



Università degli Studi di Firenze

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Matematica

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

Studio della Dinamica e Controllo di un Modello Non-Lineare per la Bicicletta

Candidato
Francesco Ricci
Matricola 4821505

Relatori
prof. Luigi Chisci

prof. Giovanni Frosali

Indice

Prefazione	v
Introduzione	vii
1 Elementi di Geometria Differenziale	1
1.1 Varietà e calcolo tensoriale	1
1.1.1 Derivata di Lie	6
1.2 Distribuzioni e codistribuzioni	7
1.3 Gruppi di Lie ed azioni di gruppo	9
1.4 Fibrati e connessioni	15
2 Richiami di dinamica dei sistemi meccanici	21
2.1 Equazione di Newton	21
2.2 Sistemi vincolati	23
2.3 Coordinate generalizzate	26
2.4 Vincoli anolonomi	28
2.5 Spostamenti virtuali e gradi di libertà	29
2.6 Integrabilità dei vincoli cinematici	30
3 Meccanica Lagrangiana dei sistemi olonomi	33
3.1 Principio di Hamilton ed equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi olonomi	33
3.1.1 Sistemi meccanici con forze esterne	35
3.2 Approccio geometrico alla meccanica Lagrangiana	36
3.2.1 Introduzione dei vincoli olonomi	37
3.2.2 Sottovarietà Lagrangiane	38
3.2.3 Dissipazione di Rayleigh	38
3.3 Sistemi meccanici con forze esterne	39
4 Meccanica Lagrangiana dei sistemi anolonomi	41
4.1 Equazioni di moto	41
4.2 Il principio di Lagrange-d'Alembert	43
4.2.1 Formulazione intrinseca delle equazioni	47
4.2.2 Equazioni di moto con i moltiplicatori di Lagrange	48
5 Caratteristiche geometriche della bicicletta	49
5.1 Il modello	49
5.2 Sistemi di riferimento e matrici di rotazione	52
5.2.1 Composizione delle matrici di rotazione	55
5.3 Coordinate generalizzate e spazio delle configurazioni	57
5.4 Beccheggio e punto di contatto anteriore	58

5.4.1	Valutazioni sul beccheggio e sul punto di contatto anteriore	61
6	Cinematica della bicicletta	65
6.1	Velocità lineari ed angolari	65
6.1.1	Ruota posteriore	65
6.1.2	Retrotreno	67
6.1.3	Parte anteriore	68
6.2	Vincoli anolonomi	69
6.2.1	Espressione dei vincoli anteriori rispetto alle velocità generalizzate	71
7	Dinamica della bicicletta	77
7.1	Energia cinetica	77
7.1.1	Ruota posteriore	77
7.1.2	Retrotreno	78
7.1.3	Avantreno	79
7.1.4	Ruota anteriore	82
7.1.5	Energia cinetica totale	82
7.2	Potenziali classici e generalizzati	85
7.3	Lagrangiana e Lagrangiana vincolata	85
7.4	Equazioni di moto	86
7.4.1	Implementazione numerica	89
8	Introduzione del controllo	91
8.1	Controllo Sliding Mode di sistemi ad un solo ingresso	91
8.1.1	Ipotesi sull'incertezza	93
8.1.2	Progetto della legge di controllo	94
8.1.3	Verifica delle condizioni di sliding	95
8.2	Controllo sliding mode di sistemi a più ingressi	96
8.2.1	Progettazione del controllo	97
8.2.2	Verifica delle condizioni di sliding	99
8.3	Controllo della bicicletta	99
	Bibliografia	101

Prefazione

A pagina 545 della quattordicesima edizione della *Encyclopædia Britannica* la bicicletta viene descritta semplicemente come

a light vehicle formed of two wheels mounted in single line in a simple frame of steel tubes, which is equipped with handles, pedals attached to cranks and saddle.

Quindi, si fa riferimento alla grande diffusione che tale mezzo ha in tutto il mondo per il suo facile utilizzo e le prestazioni eccellenti. E non è questo l'unico caso in cui viene elogiata la bicicletta: diverse opere ne riconoscono l'importanza e non mancano gli autori che ipotizzano una società utopica fondata sul solo impiego della bicicletta come mezzo di locomozione e di trasporto.



Figura 1: Pista ciclabile.

Tuttavia, in contrapposizione a tale particolare concezione ottimistica del biciclo, predomina la comune tendenza a preferire la massiccia diffusione dei mezzi motorizzati, e questo comporta tutti quegli svantaggi che si riscontrano nelle metropoli moderne, accompagnati però da una notevole accelerazione dei tempi impiegati per gli spostamenti. Oppure, rifiutando così l'impiego di ogni mezzo, vi sono coloro che si affidano solo ai propri passi e si proclamano convinti pedoni, pertanto contrari agli stessi ciclisti che invadono gli spazi a loro riservati.

Sulla base di tali distinte linee di pensiero, viene naturale individuare due classi di persone: quelle che amano e quelle che odiano la bicicletta. Le ragioni per cui ciascuno di noi appartenga ad uno piuttosto che all'altro gruppo sono molteplici, e certamente non mancano coloro che si sentono indecisi tra le due fazioni, attratti ora da una ed ora dall'altra.

Però, ciò che appare palese, è la trasversalità del fenomeno, il quale interessa indistintamente ogni classe sociale.

Così, un oggetto estremamente semplice come la bicicletta, si trova al centro di una più o meno tacita disputa, i cui effetti sono evidenti pressoché ovunque. Si hanno infatti chiari segnali che manifestano come vi sia un'adorazione oppure un'avversione verso il mezzo, oppure atteggiamenti di compromesso che tendono a conciliare i rapporti non sempre antitetici tra le due parti.

A questo punto, è lecito domandarsi quale linea di pensiero un ingegnere, in particolar modo matematico, intenda seguire. Perché forse un primo studio del mezzo conduce ad un'ammirazione per lo stesso, vista la sua semplicità e la larga diffusione; ma, a ben vedere, la definizione iniziale, tratta dalla *Encyclopædia Britannica*, sminuisce e semplifica troppo quella bicicletta che per la Meccanica Razionale presenta difficoltà notevoli qualora se ne voglia determinare la dinamica. E dunque, lo scopo della presente tesi è vedere effettivamente che cosa nasconda tale mezzo nella sua struttura apparentemente semplice, ed infine chiarire se uno studioso possa elogiarlo e giustamente appassionarsene, oppure eluderlo per la sua complessità.



Figura 2: Transito vietato a velocipedi.

Introduzione

Sembra che la bicicletta abbia fatto la sua prima comparsa verso la fine del Settecento, sebbene non manchino documenti che attestino l'esistenza di un qualche prototipo già alcuni secoli prima. Nel corso del tempo, poi, si è verificato un progressivo perfezionamento di questo mezzo, fino a giungere alla struttura meccanica della bicicletta che oggi è largamente diffusa in tutto il mondo.

Invero, quasi in parallelo con la sua evoluzione meccanica, si è avuto un susseguirsi di studi che hanno cercato di spiegare la dinamica propria della bicicletta, la quale risulta, come è ben noto, staticamente instabile.

Pertanto, dalla metà del XIX secolo è stato affrontato lo studio della bicicletta da un punto di vista matematico, ritenuta inizialmente come un pendolo inverso. Sebbene un modello di questo tipo sia molto semplificato, per la complessità del sistema che si è considerato, vi è stata una diffusa tendenza nel passato a valutare modelli di questo tipo.

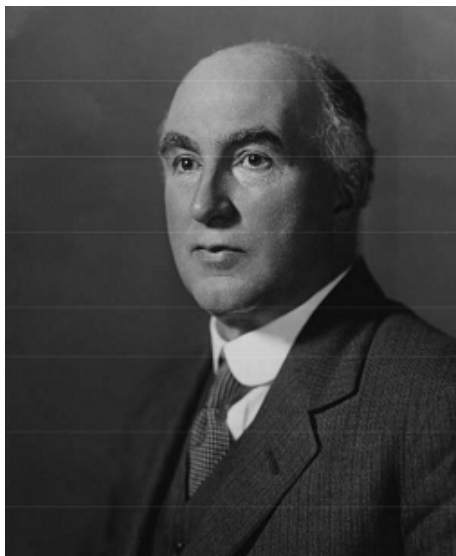


Figura 3: Francis J. W. Whipple (1876-1943).

D'altra parte, abbiamo poi una classe di modelli sviluppati nel tempo, i quali considerano la bicicletta come sistema non lineare. In quest'ottica, fu Francis John Welsh Whipple ([21]) il primo a ricavare alla fine dell'Ottocento le equazioni di moto non lineari per il sistema comprendente sia la bicicletta che il conducente. Tuttavia, anche in questo caso, per la difficoltà delle equazioni che si ottengono, gli autori, tra cui lo stesso Whipple, linearizzano le equazioni di moto attorno alla configurazione assunta dal sistema durante un avanzamento rettilineo. Per cui, ad oggi manca un modello per una bicicletta che tenga conto delle non linearità proprie del sistema e che non si riduca al caso in cui determinati angoli assumano valori piccoli.

La difficoltà evidente che sorge, quando si vuole modellizzare la bicicletta da un punto di vista fisico-matematico, è dovuta non tanto al numero di corpi che sono tra loro opportunamente collegati, ma al tipo di vincoli tra le due ruote ed il terreno. Infatti, non abbiamo a che fare solo con i soliti *vincoli olonomi*, che si trovano solitamente nei corsi di fisica universitari, ma, per trattare il moto di rotolamento delle ruote della bicicletta, si introducono anche i cosiddetti *vincoli anolonomi*, i quali impongono delle restrizioni sulle possibili velocità che può assumere il sistema. In sostanza, questo secondo tipo di vincoli non impone delle restrizioni sulla configurazione del sistema, ma su come una certa configurazione possa essere raggiunta. È chiaro dunque che le equazioni di moto devono essere opportunamente ricavate impiegando la teoria dei sistemi anolonomi, la quale generalizza quella insegnata nei corsi di Meccanica Razionale, e chiaramente propone un grado di difficoltà maggiore.

Proprio per la difficoltà che presenta la trattazione dei vincoli anolonomi, la prima parte del presente lavoro si incentra sulla teoria dei sistemi anolonomi, richiamando in precedenza alcuni

strumenti matematici necessari per uno studio rigoroso in questo campo.

D'altronde, anche la geometria della bicicletta conduce ad equazioni di per sé complicate. Infatti, vedremo che nel caso del beccheggio, ovvero dell'abbassamento che presenta il telaio, non si ottiene un'equazione algebrica risolubile in forma chiusa. Pertanto, quando si dovranno ricavare le equazioni di moto, non dovremo risolvere delle semplici equazioni differenziali, ma ci ritroveremo a studiare delle Equazioni Algebrico-Differenziali (DAE, dall'inglese *Differential Algebraic Equation*).

Si vede quindi che la bicicletta presenta tutta una serie di elementi che rendono il problema chiaramente non banale.

Capitolo 1

Elementi di Geometria Differenziale

In questo capitolo riportiamo alcune nozioni di geometria differenziale che saranno in seguito impiegate nello studio della dinamica dei sistemi meccanici. Infatti, la struttura adatta per lo sviluppo della meccanica analitica, come vedremo, risulta essere quella delle varietà differenziabili. In ogni modo, per uno studio approfondito dell'argomento si rimanda a [7], [11] e [20].

1.1 Varietà e calcolo tensoriale

A parole, una varietà differenziabile è uno spazio topologico che localmente somiglia ad uno spazio Euclideo, ma globalmente può differire da un semplice spazio Euclideo. Vediamo quindi di formalizzare questa idea da un punto di vista matematico. In seguito indicheremo con Q uno spazio topologico T_2 (di Hausdorff), paracompatto e connesso.

Definizione 1.1. Una coppia (U, φ) , costituita da un aperto U di Q ed un omeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ di U in $\varphi(U)$ con la topologia indotta su \mathbb{R}^n da Q tramite φ , si dice un *sistema di coordinate locali* oppure *carta* di Q di dimensione n .

Definizione 1.2. Un *atlante differenziabile* (di coordinate locali) di dimensione n su Q è una famiglia $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ di sistemi di coordinate locali, tutti di dimensione n su Q , tali che:

- $\bigcup_{j \in J} U_j = Q$, ovvero $\{U_j\}_{j \in J}$ sia una ricoprimento aperto di Q ;
- per ogni $U_j \cap U_i \neq \emptyset$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_j \cap U_i) \rightarrow \varphi_j(U_j \cap U_i)$ è un diffeomorfismo.

