seguente diagramma:



La funzione da minimizzare in questo caso è

$$f(x, y) = N_1 \sqrt{x^2 + y^2} + N_2 \sqrt{(x - d)^2 + y^2},$$

ma si deve tenere conto del vincolo dovuto al fatto che la scuola deve venire costruita sulla strada. Se la strada giace sulla retta di equazione  $y = ax + b$ , possiamo semplificare la funzione da minimizzare

$$g(x) = f(x, ax + b) = N_1 \sqrt{x^2 + (ax + b)^2} + N_2 \sqrt{(d - x)^2 + (ax + b)^2}.$$

Derivando otteniamo

$$g'(x) = N_1 \frac{(a^2 + 1)x + ab}{\sqrt{x^2 + (b + ax)^2}} + N_2 \frac{(a^2 + 1)x + ab - d}{\sqrt{(x - d)^2 + (b + ax)^2}}.$$

Se  $N_1 = N_2$  allora l'unica soluzione di  $g'(x) = 0$  può essere calcolata esplicitamente:

$$x^* = -\frac{ab \sqrt{(a^2 + 1)x^2 + (2ab - 2d)x + d^2 + b^2} + (ab - d) \sqrt{(a^2 + 1)x^2 + 2abx + b^2}}{(a^2 + 1) \sqrt{(a^2 + 1)x^2 + (2ab - 2d)x + d^2 + b^2} + (a^2 + 1) \sqrt{(a^2 + 1)x^2 + 2abx + b^2}}$$

(questa soluzione è stata ottenuta mediante il programma di algebra simbolica Maxima<sup>4</sup>. Ovviamente  $x^*$  è un punto di minimo. Se  $N_1 > N_2$ , la soluzione è (ancora più) difficile da trovare esplicitamente. Tuttavia, assegnando dei valori a  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $d$ ,  $a$  e  $b$ . La soluzione può essere determinata numericamente. Per esempio, prendendo  $N_1 = 101$ ,  $N_2 = 100$ ,  $d = 10$ ,  $a = 1$  e  $b = -1$  si trova  $x^* \approx 4.97$ .

### 6.2.3 Almeno tre villaggi: il problema di Fermat-Weber

Torniamo al caso iniziale in cui la funzione da minimizzare è la “strada complessiva”. Consideriamo dapprima la situazione in cui ci sono solo tre villaggi (non allineati) con lo stesso numero di bambini. Geometricamente, il nostro problema si riduce a, dati tre punti non allineati, trovarne un quarto tale che la somma delle distanze dagli altri tre sia minima. In questi termini il problema fu posto da P. de Fermat<sup>5</sup> all'inizio del XVII secolo e risolto per via geometrica da E. Torricelli<sup>6</sup> nel modo seguente:

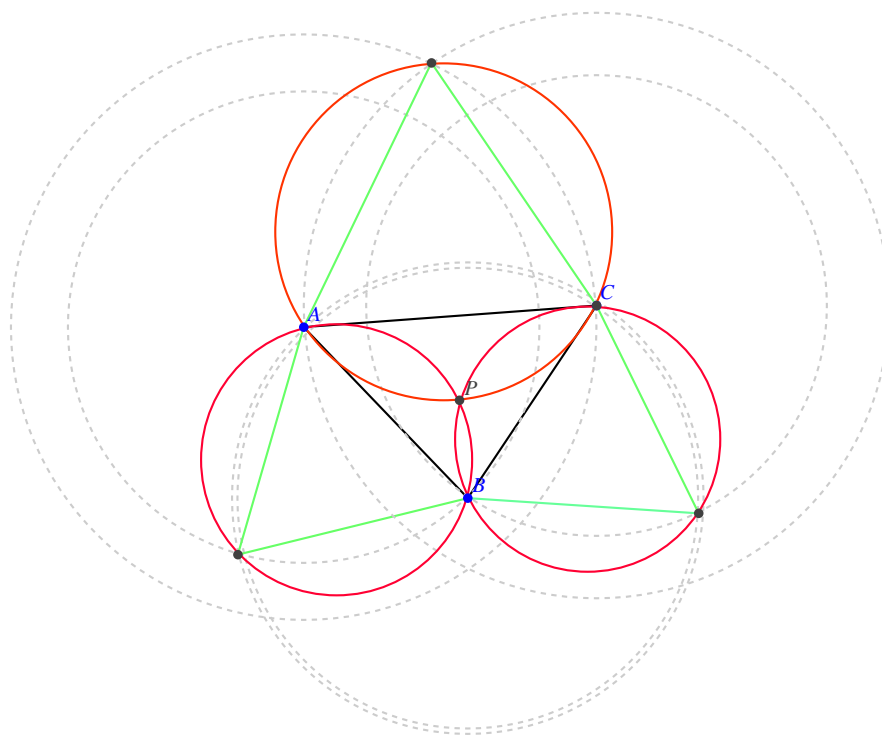
Dati tre punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  si costruisce un triangolo equilatero su ognuno dei lati del triangolo  $ABC$  in modo tale da essere esterno ad  $ABC$ , dopodiché si circoscrive ognuno di questi triangoli con un cerchio. Si può dimostrare che i tre cerchi così costruiti si incontrano in un solo punto  $P$ , detto punto di Torricelli, e che questo ha la proprietà di rendere minima  $\|A - P\| + \|B - P\| + \|C - P\|$ .