Si noti che essendo gli spazi topologici connessi, si evita allora di avere atlanti di dimensioni diverse; aggiungendo questa proprietà non strettamente necessaria, la dimensione risulta così ben definita.

Osservazione 1.1. In un atlante di Q non ci possono essere carte di dimensione diversa. Infatti, supponiamo che, per assurdo, esista un atlante di Q il quale contiene sia carte di dimensione n sia carte di dimensione diversa da n . Si consideri quindi $U = \bigcup_{k \in K} U_k$ tali che (U_k, φ_k) abbia dimensione n , mentre prendiamo $V = \bigcup_{h \in H} U_h$ tali che (U_h, φ_h) abbia dimensione diversa da n . Allora U e V sono due aperti e $U \cup V = Q$, in quanto ogni punto di Q è presente in una carta, in quanto gli aperti formano un ricoprimento dello spazio topologico.

Se $U \cap V = \emptyset$, allora uno dei due aperti è vuoto, poiché lo spazio è *connesso*. Se invece nessuno degli aperti è vuoto e vale la relazione $U \cap V \neq \emptyset$, significa che un punto appartiene a (U_j, φ_j) ed anche a (V_i, φ_i) , con il problema che una carta va in \mathbb{R}^n , mentre l'altra in \mathbb{R}^m ($m \neq n$).

Pertanto si avrebbe un diffeomorfismo tra \mathbb{R}^n ed \mathbb{R}^m , ma questo è assurdo perché avremmo un diffeomorfismo chiaramente non biiettivo. Quindi l'intersezione deve essere vuota e tutto l'insieme sta in un aperto, nel nostro caso U , e quindi abbiamo un'unica dimensione.

Definizione 1.3. Sia $\mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ un atlante differenziabile di dimensione n su Q . Allora il sistema di coordinate locali (U, φ) si dice *compatibile* con \mathcal{U} se, quando $U \cap U_j \neq \emptyset$, allora

$$\varphi_j \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U \cap U_j)$$

è un diffeomorfismo.

In tal modo risulta possibile ordinare gli atlanti per inclusione. Se infatti \mathcal{U} e \mathcal{V} sono due atlanti di dimensione n su Q , se \mathcal{V} si ottiene da \mathcal{U} aggiungendo a questo carte compatibili, allora significa che $\mathcal{U} < \mathcal{V}$. La relazione $<$ indica un *ordinamento parziale*, ed in base al Lemma di Zorn possiamo affermare che esiste un elemento massimale della successione di inclusioni che contiene un dato atlante iniziale.

Definizione 1.4. Consideriamo Q dotato di un atlante massimale (differenziale) di dimensione n . Questo si dice una *varietà differenziabile* di dimensione n . Inoltre, l'atlante massimale si dice anche una *struttura differenziabile* su Q di dimensione n .

Esempio 1.1. Un primo esempio di varietà differenziabile si ottiene prendendo $Q = \mathbb{R}$ e come atlante $\mathcal{U} = \{(\mathbb{R}, \text{Id})\}$. Tale spazio topologico presenta una struttura differenziabile quando si includano tutte le carte compatibili. In modo del tutto analogo, possiamo anche prendere $Q = \mathbb{R}^n$ e l'atlante $\mathcal{U} = \{(\mathbb{R}^n, \text{Id})\}$, il quale poi dobbiamo rendere massimale, includendo ogni carta compatibile.

Definizione 1.5. Siano Q ed N due varietà differenziabili di dimensione n ed m rispettivamente. Sia quindi U un aperto di Q e consideriamo $x \in U$. Si dice che la funzione continua $f: U \rightarrow N$ è *differenziabile in $x \in U$* se esiste una carta (U_j, ϕ_j) attorno al punto x in Q ed una carta (V_k, ψ_k) attorno ad $f(x)$ in N tale che l'applicazione

$$\psi_k \circ f \circ \phi_j^{-1}: \phi_j(U_j \cap U \cap f^{-1}(V_k)) \rightarrow \psi_k(V_k) \subset \mathbb{R}^m$$

sia differenziabile nel punto x . Inoltre, se f risulta differenziabile in ogni $x \in U$, allora si dice che f è *differenziabile in U* .

Osserviamo quindi che lo spazio di partenza $\phi_j(U_j \cap U \cap f^{-1}(V_k))$ è ben definito, in quanto abbiamo un'intersezione tra aperti, essendo $f^{-1}(V_k)$ un aperto perché la funzione è continua. Inoltre, da questa definizione si vede come, non potendo definire la differenziabilità direttamente sulla varietà differenziabile, si debba ricorrere alla rappresentazione in \mathbb{R}^n attraverso le carte.

Osservazione 1.2. La definizione 1.5 non dipende dalla scelta delle carte ϕ_j e ψ_k sulle due varietà. Infatti, prese altre due carte ϕ_i ed ψ_h , si vede che

$$\psi_h \circ f \circ \phi_i^{-1} = \underbrace{\psi_h \circ \psi_k^{-1}}_{\text{diffeomorfismo}} \circ \overbrace{\psi_k \circ f \circ \phi_j^{-1}}^{\text{differenziabile}} \circ \underbrace{\phi_j \circ \phi_i^{-1}}_{\text{diffeomorfismo}},$$

quindi la definizione è ben data.

Definizione 1.6. Una funzione suriettiva ed invertibile $f: Q \rightarrow N$ si dice un *diffeomorfismo* (tra varietà differenziabili) se f risulta differenziabile in Q ed anche l'inversa $f^{-1}: N \rightarrow Q$ risulta differenziabile.

Su uno stesso spazio topologico è quindi possibile assegnare atlanti tra loro non compatibili, i quali però risultino differomorfi.

Definizione 1.7. Sia M una varietà differenziale. Una coppia (N, φ) è una *sottovarietà* di M se $\varphi: N \rightarrow M$ è iniettiva ed il suo differenziale è iniettivo in ogni punto di N ; se inoltre φ è un omeomorfismo, f viene detto un *embedding*.

Una volta definito il concetto di varietà differenziabile, rammentiamo che il *fibrato tangente* TQ di una varietà Q è dato dall'unione disgiunta di tutti gli spazi tangenti in ogni punto $x \in Q$, ovvero

$$TQ = \bigcup_{x \in Q}^{\circ} T_x Q.$$

Pertanto, un punto di TQ è un vettore v tangente ad Q in un qualche punto $x \in Q$. La proiezione naturale dal fibrato tangente, la quale assegna ad ogni vettore tangente il suo punto base, è la mappa $\tau_Q: TQ \rightarrow Q$. L'immagine inversa $\tau_Q^{-1}(x)$ di un punto $x \in Q$ attraverso la proiezione naturale è lo spazio tangente $T_x Q$. Questo spazio è anche chiamato la *fibra* del fibrato tangente sopra il punto $x \in Q$.

Dato uno spazio tangente $T_x Q$, si indica lo spazio duale, ovvero lo spazio delle funzioni lineari da $T_x Q$ in \mathbb{R} , con $T_x^* Q$. Il *fibrato cotangente* $T^* Q$ di una varietà Q è il fibrato vettoriale su Q formato dall'insieme disgiunto di tutti gli spazi duali $T_x^* Q$. Gli elementi $\omega \in T_x^* Q$ sono chiamati vettori duali oppure *covettori*. In modo analogo a quanto fatto per il fibrato tangente, si definisce la proiezione dal fibrato cotangente $\pi_Q: T^* Q \rightarrow Q$, la quale assegna ad ogni covettore il suo punto base.

Sia quindi $f: Q \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile tra le due varietà Q ed N . Allora si definisce il differenziale di f come la mappa $Tf: TQ \rightarrow TN$. In letteratura si è soliti indicare il differenziale anche con le notazioni f_* e Df . L'insieme di tutte le applicazioni differenziabili da Q ad N viene denotato con $C^\infty(Q, N)$. Inoltre, se $N = \mathbb{R}$, allora l'insieme di tutte le funzioni differenziabili a valori reali è indicato con $C^\infty(Q)$.

Un *campo vettoriale* X su Q è un'applicazione differenziabile $X: Q \rightarrow TQ$ la quale assegna ad ogni punto $x \in Q$ un vettore tangente $X(x) \in T_x Q$, oppure, in altre parole, $\tau_Q \circ X = \text{Id}_Q$. L'insieme di tutti i campi vettoriali su Q viene indicato con $\mathfrak{X}(Q)$. Osserviamo che un campo vettoriale può essere anche visto come una *sezione* del fibrato tangente. Una *curva integrale* di un campo vettoriale X è una curva c tale che $\dot{c}(t) = X(c(t))$. Dato $x \in Q$, si denoti con $\phi_t(x)$ la curva integrale massimale di X , ovvero $c(t) = \phi_t(x)$, con $c(0) = x$. In questo caso massimale si riferisce al fatto che l'intervallo di definizione di $c(t)$ è massimale. È poi facile da verificare che $\phi_0 = \text{Id}$ mentre

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s,$$

ogni volta che è definita la composizione. Il *flusso* di un campo vettoriale X è quindi determinato come la collezione delle mappe $\phi_t: Q \rightarrow Q$. Dalla definizione, segue che soddisfano

$$\frac{d}{dt}(\phi_t(x)) = X(\phi_t(x)), \quad t \in (-\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x)), \quad \forall x \in Q.$$

In modo del tutto analogo, una *1-forma* α su Q è un'applicazione liscia $\alpha: Q \rightarrow T^* Q$ la quale associa ad ogni punto $x \in Q$ un covettore $\alpha(x) \in T_x^* Q$, ovvero $\pi_Q \circ \alpha = \text{Id}_Q$. L'insieme di tutte le 1-forme su Q è indicato con $\Omega^1(Q)$.

Entrambe queste nozioni, campi vettoriali ed 1-forme, sono casi speciali di un oggetto geometrico più generale, detto *campo tensoriale*. Un campo tensoriale t di ordine controvariante r ed ordine covariante s è una sezione C^∞ di $T_s^r Q$, ovvero associa ad ogni $x \in Q$ un'applicazione multilineare

$$t(x): \underbrace{T_x^* Q \times \cdots \times T_x^* Q}_r \text{ volte} \times \underbrace{T_x Q \times \cdots \times T_x Q}_s \text{ volte} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si è soliti dire che t è un campo tensoriale di ordine (r, s) . Il *prodotto tensoriale* di un campo tensoriale t di ordine (r, s) con uno t' di ordine (r', s') è il campo tensoriale $t \otimes t'$ di ordine $(r+r', s+s')$ definito da

$$\begin{aligned} t \otimes t'(x)(\omega_1, \dots, \omega_r, \mu_1, \dots, \mu_{r'}, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_{s'}) &= \\ &= t(x)(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s) \cdot t'(x)(\mu_1, \dots, \mu_{r'}, w_1, \dots, w_{s'}), \end{aligned}$$

dove $x \in Q$, $v_i, w_i \in T_x Q$ e $\omega_j, \mu_j \in T_x^* Q$.

Un sottoinsieme speciale dei campi tensoriali è l'insieme $\Omega^k(Q) \subset T_k^0 Q$ di tutti i campi tensoriali antisimmetrici di ordine $(0, k)$. Gli elementi di $\Omega^k(Q)$ sono chiamati k -forme. Se quindi consideriamo $t \in \Omega^k(Q)$, si definisce *alternatore* l'applicazione $A: T_k^0 Q \rightarrow \Omega^k(Q)$ definita come

$$A(t)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) t(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

dove Σ_k è l'insieme delle permutazioni di $\{1, \dots, k\}$, mentre $\text{sign}(\sigma)$ è il segno della permutazione σ , ovvero

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è pari,} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari.} \end{cases}$$

È facile verificare che l'applicazione A è lineare, $A|_{\Omega^k(Q)} = \text{Id}$ ed $A \circ A = A$.

A questo punto, possiamo definire il *prodotto esterno* tra $\alpha \in \Omega^k(Q)$ e $\beta \in \Omega^l(Q)$ come la forma $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(Q)$ data dalla relazione

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+l)!}{k!l!} A(\alpha \otimes \beta).$$

Per quanto riguarda la costante che appare nel prodotto esterno, ci sono diverse convenzioni per la sua definizione. Quella usata in questo contesto si conforma a CITA, ma non a GENTILI. Siano ad esempio α e β due 1-forme, allora

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1), \quad \forall v_1, v_2 \in T_x Q,$$

mentre se α è una 2-forma e β una 1-forma, allora

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, v_3) = \alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) + \alpha(v_3, v_1)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1).$$

Proposizione 1.1. *Il prodotto esterno ha le seguenti proprietà:*

1. $\alpha \wedge \beta$ è associativo, ovvero $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$;
2. $\alpha \wedge \beta$ è bilineare in α e β , ovvero

$$\begin{aligned} (a\alpha_1 + b\alpha_2) \wedge \beta &= a(\alpha_1 \wedge \beta) + b(\alpha_2 \wedge \beta), \\ \alpha \wedge (c\beta_1 + d\beta_2) &= c(\alpha \wedge \beta_1) + d(\alpha \wedge \beta_2); \end{aligned}$$

3. $\alpha \wedge \beta$ è anticommutativo, ossia $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$, dove $\alpha \in \Omega^k(Q)$ e $\beta \in \Omega^l(Q)$.

L'algebra esterna (delle forme differenziali) $\Omega(Q)$ è quindi lo la somma diretta $\bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(Q)$, insieme alla sua struttura di spazio vettoriale reale infinito-dimensionale e la moltiplicazione \wedge .

Quando si lavora con le forme differenziali, un altro oggetto geometrico importante è la *derivata esterna* \mathbf{d} . In particolare, la derivata esterna $\mathbf{d}\alpha$ di una k -forma α su una varietà Q è la $(k+1)$ -forma su Q determinata dalla seguente

Proposizione 1.2. *Esiste un'unica applicazione \mathbf{d} dalle k -forme su Q alle $(k+1)$ -forme su Q tale che:*

1. *se α è una 0-forma, ovvero se $\alpha = f \in C^\infty(Q)$, allora $\mathbf{d}f$ è la 1-forma corrispondente al differenziale di f ;*
2. *$\mathbf{d}\alpha$ è lineare in α , cioè, per ogni coppia di numeri reali c_1 e c_2 risulta che*

$$\mathbf{d}(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) = c_1\mathbf{d}\alpha_1 + c_2\mathbf{d}\alpha_2;$$

3. *$\mathbf{d}\alpha$ soddisfa la regola della catena*

$$\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathbf{d}\beta,$$

dove α è una k -forma e β una l -forma;

4. *$\mathbf{d}^2 = 0$, ovvero $\mathbf{d}(\mathbf{d}\alpha) = 0$ per ogni k -forma α ;*
5. *\mathbf{d} è un operatore locale, ovvero $\mathbf{d}\alpha(x)$ dipende solo da α ristretto ad ogni intorno aperto di x ; infatti, se $U \subset V$ sono aperti in Q , allora*

$$\mathbf{d}(\alpha|_U) = (\mathbf{d}\alpha)|_U,$$

dove $\alpha \in \Omega^k(V)$.

Una k -forma α viene detta *chiusa* su $\mathbf{d}\alpha = 0$, mentre *esatta* se esiste una $(k-1)$ -forma β tale che $\alpha = \mathbf{d}\beta$. Per la proposizione precedente ogni forma esatta è chiusa, mentre, per il lemma di Poincaré, una forma chiusa è localmente esatta.

Sia quindi $\varphi: Q \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile dalla varietà Q alla varietà N , e sia $\omega \in \Omega^k(N)$. Allora si definisce il *pull back* $\varphi^*\omega$ di ω attraverso φ come la k -forma su Q data da

$$\varphi^*\omega(x)(v_1, \dots, v_k) = \omega(\varphi(x))(T_x\varphi(v_1), \dots, T_x\varphi(v_k)),$$

dove $v_i \in T_xQ$. Se inoltre φ è un diffeomorfismo, allora il *push forward* φ_* è definito come $\varphi_* = (\varphi^{-1})^*$, ovvero il *pull back* è un isomorfismo tra fibrati vettoriali. Osserviamo quindi che il *pull back* definisce una mappa $f^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(Q)$. Le proprietà principali del *pull back* sono rammentate nella seguente

Proposizione 1.3. *Il pull back presenta le seguenti proprietà:*

1. *$(\gamma \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \gamma^*$, dove $\varphi \in C^\infty(Q, N)$, mentre $\gamma \in C^\infty(N, W)$, con Q, N e W varietà differenziabili;*
2. *$(\text{Id}_Q^*)|_{\Omega^k(Q)} = \text{Id}_{\Omega^k(Q)}$;*
3. *$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$, dove $\varphi \in C^\infty(Q, N)$, $\alpha \in \Omega^k(Q)$ e $\beta \in \Omega^l(N)$;*
4. *la derivata esterna \mathbf{d} commuta con il pull back, ovvero per $\varphi \in C^\infty(Q, N)$ risulta che $\mathbf{d}(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(\mathbf{d}\alpha)$, con $\alpha \in \Omega^k(N)$.*

Infine, vediamo un ultimo operatore associato con un campo vettoriale X . Sia $\omega \in \Omega^k(Q)$. Il *prodotto interno*, oppure *contrazione*, di X ed ω , indicato con $\mathbf{i}_X\omega \in \Omega^{k-1}(Q)$, è definito come

$$\mathbf{i}_X\omega(x)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(x)(X(x), v_1, \dots, v_{k-1}),$$

dove $v_i \in T_xQ$. Come la derivata esterna, anche l'operatore \mathbf{i}_X è una \wedge -antiderivazione, ovvero risulta essere \mathbb{R} -lineare ed inoltre

$$\mathbf{i}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathbf{i}_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\mathbf{i}_X\beta),$$

dove $\alpha \in \Omega^k(Q)$ e $\beta \in \Omega^l(Q)$. Inoltre, se $f \in C^\infty(Q)$, allora abbiamo che $\mathbf{i}_fX\alpha = f\mathbf{i}_X\alpha$.

1.1.1 Derivata di Lie

La *definizione dinamica* della derivata di Lie è la seguente. Siano $\alpha \in \Omega^k(Q)$ ed X un campo vettoriale con flusso φ_t . Allora la *derivata di Lie* di α lungo X è data da

$$\mathcal{L}_X \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\varphi_t^* \alpha) - \alpha] = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha \right|_{t=0}.$$

Da questa definizione, assieme alle proprietà del *pull back*, segue il seguente

Teorema 1.1. *Impiegando la notazione sopra introdotta, si ha*

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha = \varphi_t^* \mathcal{L}_X \alpha.$$

Questo risultato fondamentale vale anche per campi vettoriali che dipendano esplicitamente dal parametro t .

Sia quindi f una funzione a valori reali su una varietà Q ed X un campo vettoriale su X , allora la derivata di Lie di f lungo X è la *derivata direzionale*

$$(\mathcal{L}_X f)(x) = X_x(f) := \mathbf{d}f_x(X(x)).$$

Osserviamo che l'operazione $\mathcal{L}_X: C^\infty(Q) \rightarrow C^\infty(Q)$ è un'derivazione, ovvero risulta \mathbb{R} -lineare ed inoltre $\mathcal{L}_X(fg) = \mathcal{L}_X(f)g + f\mathcal{L}_X(g)$, dove $f, g \in C^\infty(Q)$.

Osserviamo ora che l'insieme di tutte le derivazioni \mathbb{R} -lineari θ su $C^\infty(Q)$ forma un modulo C^∞ , con la legge $(f\theta)(g) = f(\theta g)$. Tale modulo è quindi isomorfo ad $\mathfrak{X}(Q)$. In particolare, per ogni derivazione θ , esiste un unico campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(Q)$ per cui $\theta = \mathcal{L}_X$. Questa è talvolta presa come definizione alternativa di un campo vettoriale.

Dunque, dati due campi vettoriali X ed Y sulla varietà Q , si può facilmente verificare che la mappa $f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f)) = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ è una derivazione. Pertanto, questa mappa determina un unico campo vettoriale indicato con $[X, Y]$ e chiamato *parentesi di Jacobi-Lie* di X ed Y , detto anche semplicemente *bracket* dei due campi vettoriali.

Esiste perciò un interessante collegamento le parentesi di Jacobi-Lie e la derivata di Lie. Infatti, si può definire la *derivata di Lie di Y lungo X* come l'unico campo vettoriale dato da $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ e tale che $\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$. In questo caso, il teorema 1.1 vale sostituendo ad α il campo vettoriale Y .

Osservazione 1.3. Si può vedere che la parentesi di Lie di due campi vettoriali ha un significato geometrico in termini di successive applicazioni dei flussi dei due campi vettoriali in una direzione e quella inversa.

Se l'insieme dei campi vettoriali X_i è tale che esiste una funzione γ_{ijk} per cui $[X_i, X_j] = \gamma_{ijk} X_k$, allora l'insieme è detto *involutivo*. In questo caso, le parentesi di Lie non generano nuove direzioni, e ciò comporta un impedimento nel mostrare la controllabilità.

Osservazione 1.4. Esiste anche un *approccio algebrico* per definire la derivata di Lie su forme o tensori. Si parte considerando la derivata di Lie su funzioni e campi vettoriali, quindi si estende alle forme differenziali richiedendo che la derivata di Lie sia una derivazione. Chiaramente, si può dimostrare che le due definizioni sono del tutto equivalenti.

Proposizione 1.4. *La derivata di Lie presenta le seguenti proprietà:*

1. se $\phi \in C^\infty(Q, N)$ è un diffeomorfismo, allora $[\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_* [X, Y]$;
2. $\mathcal{L}_X(f \cdot Y) = \mathcal{L}_X f \cdot Y + f \cdot \mathcal{L}_X Y$, per ogni $f \in C^\infty(Q)$.

Infine, concludiamo questa sezione riportando alcune proprietà rilevanti che riguardano la derivata esterna, il prodotto interno e la derivata di Lie.

Proposizione 1.5. *Si considerino due generici campi vettoriali $X, Y \in \mathfrak{X}(Q)$ e siano $f \in C^\infty(Q)$ ed $\alpha \in \Omega^k(Q)$. Allora risulta che*

1. $d\mathcal{L}_X\alpha = \mathcal{L}_X d\alpha$;
2. $i_X df = \mathcal{L}_X f$;
3. $\mathcal{L}_X\alpha = i_X d\alpha + di_X\alpha$;
4. $\mathcal{L}_f X\alpha = f\mathcal{L}_X\alpha + df \wedge i_X\alpha$;
5. $i_{[X,Y]}\alpha = \mathcal{L}_X i_Y\alpha - i_Y \mathcal{L}_X\alpha$;

1.2 Distribuzioni e codistribuzioni

Introduciamo adesso le nozioni di distribuzione e codistribuzione. Queste nozioni saranno importanti per la trattazione geometrica della dinamica dei sistemi anolonomi.

Definizione 1.8. Una *distribuzione* \mathcal{D} su una varietà Q è una famiglia di sottospazi lineari $\{\mathcal{D}_q\}$ degli spazi tangenti $T_q Q$ per ogni $q \in Q$. Analogamente, una *codistribuzione* è una famiglia di sottospazi lineari degli spazi cotangenti $T_q^* Q$. La (co)distribuzione \mathcal{D} viene anche detta un *sottofibrato vettoriale* ed i sottospazi lineari che la costituiscono sono detti *fibre della (co)distribuzione* nel punto q .

Definizione 1.9. Una distribuzione è detta *differenziabile* se per ogni $q \in \text{Dom } \mathcal{D}$ esiste un numero finito di campi vettoriali locali X_1, \dots, X_l definiti su un qualche intorno aperto U di q in modo che $\mathcal{D}_{q'} = \text{Span}\{X_1(q'), \dots, X_l(q')\}$ per ogni $q' \in U$. Analogamente una codistribuzione è *differenziabile* se per ogni $q \in \text{Dom } \mathcal{D}$ esiste un numero finito di 1-forme $\omega_1, \dots, \omega_l$ individuate su un qualche intorno aperto U di q in modo che $\mathcal{D}_{q'} = \text{Span}\{\omega_1(q'), \dots, \omega_l(q')\}$ per ogni $q' \in U$.

Si definisce quindi il *rango* di \mathcal{D} in q come la dimensione dello spazio lineare \mathcal{D}_q , ovvero l'applicazione $\rho: Q \rightarrow \mathbb{R}$, tale che $\rho(q) = \dim \mathcal{D}_q$. Per ogni $q_0 \in Q$, se \mathcal{D} è differenziabile, allora è chiaro che $\rho(q) \geq \rho(q_0)$ in un intorno di q_0 . Pertanto, ρ è una funzione semicontinua inferiore. Se poi ρ è una funzione costante, allora \mathcal{D} viene detta una distribuzione (codistribuzione) *regolare*. In seguito, faremo riferimento a quest'ultimo tipo di (co)distribuzioni.