Non dimostreremo la validità della costruzione di Torricelli, ci limitiamo ad illustrarla con un diagramma. Il nocciolo della dimostrazione consiste nel fatto che gli angoli formati dai segmenti  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$  sono di 120 gradi.

<sup>4</sup>Vers. 5.32.1, una derivazione del sistema Macsyma sviluppato all'MIT dal 1968 fino al 1992 e gestita al Dipartimento dell'Energia degli Stati Uniti dal Prof. William F. Schelter fino la 2001. Il progetto Maxima è attivo dal 2000, il programma è distribuito con licenza GNU. Vi sono molte interfacce grafiche disponibili, quella usata qui è wxMaxima vers. 13.04.02.

<sup>5</sup>Pierre de Fermat, 1601–1665.

<sup>6</sup>Evangelista Torricelli, 1608–1647.



In verde i triangoli equilateri e in rosso i cerchi circoscritti. Le circonferenze tratteggiate servono per la costruzione dei triangoli equilateri. Il punto di Torricelli è nell'intersezione delle circonferenze in rosso. Questa costruzione funziona solo se tutti gli angoli del triangolo ABC sono minori di 120 gradi.

All'inizio del secolo XX, A. Weber<sup>7</sup> incorporò la possibilità di attribuire dei pesi ai punti, servendosi in problemi di localizzazione di impianti. È per questo motivo che il problema va sotto il nome di Fermat-Weber. In effetti, nella sua formulazione più generale, il problema riguarda  $n$  punti non necessariamente complanari in uno spazio di dimensione arbitraria. Più precisamente, dati  $n$  punti  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^k$  e numeri positivi (pesi)  $\omega_1, \dots, \omega_n$ , si vuole minimizzare la funzione  $f: q \in \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$  data da

$$f(q) := \sum_{i=1}^n \omega_i \|q - q_i\|$$

dove la norma è quella di  $\mathbb{R}^k$ . Nel caso di tre punti (villaggi) con diversi pesi (numero di bambini), esiste una soluzione di tipo geometrico dovuta a T. Simpson<sup>8</sup> derivata dalla costruzione di Torricelli.

È da notare, però, che per il caso generale del problema di Fermat-Weber non si conosce una formula risolutiva. Anzi, è stato dimostrato che non può esistere una formula o un algoritmo (esatto) che usino soltanto operazioni aritmetiche o estrazioni di radici. Esiste però un algoritmo approssimato introdotto da E. Weiszfeld<sup>9</sup> all'età di 16 anni! Lo studio di questo algoritmo ci porterebbe troppo lontano.

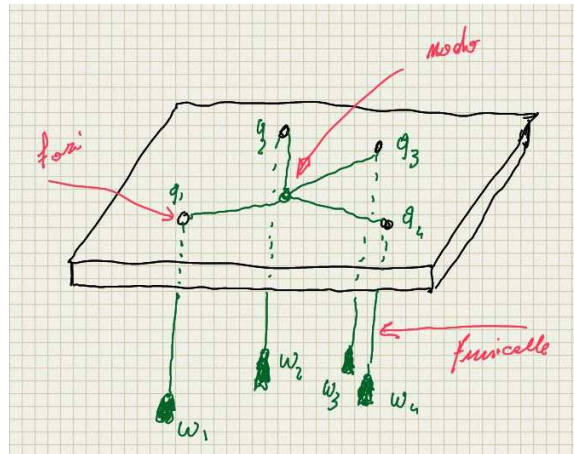
<sup>7</sup>Alfred Weber, 1868–1958.