Osservazione 1.5. Osserviamo che una distribuzione regolare di dimensione k può essere localmente determinata in maniera univoca tramite k campi vettoriali $\{Z_1, \dots, Z_k\}$ che generano in ogni punto le fibre della distribuzione. Per tale motivo, i campi vettoriali in questione sono detti *generatori della distribuzione*. In modo analogo, i generatori di una codistribuzione sono le 1-forme che generano le fibre della stessa.

Per una (co)distribuzione differenziabile \mathcal{D} , un punto $q \in Q$ viene chiamato *regolare* se q è u massimo locale di ρ , ovvero ρ risulta costante in un intorno aperto di q . In caso contrario, il punto q di \mathcal{D} è detto *singolare*. L'insieme R di tutti i punti regolari di \mathcal{D} è chiaramente un aperto. Inoltre, è anche denso, in quanto se $q_0 \in S = Q \setminus R$ ed U è un intorno di q_0 , allora U contiene necessariamente punti regolari di \mathcal{D} , poiché $\rho|_U$ deve avere un massimo essendo a valori interi e limitata. Di conseguenza, $q_0 \in \bar{R}$, con \bar{R} chiusura di R .

Si noti che, in generale, l'insieme R non è connesso, come si vede nel seguente esempio.

Esempio 1.2. Sia $Q = \mathbb{R}^2$ e consideriamo $\mathcal{D}_{(x,y)} = \text{Span}\{\phi(x)(dx - dy)\}$ codistribuzione differenziabile, dove $\phi(x)$ è definita da

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \exp(x^{-2}) & x > 0. \end{cases}$$

Allora i punti singolari sono quelli dell'asse y , mentre le componenti connesse di R sono i due semipiani $x > 0$, dove il rango è uguale ad 1, e $x < 0$, dove il rango è nullo.

Nel seguito, faremo riferimento alle codistribuzioni, in quanto le definizioni degli stessi concetti per le distribuzioni sono dirette.

Data una codistribuzione \mathcal{D} , si definisce il suo *annullatore* (in inglese *annihilator*) \mathcal{D}^0 come la distribuzione data da

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^0: \text{Dom } \mathcal{D} \subset Q &\rightarrow TQ \\ q &\mapsto \mathcal{D}_q^0 = (\mathcal{D}_q)^0 = \{ v \in T_q Q \mid \alpha(v) = 0, \forall \alpha \in \mathcal{D}_q \}. \end{aligned}$$

Si noti che se \mathcal{D} è differenziabile, in generale \mathcal{D}^0 non è differenziabile e nemmeno continuo, poiché la funzione rango di \mathcal{D}^0 corrispondente non è semicontinua inferiore. Infatti, \mathcal{D}^0 è differenziabile se e soltanto qualora \mathcal{D} sia una codistribuzione regolare.

Una sottovarietà immersa N di Q viene detta *sottovarietà integrale* di \mathcal{D} se $T_n N$ è annullato da \mathcal{D}_n in ogni punto $n \in N$. Inoltre, N è una sottovarietà integrale massimale se

$$(T_n N)^0 = \mathcal{D}_n,$$

per ogni $n \in N$. In particolare, questo implica che il rango di \mathcal{D} è costante in N . Un *foglio* L di \mathcal{D} è una sottovarietà integrale massimale connessa tale che ogni varietà integrale massimale connessa di \mathcal{D} , la quale intersechi L , è una sottovarietà aperta di L . Allora una codistribuzione \mathcal{D} viene detta *parzialmente integrabile* se per ogni punto regolare $q \in R$ esiste un foglio passante per q . Inoltre, se $R = Q$, allora la codistribuzione si dice *completamente integrabile*. Nel secondo caso, l'insieme dei fogli definisce una *foliazione* di Q . Chiaramente, ogni codistribuzione completamente integrabile è anche parzialmente integrabile.

Esempio 1.3. Con riferimento alla codistribuzione introdotta nell'esempio precedente, vediamo che i fogli di \mathcal{D} sono in semipiano $\{x < 0\}$ e le semirette di pendenza 1 nel semipiano $\{x > 0\}$. Preso un punto singolare, non ci sono fogli passanti per esso. Di conseguenza, \mathcal{D} non è completamente integrabile, ma è una codistribuzione parzialmente integrabile.

Per questi ultimi risultati, facciamo riferimento alle distribuzioni. Una distribuzione è detta *involutiva* se per ogni coppia di campi vettoriali X ed Y su Q con valori in \mathcal{D} , il *bracket* $[X, Y]$ è ancora un campo vettoriale con valori in \mathcal{D} . Inoltre, riprendendo la definizione precedente, affermiamo che una distribuzione è *completamente integrabile* se per ogni $q \in Q$ esiste una sottovarietà locale di Q contenente q tale che il suo fibrato tangente coincida con \mathcal{D} ristretta a questa sottovarietà. Abbiamo allora il seguente

Teorema 1.2 (di Frobenius). *L'involutività di \mathcal{D} è equivalente alla sua integrabilità, la quale è poi equivalente all'esistenza di una foliazione su Q il cui fibrato tangente coincida con \mathcal{D} .*

L'ultimo risultato è particolarmente importante poiché permette di determinare se una distribuzione è integrabile semplicemente verificando se è involutiva. Infatti, i seguenti risultati permettono di determinare l'involutività di una distribuzione in modo diretto.

Proposizione 1.6. *Per verificare che una distribuzione \mathcal{D} è involutiva è sufficiente verificare tale proprietà sui generatori della distribuzione.*

In base a questa proposizione, per verificare se una distribuzione risulta integrabile è necessario e sufficiente calcolare le parentesi di Lie per ogni coppia di generatori della distribuzione e vedere se i campi ottenuti appartengono ancora alle fibre della distribuzione.

Proposizione 1.7. *Una distribuzione \mathcal{D} di dimensione 1 è banalmente involutiva e dunque sempre integrabile.*

1.3 Gruppi di Lie ed azioni di gruppo

Una struttura importante ed ubiquitaria che appare in Meccanica è quella di gruppo di Lie. Sia G un gruppo, ovvero un insieme con un'operazione binaria interna $\cdot : G \times G \rightarrow G$, detta moltiplicazione, che soddisfi i seguenti assiomi:

1. *proprietà associativa*, ossia $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$, per ogni $g, h, k \in G$;
2. *esistenza dell'elemento neutro*, ovvero esiste un elemento e di G , detto identità, tale che, per ogni $g \in G$, risulti $e \cdot g = g \cdot e = g$;
3. *esistenza dell'inverso*, ovvero esiste, per ogni $g \in G$, un elemento g^{-1} , detto inverso di g , tale che $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$.

La caratteristica dei gruppi di Lie è che, oltre alla moltiplicazione, hanno una struttura di varietà differenziabile, in modo tale che le due strutture siano compatibili. Più precisamente, abbiamo la seguente

Definizione 1.10. Un gruppo G dotato di una struttura di varietà differenziabile viene detto un *gruppo di Lie* se le operazioni di moltiplicazione \cdot e di inversione $g \mapsto g^{-1}$ sono entrambe C^∞ .

Esempio 1.4 (Gruppo generale lineare). Sia $G = GL(n, \mathbb{R})$, varietà differenziabile C^∞ in quanto aperto di \mathbb{R}^{n^2} . Verifichiamo che le due mappe μ e τ , definite attraverso la moltiplicazione per matrici, siano C^∞ . A tal fine, si identifica la matrice A con un vettore di n^2 coordinate; pertanto AB è un polinomio nelle n^2 variabili, e chiaramente C^∞ . In modo analogo, per l'operazione di inversione, possiamo scrivere

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A},$$

dove il determinante è diverso da zero perché $A \in GL(n, \mathbb{R})$, mentre la matrice aggiunta \tilde{A} è ottenuta attraverso operazioni polinomiali nelle n^2 variabili.

Esempio 1.5 (Gruppo speciale lineare). Esaminiamo adesso un caso piuttosto importante. Si consideri il gruppo $G = SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$. Notiamo che $SL(n, \mathbb{R}) \leq GL(n, \mathbb{R})$, ovvero $SL(n, \mathbb{R})$ è un *sottogruppo* in senso algebrico di $GL(n, \mathbb{R})$, in quanto chiuso rispetto alle operazioni di gruppo definite nell'esempio 1.4. *A priori*, questo sottogruppo potrebbe non essere un gruppo di Lie, poiché bisogna prima verificare che abbia una struttura di varietà differenziabile. Si consideri allora l'applicazione determinante

$$D := \det : GL(N, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

chiaramente C^∞ ; dunque $G = D^{-1}(\{1\})$, e basta mostrare che D sia una *sommersione*¹. Quindi, per vedere ciò, deve risultare $\mathbf{d}D|_A \neq 0$, e tale condizione si verifica facilmente.

Esempio 1.6 (Gruppo ortogonale). Sia $G = O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = \text{Id}\}$. Di nuovo, si può osservare che $O(n, \mathbb{R}) \leq GL(n, \mathbb{R})$ e per verificare che è un gruppo di Lie è sufficiente, anche in questo caso, trovare un'opportuna sommersione. Si consideri quindi la mappa

$$\begin{aligned} F : GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto AA^T - \text{Id}, \end{aligned}$$

¹Per la definizione di sommersione si veda ad esempio GENTILI, WARNER.

dove $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici simmetriche, il quale è uno spazio vettoriale diffeomorfo ad $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Allora, possiamo scrivere che $G = F^{-1}(0)$. Per vedere che F è poi una sommersione, prendiamo $A \in O(n, \mathbb{R})$ e calcoliamo il differenziale di F in A

$$\mathbf{d}F_A: T_A \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R}).$$

Si utilizza il rapporto incrementale per valutare il differenziale. Sia $H \in \mathbb{R}^{n^2}$, allora

$$\begin{aligned} F(A+H) &= (A+H)(A^T+H^T) - \text{Id} = AA^T + AH^T + HA^T - \text{Id} + HH^T \\ &\implies \mathbb{F}_A(H) = HA^T + AH^T. \end{aligned}$$

Per verificare se la mappa lineare sia suriettiva, per prima cosa prendiamo $A = \text{Id}$. In questo caso si ottiene $\mathbf{d}F_{\text{Id}}(H) = H + H^T$, e di conseguenza

$$\ker(\mathbf{d}F_{\text{Id}}) = \Lambda^2(n, \mathbb{R}),$$

dove $\Lambda^2(n, \mathbb{R})$ denota l'insieme delle matrici antisimmetriche, diffeomorfo ad $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Quindi, guardando le dimensioni, si ricava che $\mathbf{d}F_{\text{Id}}$ è suriettivo². In generale,

$$\ker(\mathbf{d}F_A) = \left\{ H \mid HA^T \in \Lambda^2(n, \mathbb{R}) \right\} = \left\{ H \mid H = XA, X \in \Lambda^2(n, \mathbb{R}) \right\} \cong \ker(\mathbf{d}F_{\text{Id}}).$$

Osservazione 1.6. Si ricorda che se $p \in N$ è un valore regolare per $f: M \rightarrow N$ di classe C^∞ , allora lo spazio tangente alla varietà $S = f^{-1}(p)$ in ogni suo punto $s \in S$ è dato da $T_s S = \ker(\mathbf{d}f_s)$.

Osservazione 1.7. Notiamo che il gruppo di Lie introdotto nell'esempio 1.6 *non* risulta connesso. Infatti, l'immagine di tale gruppo tramite la mappa continua determinante risulta essere

$$\det(O(n, \mathbb{R})) = \{ \pm 1 \},$$

la quale chiaramente determina un insieme non connesso. Se invece si considera il sottogruppo $SO(n, \mathbb{R}) = \{ A \in O(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$, detto *gruppo speciale ortogonale*, questo è connesso. Infatti, è possibile costruire un cammino dentro $SO(n, \mathbb{R})$ tra una qualunque matrice A e l'identità, mostrando così che questo gruppo è connesso per archi.

Osservazione 1.8. Dato un gruppo di Lie G , si consideri G_0 componente connessa di G contenente l'identità e . Vediamo allora che G_0 è un sottogruppo di G :

- poiché μ è un'applicazione continua, $\mu(G_0 \times G_0)$ è connesso, contenente e (in quanto $\mu(e, e) = e$); quindi $\mu(G_0 \times G_0) \subseteq G_0 \implies \mu(G_0 \times G_0) = G_0$;
- analogamente, procedendo con la funzione τ , si ottiene la stessa cosa per G_0^{-1} .

Notiamo inoltre che G_0 è un sottogruppo *chiuso*, perché componente connessa, e *normale* in G : infatti, per ogni $g \in G$ si ha $gG_0g^{-1} = \mu(g, \mu(G_0, g^{-1}))$, ancora connesso contenente e , perché immagine di un connesso tramite la composizione di applicazioni continue. Per lo stesso motivo di prima, si ricava che G_0 è invariante per *coniugio*, quindi $G_0 \trianglelefteq G$.

Definizione 1.11. Sia G un gruppo di Lie. La coppia (H, φ) si dice *sottogruppo di Lie* di G se

- H è un gruppo di Lie;
- la coppia (H, φ) è una sottovarietà di G ;

²Affinché sia suriettiva, la dimensione dell'immagine di una mappa deve essere uguale alla dimensione dello spazio di arrivo di tale mappa.

iii. $\varphi: H \rightarrow G$ è un omomorfismo tra gruppi (di Lie).

Inoltre, la coppia (H, φ) è detta un *sottogruppo chiuso* di G se $\varphi(H)$ è un sottogruppo chiuso di G .

Sia $g \in G$, allora si indicano con $L_g: G \rightarrow G$ e con $R_g: G \rightarrow G$ rispettivamente la *traslazione sinistra* e *destra* per g , ovvero $L_g(h) = gh$ e $R_g(h) = hg$, per ogni $h \in G$. Questo ci permette di definire l'azione aggiunta di G su G , definita dall'*azione di coniugio*

$$\begin{aligned} \alpha: G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto \alpha_g(h) = L_g R_{g^{-1}} h = ghg^{-1}. \end{aligned}$$

In altre parole, l'azione di coniugio misura la non-commutatività della moltiplicazione del gruppo di Lie: se G è abeliano, allora α_g è semplicemente l'identità su G . Inoltre, quando si considera il moto lungo gruppi di Lie non abeliani, bisogna decidere se impiegare la traslazione sinistra oppure quella destra. L'azione di coniugio, quindi, permette di passare dall'una all'altra delle due possibilità.

Definizione 1.12. Un'algebra di Lie \mathfrak{L} su \mathbb{R} è uno spazio vettoriale reale dotato di un operatore bilineare chiamato *bracket* ed indicato con $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$, tale che, per ogni $x, y, z \in \mathfrak{L}$, si ha che

- a. sia *anticommutativo*, ovvero $[x, y] = -[y, x]$;
- b. valga l'*identità di Jacobi* $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.

L'importanza del concetto di algebra di Lie è che esiste una speciale algebra di Lie di dimensione finita per ogni gruppo di Lie, e che le proprietà di un gruppo di Lie si riflettono in quelle della sua algebra di Lie.

Se e_1, \dots, e_m è una base di \mathfrak{L} (come spazio vettoriale), allora le costanti di struttura c_{ab}^d di \mathfrak{L} relative a questa base sono univocamente determinate da

$$[e_a, e_b] = c_{ab}^d e_d.$$

Esempio 1.7. L'insieme dei campi vettoriali su una varietà differenziabile Q presenta una struttura di algebra di Lie naturale. Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(Q)$, si definisce $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$. È facile verificare che questa risulta proprio la parentesi di Lie.

Per un gruppo di Lie G , si considera l'insieme dei campi vettoriali invarianti per traslazioni sinistra (*left invariant*) su G , indicato con $\mathfrak{X}_l(G)$. Questo significa che $x \in \mathfrak{X}_l(G)$ se e soltanto se $TL_g(X_h) = X_{gh}$ per ogni $g, h \in G$. L'insieme $\mathfrak{X}_l(G)$ è chiaramente una sottoalgebra di $\mathfrak{X}(G)$, pertanto la parentesi di Lie di due campi vettoriali *left invariant* fornisce un campo vettoriale ancora *left invariant*.

L'algebra di Lie $\mathfrak{X}_l(G)$ è detta l'algebra di Lie associata al gruppo G ed è solitamente indicata con \mathfrak{g} . Si noti che \mathfrak{g} può essere identificato con $T_e G$, ovvero con lo spazio tangente nell'identità, in quanto, per ogni $\xi \in T_e G$, risulta che $X_\xi(g) = T_e L_g \xi$ è un campo vettoriale invariante per traslazioni sinistre.

Definizione 1.13. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie. Un sottospazio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ si dice una *sottoalgebra di Lie* se per ogni $X, Y \in \mathfrak{h}$ il *bracket* $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Una sottoalgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ forma chiaramente un'algebra di Lie con il *bracket* indotto da \mathfrak{g} .

Osservazione 1.9. Si noti che se (H, φ) è un sottogruppo di Lie di G , allora φ_* è un omomorfismo tra le rispettive algebre di Lie. Dunque \mathfrak{h} si identifica come una sottoalgebra di \mathfrak{g} .

Esempio 1.8. Si consideri il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ introdotto nell'esempio 1.4. Tale gruppo, il quale è anche uno spazio vettoriale, può essere dotato di una struttura di algebra di Lie ponendo, per ogni $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$,

$$[A, B] = AB - BA,$$

ovvero identificando il *bracket* con il commutatore. L'algebra così ottenuta si indica con $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Esempio 1.9 (Gruppo speciale euclideo). Si consideri il gruppo di Lie di tutte le matrici 4×4 della forma

$$\begin{pmatrix} R & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $R \in SO(3)$ e $v \in \mathbb{R}^3$. Questo gruppo viene solitamente indicato con $SE(3)$ ed è detto *gruppo speciale euclideo*. L'algebra di Lie corrispondente, indicata con $\mathfrak{se}(3)$, ha dimensione 6 ed è generata da

$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il gruppo speciale euclideo è particolarmente importante in meccanica, in quanto descrive, a seconda che si considerino trasformazioni attive o passive, l'insieme dei moti rigidi oppure delle trasformazioni di coordinate nello spazio tridimensionale. Si vede inoltre che, per definire $SE(3)$, non è necessario avere un sistema di coordinate, ma questo gruppo può essere semplicemente definito come l'insieme di tutte le isometrie da \mathbb{R}^3 in se stesso.

Sia ξ un elemento dell'algebra di Lie \mathfrak{g} . Consideriamo il campo vettoriale *left invariant* X_ξ associato. Sia quindi $\phi_\xi: \mathbb{R} \rightarrow G$ la curva integrale di X_ξ passante per e a $t = 0$. Per definizione di curva integrale, abbiamo che

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_\xi(t) = \xi.$$

Definizione 1.14. La curva integrale $\phi_\xi: \mathbb{R} \rightarrow G$ si chiama anche *sottogruppo ad un parametro* del gruppo G .

In generale, un sottogruppo ad un parametro *non* è iniettivo, anzi può avere immagine densa in G , quindi (\mathbb{R}, ϕ) non è un sottogruppo di Lie.

Definizione 1.15. Si definisce *mappa esponenziale* l'applicazione di classe C^∞ indicata come

$$\begin{aligned} \exp: \mathfrak{g} &\rightarrow G, \\ X_\xi &\mapsto \phi_\xi^X(1) \end{aligned}$$

dove ϕ_ξ^X è la curva integrale relativa ad X_ξ .

Osserviamo che \exp è effettivamente di classe C^∞ , perché ϕ_ξ^X si ricava a partire da X_ξ risolvendo un problema alle derivate parziali.

Vediamo allora alcune proprietà della mappa esponenziale:

- $\exp(tX) = \phi^X(t)$;
- la curva integrale per X passante per un punto $g \in G$ è data da $g \exp(tX)$;
- $d \exp|_0: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ è l'identità

Esempio 1.10. Sfruttando la mappa esponenziale, calcoliamo il differenziale di $\tau: G \rightarrow G$, che manda g in g^{-1} , nell'identità. Dato $X \in \mathfrak{g}$, abbiamo che

$$\mathbf{d}\tau_e(X) = \left. \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \right|_0 \tau(\exp(tX)) = \left. \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \right|_0 \exp(-tX) = -X.$$

Se ne deduce quindi che $\mathbf{d}\tau_e = -\text{Id}$.

Definizione 1.16. Siano G ed H due gruppi di Lie. Un'applicazione $\varphi: G \rightarrow H$ è un *omomorfismo tra gruppi di Lie* se φ è un omomorfismo tra gruppi di classe C^∞ . Si dice che φ è un *isomorfismo* se, in aggiunta, φ è un diffeomorfismo. Inoltre, un isomorfismo di un gruppo di Lie con se stesso è chiamato un *automorfismo*. Se $H = \text{Aut}(V)$ per un qualche V spazio vettoriale, oppure se $H = GL(n, \mathbb{R})$, allora un omomorfismo $\varphi: G \rightarrow H$ si dice anche una *rappresentazione* del gruppo di Lie G . Se poi l'omomorfismo φ è tale che $\ker \varphi = \{e\}$, allora la rappresentazione viene detta *fedele*.

Definizione 1.17. Sia Q una varietà e G un gruppo di Lie. Una mappa C^∞ $\alpha: G \times Q \rightarrow Q$ tale che

$$\alpha(gh, m) = \alpha(g, \alpha(h, m)), \quad \alpha(e, m) = m,$$

per ogni $g, h \in G$ ed ogni $m \in Q$, si dice *azione sinistra* di G su Q . L'azione si definisce *transitiva* se per ogni $m_1, m_2 \in Q$ esiste $g \in G$ tale che $\alpha(g, m_1) = g \cdot m_1 = m_2$. In questo caso, Q si chiama G -omogeneo. Infine, l'azione si denomina *effettiva* (o libera) se l'unico elemento di G che fissa tutti i punti della varietà Q è l'identità.

La definizione di azione (sinistra) formalizza la nozione di simmetria o di invarianza di un sistema. Chiaramente la stessa definizione può essere data per le azioni destre, tuttavia si considerano quelle sinistre seguendo l'usuale convenzione impiegata in Meccanica.

Di solito si è interessati all'azione di un gruppo come una mappa da Q in Q , pertanto si indica spesso l'azione come $\alpha_g: Q \rightarrow Q$, dove $\alpha_g(x) = \alpha(g, x)$, per ogni $g \in G$ e $x \in Q$. In alcuni casi, si indica $\alpha_g(x)$ semplicemente con gx , sebbene ci sia un certo abuso di notazione.

Definizione 1.18. Dato $x \in Q$, l'insieme $\text{Orb}_G x = G \cdot x = \{ \alpha_g(x) \mid g \in G \}$ si dice *orbita* di x attraverso G .

Si può mostrare che le orbite sono sempre varietà C^∞ , possibilmente immerse. Questa nozione generalizza quella di orbita di un sistema dinamico, poiché il flusso di un campo vettoriale su Q può essere pensato come un'azione di \mathbb{R} su Q , ed in tal caso la nozione generale di orbita si riduce a quella familiare della dinamica.

Definizione 1.19. Si definisce *sottogruppo isotropico* in $m \in Q$ l'insieme

$$G_m = \{ g \in G \mid g \cdot m = m \}.$$

Osserviamo che qualora l'azione sia effettiva, i suoi gruppo di isotropia risultano tutti banali, ovvero $g = e$ per ogni $m \in Q$.

Definizione 1.20. Un'azione si dice *propriamente discontinua* se $\tilde{\alpha}: G \times Q \rightarrow Q \times Q$ definita come $\tilde{\alpha}(g, q) = (q, \alpha(g, q))$ è un'applicazione propria, ovvero se $K \subset Q \times Q$ è compatto, allora $\tilde{\alpha}^{-1}(K)$ è compatto. Inoltre, un'azione è detta *semplice* (o regolare) se l'insieme Q/G delle orbite ha una struttura di varietà differenziabile tale che la proiezione canonica di Q su Q/G è una sommersione.

Teorema 1.3. Sia $\alpha: G \times Q \rightarrow Q$ un'azione sinistra di G su Q . Assumiamo che $m_0 \in Q$ sia un punto fisso, ovvero $\alpha(g, m_0) = m_0$ per ogni $g \in G$. Allora la mappa

$$\rho: G \rightarrow \text{Aut}(T_{m_0}Q)$$

definita come

$$\rho(g) = \mathbf{d}\alpha_g|_{T_{m_0}Q}$$

è una rappresentazione di G .