<sup>8</sup>Thomas Simpson, 1710–1761.

<sup>9</sup>Endre Weiszfeld, 1916–2003.

## Un calcolatore analogico

Possiamo però descrivere un semplice “calcolatore analogico” per risolvere il problema di Fermat-Weber (per punti complanari) in  $\mathbb{R}^3$ . Riportiamo su una superficie rigida i punti  $q_1, \dots, q_n$  e in corrispondenza di ognuno di essi praticiamo un foro attraverso cui introdurremo una funicella. Da un lato della nostra superficie annodiamo insieme le funicelle, mentre ai capi opposti (sull'altro lato della superficie) fisseremo dei pesi proporzionali a  $w_1, \dots, w_n$ . Mantenendo la superficie orizzontale il nodo delle funicelle si posizionerà nella soluzione minimizzante.



Perché funziona? Il motivo è che il sistema formato dai pesi appesi alle funicelle si trova in equilibrio quando il suo baricentro assume la posizione di minima altezza. Spostando il nodo si provoca un accorciamento o allungamento della parte delle funicelle che si trovano sotto la superficie che a sua volta provoca un innalzamento o un abbassamento del centro di massa proporzionale al cambiamento di lunghezza moltiplicato per il peso corrispondente. Quindi il centro di massa si trova nella posizione più bassa possibile quando la somma dei prodotti delle lunghezze delle funicelle sopra la superficie per i pesi ad esse attaccati è minimo.

### 6.2.4 Una questione di equità

Un altro tipo di problema potrebbe porsi chiedendo che la “fatica complessiva” dei bambini di due (o, più in generale, di  $n$ ) villaggi sia la stessa. Se abbiamo  $n$  villaggi  $V_1, \dots, V_n$  con  $N_1, \dots, N_n$  bambini e denotiamo con  $\ell_1, \dots, \ell_n$  le distanze dei villaggi dalla futura scuola, vogliamo che

$$\{N_i \ell_i = N_{i+1} \ell_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Se in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $(x_i, y_i)$  sono le coordinate di  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , e  $(x, y)$  sono quelle della futura scuola, abbiamo il seguente sistema di  $n-1$  equazioni in 2 incognite:

$$\left\{ N_i \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} = N_{i+1} \sqrt{(x - x_{i+1})^2 + (y - y_{i+1})^2}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (6.4) \right.$$

che, in generale, può non avere soluzioni. Se  $n = 3$  ci aspettiamo che ci sia una soluzione. La determinazione di questa però non è semplicissima.

Consideriamo il seguente esempio:

**Esempio 6.2.2.** Consideriamo in un riferimento cartesiano ortogonale i punti  $q_1 = (-h, 0)$ ,  $q_2 = (h, 0)$  e  $q_3 = (0, d)$ , con  $h, d > 0$ . Prendiamo  $\omega_1 = \omega_2 = N$  e  $\omega_3 = M$ . Risolvendo il sistema (6.4), otteniamo il punto di minimo di coordinate:

$$x = 0, \quad y = \begin{cases} \frac{h^2 - d^2}{2d} & \text{se } M = N, \\ \frac{\sqrt{d^2(M/N)^2 + h^2(M/N)^2 - h^2 - d(M/N)^2}}{(M/N)^2 - 1} & \text{se } M \neq N. \end{cases}$$

Osserviamo che il punto trovato è ben diverso dal centro di massa (nel senso della media pesata delle coordinate).

Se  $n > 3$  che facciamo? Un soluzione che pare ragionevole potrebbe essere quella dei minimi quadrati. Cioè minimizzare la funzione

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n (N_i \ell_i^2) = \sum_{i=1}^n (N_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]).$$

Si può dimostrare che il minimo esiste ed è dato dal punto di coordinate

$$x = \frac{1}{\sum_{i=1}^n N_i} \sum_{i=1}^n N_i x_i, \quad y = \frac{1}{\sum_{i=1}^n N_i} \sum_{i=1}^n N_i y_i.$$

In effetti basta fare il gradiente della funzione  $f$  e cercare l'unico punto critico.

## Riferimenti ed approfondimenti

- ✓ Edward A. Bender, *An introduction to mathematical modeling*, Dover Publ., New York, 2000.
- ✓ Hugo Steinhaus. *Mathematical snapshots*, Dover Publ., New York, 1999.