Un gruppo di Lie G agisce sempre su di sé tramite l'azione di coniugio $\alpha: G \times G \rightarrow G$ definita da $\alpha(g, x) = gxg^{-1}$. Sfruttando il teorema precedente, possiamo dare la seguente

Definizione 1.21. Si definisce l'azione di aggiunzione di G su \mathfrak{g} attraverso la mappa

$$\begin{aligned} \text{Ad}: G \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ \text{Ad}(g, \xi) &\mapsto \mathbf{d}\alpha_g|_e \xi = T_{g^{-1}}L_g(T_eR_{g^{-1}}\xi). \end{aligned}$$

In modo analogo, è possibile anche dare la seguente

Definizione 1.22. Si definisce la coazione di aggiunzione di G su \mathfrak{g}^* come la mappa

$$\begin{aligned} \text{CoAd}: G \times \mathfrak{g}^* &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ \text{CoAd}(g, p) &\mapsto \left(\mathbf{d}\alpha_{g^{-1}}|_e \right)^* p = T_e^*L_{g^{-1}}(T_{g^{-1}}^*R_g p). \end{aligned}$$

Osservazione 1.10. Per gruppi di Lie non abeliani, la non commutatività del gruppo di Lie rispetto alla moltiplicazione implica che si possono impiegare le nozioni precedenti anche sostituendo “sinistro” con “destro”. In Meccanica Geometrica, questo corrisponde esattamente alla differenza tra rappresentazione lagrangiana, o materiale, e rappresentazione euleriana, o spaziale. Per esser più chiari, sia $v_g \in T_gG$ e consideriamo

$$\xi^m = T_gL_{g^{-1}}v_g, \quad \xi^s = T_gR_{g^{-1}}v_g.$$

La relazione che intercorre tra le velocità materiale e spaziale può essere espressa in termini dell'azione di aggiunzione del gruppo di Lie sulla sua algebra di Lie. Un semplice calcolo mostra che $\xi^m = \text{Ad}_{g^{-1}} \xi^s$. Analogamente, dato $\omega_g \in T_g^*G$, si possono definire

$$p_m = T_eL_g^*\omega_g, \quad p_s = T_eR_g^*\omega_g,$$

ovvero i momenti in rappresentazione materiale e spaziale. In questo caso, la relazione tra le due rappresentazioni del momento è data in termini della coazione di aggiunzione, cioè abbiamo che $p_s = \text{CoAd}_g p_m$.

Teorema 1.4. Se G agisce in modo libero e propriamente discontinuo su Q , allora lo spazio quoziente Q/G ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione n , detta varietà quoziente per l'azione di G su Q , tale che la proiezione canonica

$$\pi: Q \rightarrow Q/G$$

risulti un'applicazione differenziabile (è una sommersione ed anche un'immersione locale).

Sia ξ un elemento dell'algebra di Lie \mathfrak{g} . Si consideri quindi l'azione di \mathbb{R} su Q definita come

$$\begin{aligned} \alpha^\xi: \mathbb{R} \times Q &\rightarrow Q \\ (t, q) &\mapsto \alpha(\exp(t\xi), q). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che questa soddisfa le proprietà di un'azione. Inoltre, si può interpretare α^ξ come un flusso sulla varietà Q . Abbiamo quindi la seguente

Definizione 1.23. Il campo vettoriale su Q generato dal flusso α^ξ e dato da

$$\xi_Q(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(\exp(t\xi), x),$$

è detto *campo vettoriale fondamentale* o *generatore infinitesimale* dell'azione corrispondente a ξ .

Si vede dunque che questi campi vettoriali generano lo spazio tangente delle orbite attraverso G , ovvero risulta

$$T_x(\text{Orb}_G(x)) = \{ \xi_Q(x) \mid \xi \in \mathfrak{g} \}.$$

Le proprietà fondamentali dei generatori infinitesimali sono:

- $(\text{Ad}_g \xi)_Q(x) = T\alpha_g \xi_Q(\alpha_{g^{-1}}(x))$, per ogni $g \in G$, $x \in Q$ e $\xi \in \mathfrak{g}$;
- $[\xi_Q, \eta_Q] = -[\xi, \eta]_Q$, per ogni $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$.

Dato un gruppo di Lie, si considera l'azione naturale di G su se stesso attraverso la traslazione sinistra, ovvero

$$\begin{aligned} \alpha: G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh. \end{aligned}$$

Per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$, il generatore infinitesimale corrispondente all'azione considerata risulta essere dato da

$$\xi_G(h) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot h = T_e R_h \xi,$$

ovvero è il campo vettoriale invariante per traslazioni sinistre definito da ξ .

Infine, un'azione α di G su una varietà Q induce un'azione del gruppo di Lie sul fibrato tangente di Q , ovvero si ha l'applicazione

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}: G \times TQ &\rightarrow TQ \\ (g, v_x) &\mapsto \alpha_g(v_x), \end{aligned}$$

per ogni $g \in G$ ed ogni $v_x \in T_x Q$. Allora $\hat{\alpha}$ viene detta *innalzamento* (in inglese *lifted action*) di α .

1.4 Fibrati e connessioni

In questa sezione introduciamo brevemente le nozioni di fibrato e di connessione su un fibrato. Infatti, i fibrati forniscono una struttura geometrica di base per capire diversi problemi di meccanica e controllo, in particolare per problemi anolonomi. Essenzialmente, un fibrato consiste di un certo spazio, detto base, assieme ad un altro spazio, chiamato fibra, fissato in ogni punto, più alcune condizioni di compatibilità. Più formalmente, possiamo dare la seguente

Definizione 1.24. Un *fibrato* è uno spazio Q per il quale sono dati i seguenti elementi: uno spazio B detto *base*, una *proiezione* $\pi: Q \rightarrow B$ con fibre $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$, omeomorfe ad uno spazio F , un *gruppo di struttura* G di omeomorfismi di F in se stesso, ed un ricoprimento di B costituito di insiemi aperti U_j che soddisfano due condizioni:

1. il fibrato è localmente banale, ovvero $\pi^{-1}(U_j)$ è omeomorfo allo spazio prodotto $U_j \times F$;
2. se h_j è la mappa che definisce l'omeomorfismo per le fibre sull'insieme U_j , allora, per ogni punto $x \in U_j \cap U_k \neq \emptyset$, $H_j(H_k^{-1})$ è un elemento del gruppo di struttura G .

Se le fibre del fibrato sono omeomorfe al gruppo di struttura, allora si parla di *fibrato principale*. Invece, se le fibre sono omeomorfe ad uno spazio vettoriale, il fibrato si chiama *fibrato vettoriale*.

Esempio 1.11. Un primo esempio di fibrato vettoriale è TS^1 , ovvero lo spazio tangente alla circonferenza. La base è S^1 , le fibre sono omeomorfe ad \mathbb{R} , e poiché lo spazio tangente può essere rappresentato da un qualunque numero reale diverso da zero, il gruppo di struttura può essere identificato con $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Il fibrato dei riferimenti (*frame bundle*) di una varietà ha la stessa struttura di gruppo di TQ , ma le fibre sono l'insieme di tutte le *basi ordinate* del fibrato vettoriale (tangente) associato ad ogni punto. Quindi, per TS^1 le fibre del fibrato dei riferimenti sono omeomorfe al suo gruppo di struttura $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e pertanto il fibrato dei riferimenti è un fibrato principale. Infatti, tutti i fibrati dei riferimenti sono fibrati principali associati ad un certo fibrato vettoriale.

Un'importante struttura addizionale su un fibrato è una connessione o connessione di Ehresmann. Intuitivamente, supponendo di avere un fibrato e di considerare localmente una sezione di questo fibrato, ovvero un campo, l'idea è quella di scegliere quei campi che risultano costanti. Per campi vettoriali su un piano, per esempio, è chiaro cosa si intende per campo costante. Per campi vettoriali su una varietà o un generico fibrato, bisogna specificare la nozione. Questi campi sono detti orizzontali e sono basilari per definire il concetto di derivata di un campo vettoriale lungo una curva³. Una connessione, d'altronde, permette di scegliere i campi orizzontali, presentando inoltre alcune proprietà come la linearità.

Supponiamo perciò che il nostro spazio Q abbia una struttura di fibrato $\pi_{Q,R}: Q \rightarrow R$, dove R è la base del fibrato ed anch'essa è una varietà, mentre $\pi_{Q,R}$ è una sommersione, della quale indichiamo con $T_q\pi_{Q,R}$ la sua mappa tangente. Poi chiamiamo il nucleo di $T_q\pi_{Q,R}$ in ogni punto $q \in Q$ lo *spazio verticale*, il quale si indica con V_q .

Definizione 1.25. Una *connessione di Ehresmann* A è una 1-forma a valori vettoriali su Q tale che:

1. A è a *valori verticali*, ovvero $A_q: T_qQ \rightarrow V_q$ è una mappa lineare in ogni $q \in Q$;
2. A è una *proiezione*, cioè $A(v_q) = v_q$ per ogni $v_q \in V_q$.

La proprietà chiave della connessione è la seguente: se indichiamo con H_q , oppure con hor_q , il nucleo di A_q e lo chiamiamo lo *spazio orizzontale*, lo spazio tangente a Q risulta essere la somma diretta dello spazio verticale e quello orizzontale, ovvero $T_qQ = V_q \oplus H_q$ per ogni $q \in Q$. Quindi è possibile suddividere lo spazio tangente in una parte verticale ed una orizzontale. Si noti che lo spazio verticale su Q è tangente alle fibre su q .

In seguito, quando tratteremo i sistemi anolonomi, sceglieremo la connessione in modo tale che la distribuzione vincolare sia lo spazio orizzontale della connessione.

Definiamo adesso le coordinate sul fibrato $q^i = (r^\alpha, s^a)$ per la base e la fibra. La rappresentazione in coordinate della proiezione π è solo la proiezione sul fattore r , e la connessione A può essere rappresentata localmente attraverso una forma differenziale ω^a a valori vettoriali

$$A = \omega^a \frac{\partial}{\partial s^a},$$

dove $\omega^a(q) = ds^a + A_\alpha^a(r, s) dr^\alpha$. Ricordiamo che si sottintende la sommatoria sugli indici ripetuti. Possiamo vedere questo come segue: sia

$$v_q = \dot{r}^\beta \frac{\partial}{\partial r^\beta} + \dot{s}^b \frac{\partial}{\partial s^b}$$

³Ricordiamo che abbiamo già definito la nozione di derivata attraverso la derivata di Lie. Tuttavia questa non permette di differenziare un campo vettoriale lungo una curva.

un elemento di T_qQ . Allora $\omega^a(v_q) = \dot{s}^a + A_\alpha^a \dot{r}^\alpha$ ed

$$A(v_q) = (\dot{s}^a + A_\alpha^a \dot{r}^\alpha) \frac{\partial}{\partial s^a}.$$

Ciò mostra che A è una proiezione, in quanto quando A agisce nuovamente, solo ds^a compare in un termine diverso da zero, e questo ha coefficiente unitario.

Definizione 1.26. Data una connessione di Ehresmann A , un punto $q \in Q$ ed un vettore $v_r \in T_rB$ tangente nel punto base $r = \pi(q) \in B$, si può definire l'*innalzamento orizzontale* di v_r come l'unico vettore v_r^h in H_q che viene proiettato in v_r sotto l'azione di $T_q\pi$. Se abbiamo un vettore $X_q \in T_qQ$, possiamo indicare la sua *parte orizzontale* come

$$\text{hor } X_q = X_q - A(q) \cdot X_q.$$

Osserviamo che in coordinate, la proiezione verticale è la mappa $(\dot{r}^\alpha, \dot{s}^a) \mapsto (0, \dot{s}^a + A_\alpha^a(r, s)\dot{r}^\alpha)$, mentre la proiezione orizzontale è la mappa $(\dot{r}^\alpha, \dot{s}^a) \mapsto (\dot{r}^\alpha, -A_\alpha^a(r, s)\dot{r}^\alpha)$.

Osservazione 1.11. Si noti che, in generale, per una connessione di Ehresmann l'innalzamento orizzontale dipende dalla curva scelta. Infatti, se due curve che si intersecano nei punti $x_0, x_1 \in B$ sono innalzate orizzontalmente in Q attraverso lo stesso $e \in \pi^{-1}(x_0)$, esse generalmente passano per diversi punti su $\pi^{-1}(x_1)$. Questo ha un'importante conseguenza per la geometria del fibrato: lo spazio delle sezioni dello spazio orizzontale H non è una sottoalgebra di Lie dello spazio dei campi vettoriali su B , in quanto, in generale, non è chiuso rispetto alla parentesi di Lie di campi vettoriali. La mancanza di chiusura rispetto al *bracket* viene misurata dalla curvatura

Definizione 1.27. La *curvatura* di A è una 2-forma verticale a valori vettoriali B su Q definita attraverso la sua azione su due campi vettoriali X ed Y su Q come

$$B(X, Y) = -A([\text{hor } X, \text{hor } Y]),$$

dove le parentesi $[\cdot, \cdot]$ sono le parentesi di Jacobi-Lie dei campi vettoriali ottenuti estendendo i vettori a due campi vettoriali.

Si può quindi mostrare che la curvatura è indipendente dall'estensione dei campi vettoriali.

Osservazione 1.12. Questa definizione mostra che la curvatura misura esattamente da parte della distribuzione orizzontale l'impossibilità di essere integrabile, in quanto il membro destro della precedente espressione si annulla se e soltanto se il sottofibrato orizzontale è integrabile nel senso di Frobenius. In particolare, nel nostro caso, la curvatura misura la mancanza da parte della distribuzione vincolare di essere appunto un fibrato integrabile.

Un'identità utile della derivata esterna $\mathbf{d}\alpha$, con α una 1-forma (la quale può anche assumere valori in uno spazio vettoriale) su una varietà M che agisce su due campi vettoriale X ed Y , risulta essere

$$\mathbf{d}\alpha(X, Y) = X[\alpha(Y)] - Y[\alpha(X)] - \alpha([X, Y]).$$

Questa identità mostra che, *in coordinate*, si può valutare la curvatura esprimendo la connessione con una forma ω^a in coordinate, calcolando la sua derivata esterna (componente per componente) e restringendo il risultato ai vettori orizzontali, ovvero alla distribuzione vincolare. In altri termini,

$$B(X, Y) = \mathbf{d}\omega^a(\text{hor } X, \text{hor } Y) \frac{\partial}{\partial s^a},$$

e pertanto l'espressione locale della curvatura è rappresentata da

$$B(X, Y)^a = B_{\alpha\beta}^a X^\alpha Y^\beta,$$

dove i coefficienti $B_{\alpha\beta}^a$ sono dati da

$$B_{\alpha\beta}^b = \left(\frac{\partial A_\alpha^b}{\partial r^\beta} - \frac{\partial A_\beta^b}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^a \frac{\partial A_\beta^b}{\partial s^a} - A_\beta^a \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial s^a} \right).$$

Esempio 1.12 (Connessioni su $T\mathbb{R}^1$). L'idea di connessione può essere ben illustrata considerando il più semplice esempio possibile: una connessione sul fibrato $TQ = T\mathbb{R}^1$ con coordinate (x, \dot{x}) . Definiamo quindi lo spazio orizzontale come il nucleo della forma

$$d\dot{x} + A_1^1(x, \dot{x})dx,$$

dove A_1^1 è una funzione liscia di x e \dot{x} . In particolare, possiamo scegliere una connessione che sia lineare nelle velocità, ovvero

$$d\dot{x} + a(x)\dot{x}dx.$$

Adesso A è una forma a valori reali data da

$$(d\dot{x} + a(x)\dot{x}dx) \frac{\partial}{\partial \dot{x}}.$$

Gli elementi di T_qQ sono della forma

$$v_q = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \ddot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}},$$

quindi la loro proiezione sullo spazio verticale risulta essere

$$A(v_q) = (d\dot{x} + a(x)\dot{x}dx) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \ddot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) = (\ddot{x} + a(x)\dot{x}^2) \frac{\partial}{\partial \dot{x}}.$$

Il nucleo di A , ovvero i vettori orizzontali, è lo spazio generato

$$\text{Span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - a(x)\dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right\}.$$

Si noti che di solito si sceglie $a(x) = 0$, ovvero lo spazio orizzontale standard è lo spazio generato dei vettori $\partial/\partial x$.

Consideriamo adesso il caso particolare delle connessioni principali per una varietà quoziente. Infatti, ricordiamo che se α è un'azione libera e propriamente discontinua di un gruppo di Lie G , per il teorema 1.4 sappiamo che lo spazio quoziente $Q/G = N$ può essere dotato di una struttura di varietà differenziabile, dove la proiezione canonica $\pi: Q \rightarrow N$ è una sommersione. Si vede quindi che il nucleo di $T\pi = \pi_*$ consiste dei vettori tangenti verticali, ovvero dei vettori tangenti alle orbite di G in Q . Si indica perciò con ver_π , o semplicemente ver , il fibrato dei vettori verticali, detto anche *spazio verticale* del fibrato, dove $(\text{ver}_\pi)_q = T_q(\text{Orb}_G(q))$, per ogni $q \in Q$.

Nei lavori di meccanica dei corpi rigidi, la varietà quoziente N viene comunemente detta *spazio delle forme* (*shape space*) del sistema in questione, mentre il gruppo di Lie G è detto appunto *spazio delle fibre*. Pertanto, indichiamo con $Q(N, G, \pi)$ il fibrato principale con fibrato Q , base N , gruppo di struttura G e proiezione π .

Inoltre, nei problemi di moto è molto frequente il caso in cui lo *splitting* del fibrato può essere scritto globalmente, ovvero $Q = G \times N$. Questo corrisponde alla nozione di fibrato principale *banale*. Le fibre $g \in G$ descrivono la posizione e l'orientamento del sistema, mentre le coordinate $n \in N$ della base descrivono la forma interna.

Definizione 1.28. Una *connessione principale* sul fibrato principale $\pi: Q \rightarrow N$ è caratterizzata da una 1-forma \mathcal{A} su Q a valori in \mathfrak{g} tale che:

1. $\mathcal{A}(\xi_Q(q)) = \xi$, per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$ ed ogni $q \in Q$,
2. \mathcal{A} è equivariante, ovvero $\mathcal{A}(T_q\alpha_g(v_q)) = \text{Ad}_g \mathcal{A}(v_q)$, per ogni $v_q \in T_qQ$ e $g \in G$, dove α_g indica l'azione sinistra di G su Q , mentre Ad è la mappa di aggiunzione di G su \mathfrak{g} .

Osservazione 1.13. In modo del tutto equivalente, una connessione principale su $Q(N, G, \pi)$ può anche essere definita in modo univoco come una distribuzione hor su Q tale che:

1. $T_qQ = \text{hor}_q \oplus \text{ver}_q$, per ogni $q \in Q$,
2. $\text{hor}_{gq} = T_q\alpha_g(\text{hor}_q)$, ovvero la distribuzione hor è G -invariante,
3. hor_q dipende in modo C^∞ da q .

Allora il sottospazio hor_q di T_qQ è lo *spazio orizzontale* in q determinato dalla connessione. Pertanto, lo spazio orizzontale risulta essere dato da

$$\text{hor}_q = \{ v_q \in T_qQ \mid \mathcal{A}(v_q) = 0 \}.$$

In base alle precedente osservazione, possiamo dunque decomporre lo spazio tangente alla varietà in un punto come la somma diretta di spazio orizzontale e verticale. Inoltre, si indicano le proiezioni sugli spazi orizzontale e verticale relativi a tale decomposizione usando la stessa notazione: sia $v_q \in T_qQ$, allora si scrive

$$v_q = \text{hor}_q v_q + \text{ver}_q v_q.$$

Quindi la proiezione sulla parte verticale è data da

$$\text{ver}_q v_q = (\mathcal{A}(v_q))_Q(q),$$

mentre la proiezione sulla parte orizzontale è di conseguenza

$$\text{hor}_q v_q = v_q - (\mathcal{A}(v_q))_Q(q).$$

La proiezione π definisce in ogni punto un isomorfismo dallo spazio orizzontale T_qQ allo spazio tangente alla base $T_{\pi(q)}N$. Allora, l'*innalzamento orizzontale* viene definito come l'inverso della proiezione. Sfruttando quindi i teoremi di unicità per le equazioni differenziali ordinarie, si trova che una curva sulla base passante per un punto $\pi(q)$ può essere innalzata ad un'unica curva orizzontale passante per $q \in Q$, ovvero ad una curva i cui vettori tangenti in ogni punto sono vettori orizzontali.

Poiché abbiamo questa suddivisione dello spazio, possiamo considerare una connessione principale come una particolare connessione di Ehresmann. In ogni modo, le connessioni di Ehresmann sono viste come forme a valori verticali, mentre le connessioni principali sono viste come forme a valori in un'algebra di Lie. Pertanto, la connessione di Ehresmann A e la connessione data dalla 1-forma \mathcal{A} sono differenti; in questo caso sono correlate secondo la relazione

$$A(v_q) = (\mathcal{A}(v_q))_Q(q).$$

Le nozioni generali di curvatura e di altre proprietà che valgono per le connessioni di Ehresmann possono essere considerate anche nel caso delle connessioni principali. Come nel caso generale, dato un campo vettoriale Y su N , usando l'innalzamento orizzontale, esiste l'unico campo vettoriale X^h su Q orizzontale e π -correlato ad Y , ovvero $\pi_*(X^h) = Y$ e la parte verticale è nulla. Inoltre, è noto che il fatto di essere π -correlati preserva le parentesi di Lie, ovvero

$$\text{hor}[X^h, Y^h] = [X, Y]^h,$$

dove X ed Y sono campi vettoriali sulla base N .

Definizione 1.29. La *curvatura* \mathcal{B} di una connessione principale \mathcal{A} è una 2-forma su Q a valori in \mathfrak{g} tale che per ogni $q \in Q$ ed ogni $v, u \in T_q Q$ viene definita come

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathbf{d}\mathcal{A}(\text{hor } u, \text{hor } v) = -\mathcal{A}([U^h, V^h]_q),$$

dove U^h e V^h sono gli innalzamenti orizzontali di qualunque coppia di campi vettoriali locali U e V su N per i quali $U^h(q) = \text{hor } u$ e $V^h(q) = \text{hor } v$ rispettivamente.

Come per le connessioni di Ehresmann, anche la curvatura di una connessione principale misura la mancanza di integrabilità della distribuzione orizzontale hor e gioca un ruolo fondamentale nella teoria dell'olonomia.

Osservazione 1.14. Data una distribuzione $\mathcal{D} \subset TQ$ su una varietà Q , si può definire la sua curvatura in modo analogo direttamente in termini della sua mancanza di integrabilità. Infatti, si definiscono i vettori verticali in $q \in Q$ quelli appartenenti allo spazio quoziente $T_q Q / \mathcal{D}$, pertanto si definisce la curvatura che agisce su due campi vettoriali orizzontali u, v , ovvero due campi vettoriali che prendono valori nella distribuzione, come la proiezione sulla varietà quoziente della loro parentesi di Lie. Si verifica quindi che questa operazione dipende solo dal valore del campo vettoriale nel punto, dunque definisce proprio una 2-forma su vettori orizzontali.

Capitolo 2

Richiami di dinamica dei sistemi meccanici

2.1 Equazione di Newton

Lo spazio ambiente nel quale avvengono i moti dei corpi, da un punto di vista matematico, è descrivibile attraverso una struttura spazio-temporale galileiana, la quale comprende i seguenti tre elementi:

1. l'*universo*, ovvero uno spazio affine quadrimensionale indicato con A^4 , i cui punti sono detti *punti di universo* oppure *eventi*. I trasporti paralleli dell'universo A^4 costituiscono uno spazio vettoriale \mathbb{R}^4 .
2. il *tempo*, cioè un'applicazione lineare $t: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dello spazio vettoriale dei trasporti paralleli dell'universo sull'asse dei tempi reale. In questo modo, se consideriamo due eventi $a, b \in A^4$, allora $t(b - a)$ rappresenta l'*intervallo di tempo* tra i due eventi. Se poi $t(b - a) = 0$ allora i due eventi si dicono *contemporanei*.

Un insieme di eventi contemporanei tra loro forma un sottospazio affine tridimensionale di A^4 , il quale viene detto *spazio degli eventi contemporanei* indicato con A^3 .

Il nucleo dell'applicazione t consiste nei trasporti paralleli di A^4 , che portano un evento (e quindi ogni evento) in un evento ad esso contemporaneo. Questo nucleo forma uno spazio lineare tridimensionale \mathbb{R}^3 , sottospazio di \mathbb{R}^4 , ovvero si ha che $\ker(t) \cong \mathbb{R}^3$.

3. una *distanza* tra eventi contemporanei

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\langle a - b, a - b \rangle} \quad \forall a, b \in A^3,$$

definita tramite un prodotto scalare nello spazio \mathbb{R}^3 . Questa distanza trasforma ogni spazio di eventi contemporanei in uno *spazio euclideo* tridimensionale E^3 .

Un qualunque spazio affine A^4 , fornito di una struttura spazio-temporale galileiana, si chiama *spazio galileiano*. Quindi, si può fissare nello spazio euclideo E^3 un punto $O \in E^3$, il quale viene detto origine di riferimento, in modo che tale spazio acquisisca una struttura di spazio vettoriale, sul quale agisce comunque il gruppo dei trasporti paralleli. In particolare, si suppone che in corrispondenza di tale origine esista un sistema di coordinate galileiane *inerziali*, ovvero rispetto al quale un qualunque punto materiale che sia sufficientemente lontano da tutti gli altri corpi o rimane in quiete oppure si muove di moto rettilineo uniforme.¹

¹Una trattazione più approfondita dei sistemi di coordinate galileiane può essere trovata in [1], mentre per un approfondimento sul principio di inerzia ed i sistemi inerziali si faccia riferimento a [4].

Pertanto, la posizione di ogni punto $s \in E^3$ è univocamente determinata attraverso un *vettore posizione* $\vec{Os} = r$, di punto finale s e punto iniziale r . L'insieme di tutti i vettori posizione costituisce uno spazio vettoriale tridimensionale denotato con \mathbb{R}^3 , il quale eredita il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito in E^3 .

Il *moto* di un punto s può essere dunque descritto attraverso una mappa liscia $\mathbb{R} \supset \Delta \rightarrow E^3$, dove Δ è un intervallo sull'asse temporale. Si dice così che il moto è definito sull'intervallo Δ . Se poi è fissata l'origine del sistema di riferimento inerziale, allora ciascun moto che avviene nello spazio è univocamente determinato dalla funzione vettoriale liscia $r: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definizione 2.1. L'immagine dell'intervallo Δ attraverso la mappa $t \mapsto r(t)$ è detta *traiettoria* oppure *orbita* del punto s .

Determinata la posizione di un punto s rispetto ad un'origine fissata, è possibile definire la sua velocità v all'istante $t \in \Delta$ semplicemente attraverso la definizione stessa di derivata, essendo

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r}(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Chiaramente, la velocità è indipendente dalla scelta dell'origine del sistema di riferimento. In modo analogo, l'accelerazione del punto considerato è per definizione $a = \dot{v} = \ddot{r} \in \mathbb{R}^3$. Osserviamo quindi che l'insieme E^3 presenta una struttura di varietà differenziale e viene anche detto spazio delle configurazioni del punto s . Più precisamente, abbiamo la seguente

Definizione 2.2. Si chiama *spazio delle configurazioni* (del punto s) la varietà differenziabile Q che comprende tutte le possibili posizioni che il punto può assumere.

È chiaro che l'identificazione dello spazio delle configurazioni con l'intero insieme E^3 è valida fin quando si consideri un punto che si muove liberamente. In caso contrario, lo spazio delle configurazioni sarà una sottovarietà differenziale di E^3 .

Talvolta è però necessario lavorare con la coppia (s, v) , la quale definisce lo *stato* del punto e l'insieme $E^3 \times \mathbb{R}^3\{v\}$ lo spazio degli stati associato al moto del punto. In generale, possiamo dare la seguente

Definizione 2.3. Si definisce lo *spazio degli stati* (per un punto) il fibrato tangente allo spazio delle configurazioni del punto stesso, ovvero lo spazio delle coppie (s, v) .

Osserviamo quindi che lo spazio tangente $TE^3 \simeq \mathbb{R}^3$, per cui segue lo spazio degli stati per un punto $E^3 \times \mathbb{R}^3\{v\}$. In meccanica, tuttavia, si è soliti lavorare con i momenti piuttosto che con le velocità. Pertanto, in luogo dello spazio degli stati, si considera il cosiddetto spazio delle fasi.

Definizione 2.4. Si chiama *spazio delle fasi* il fibrato cotangente dello spazio delle configurazioni.

Per un punto libero di muoversi nello spazio E^3 , lo spazio delle fasi è quindi dato da tutte le possibili coppie (s, p) , dove con $p = mv$ si è indicato il *momento* di un punto materiale di massa m .

Passando allora ad un sistema meccanico di n punti in moto nello spazio euclideo tridimensionale, si definisce lo spazio delle configurazioni per il sistema libero come il prodotto diretto di n copie di E^3 , indicato con E^{3n} , dal quale si escludono gli urti rimuovendo da tale spazio l'unione delle diagonali, per cui non si può avere la stessa posizione per due punti distinti del sistema. Di conseguenza, le n applicazioni definite per ciascun punto determinano un'unica applicazione

$$r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$$

dell'asse dei tempi nello spazio delle configurazioni. Una tale applicazione si chiama anche moto di un sistema di n punti nel sistema di coordinate galileiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Con l'introduzione dello spazio delle configurazioni $3n$ -dimensionale, si può rappresentare la configurazione del sistema di n punti attraverso un punto libero in tale spazio, ed il moto di questo punto risulta in corrispondenza biunivoca con gli n moti dei punti nello spazio fisico.

Sperimentalmente sappiamo che lo stato di un sistema in un preciso istante di tempo determina in modo univoco il suo moto passato e futuro: questo è noto come *principio di determinazione* di Newton-Laplace per sistemi fisici macroscopici. Dunque, supponendo di conoscere lo stato del sistema (r_0, v_0) all'istante t_0 , in accordo con il principio di determinazione conosciamo il moto $r(t)$ per ogni $t \in \Delta \subset \mathbb{R}$ e tale che siano soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} r(t_0) = r_0 \\ \dot{r}(t_0) = v_0, \end{cases}$$

dove Δ è un intervallo di tempo contenente t_0 . In particolare, si può calcolare l'accelerazione \ddot{r} all'istante $t = t_0$.² Allora risulta che $\ddot{r}(t_0) = f(t_0, r_0, \dot{r}_0)$, dove f è una qualche funzione la cui esistenza è assicurata dal principio di determinazione di Newton-Laplace. Poiché l'istante di tempo t_0 può essere scelto in modo arbitrario, si ottiene l'equazione

$$\ddot{r} = f(t, r, \dot{r})$$

per ogni $t \in \Delta$. Questa equazione differenziale viene detta *equazione di moto* oppure *equazione di Newton*. Osserviamo che l'esistenza dell'equazione di Newton con associata la funzione vettoriale liscia $f: \mathbb{R}\{t\} \times \mathbb{R}^{3n}\{r\} \times \mathbb{R}^{3n}\{\dot{r}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è equivalente al principio di determinazione. Questo segue dal teorema di esistenza ed unicità nella teoria delle equazioni differenziale. La funzione f è determinata attraverso esperimenti, e la definizione di un sistema meccanico comprende la specificazione di tale funzione.

2.2 Sistemi vincolati

Vediamo che la formalizzazione della meccanica svolta finora permette di studiare sistemi costituiti solo da punti materiali liberi di muoversi nello spazio, senza considerare tutti quei casi in cui il moto di un punto è funzione del moto degli altri. Risulta dunque necessario introdurre dei *vincoli* nelle equazioni di moto caratterizzanti un determinato problema, ovvero delle restrizioni che rendano possibile la descrizione di un sistema meccanico reale attraverso il suo modello matematico.

Dalla struttura dell'equazione di moto è evidente che questi vincoli, una volta fissato un sistema di coordinate, sono espressi da condizioni sulle terne di coordinate e su quelle di velocità relative ai punti del sistema.

Definizione 2.5. Dato un sistema di n punti nello spazio fisico E^3 , si definisce un *vincolo bilaterale* ed *invertibile* su tale sistema attraverso una relazione del tipo

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, \dot{z}_n, t) = 0, \quad (2.1)$$

la quale può dipendere dal tempo, dalle posizioni e dalle velocità degli n punti, ma non dalle loro accelerazioni. Inoltre, se il vincolo risulta indipendente dal tempo, questo si dice *scleronomo*, altrimenti, se è esplicita la dipendenza dal tempo, si parla di vincolo *reonomo*. Infine, i vincoli sono detti *geometrici* se sono espressi da una relazione della forma

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, z_n, t) = 0.$$

In caso contrario, sono detti *cinematici*.

²Si assume che le funzioni presenti in dinamica siano tutte sufficientemente lisce.

I vincoli cinematici sono integrabili se le equazioni differenziali della forma (2.1) che li definiscono sono integrabili. In particolare, assumendo la terminologia introdotta da Hertz [12], questi vincoli cinematici integrabili sono detti *olonomi* e sono essenzialmente vincoli geometrici, nel senso che impongono delle restrizioni sulle possibili configurazioni del sistema di punti. D'altra parte, i vincoli cinematici non integrabili sono detti *anonomi* e non possono essere ridotti a vincoli geometrici. Per meglio capire questa distinzione, si esamini il seguente esempio.

Esempio 2.1 (Rotolamento puro). Si consideri un corpo rigido con il contorno circolare vincolato a muoversi mantenendo almeno un punto di tale contorno a contatto con un binario senza poter strisciare rispetto ad esso. Un moto rigido di questo tipo si chiama rotolamento senza strisciamento oppure *rotolamento puro*.

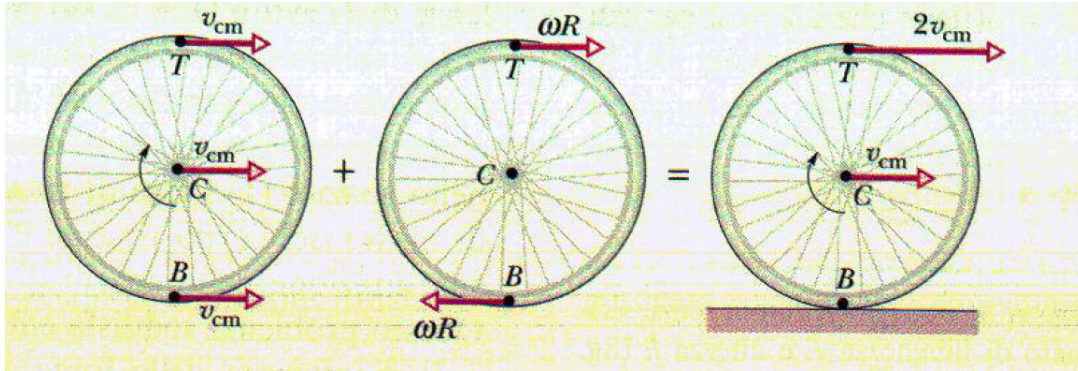


Figura 2.1: Composizione delle velocità in una ruota che rotola senza strisciare.

In questo caso, la richiesta che il moto avvenga senza strisciamento equivale a supporre che la velocità del punto di contatto $\vec{v}(B)$ sia uguale alla velocità $\vec{v}(P)$ del punto del binario a contatto con B . Allora, scegliendo il sistema di riferimento solidale con il binario, il binario risulta fisso ed anche il punto di contatto B è fermo, ma solo istantaneamente perché il punto di contatto tra disco e binario cambia continuamente.

Notiamo quindi che, se il corpo considerato è un disco rigido, il modulo della velocità angolare appare uguale alla derivata dell'angolo che misura la rotazione del disco a partire da un certo riferimento. Pertanto, sfruttando la formula fondamentale dei moti rigidi, risulta che la velocità del centro è data da

$$\vec{v}(C) = \vec{v}(B) + \vec{\omega} \wedge (C - B) = \vec{\omega} \wedge (C - B);$$

inoltre, l'unica componente di $\vec{v}(C)$ diversa da zero è \dot{x} lungo l'asse delle x , quindi possiamo formalizzare il vincolo richiedendo che

$$\dot{x} = R\dot{\varphi},$$

dove R rappresenta il raggio del disco. Questo è dunque un vincolo che lega tra loro due velocità, tuttavia è possibile integrare ambo i membri dell'equazione rispetto al tempo, ottenendo

$$x = R\varphi,$$

ovvero il vincolo di rotolamento puro risulta essere un vincolo olonomo.

Ricordiamo quindi che Hertz definisce olonomo un sistema per il quale tutti i moti concepibili tra le posizioni possibili siano moti possibili per il sistema. Quindi, come si vede nell'esempio 2.1 del rotolamento puro, un vincolo olonomo impone delle restrizioni sulle posizioni e sulle velocità del sistema, o meglio sulla sua geometria e sulla sua cinematica.

D'altra parte, un vincolo anonomo determina solo delle restrizioni sul tipo di moto e non sulle posizioni che può assumere il sistema, a causa del fatto che non è integrabile. Questa caratteristica dei vincoli anonomi si osserva chiaramente nel seguente esempio.

Esempio 2.2 (Falling disk). Si consideri un disco rigido il quale rotola su un piano π orizzontale, sul quale è fissato un sistema di coordinate $\Sigma = (O; X, Y, Z)$. In questo caso il corpo non si muove su una guida, e quindi si richiede che il corpo rotoli senza strisciare né lateralmente né longitudinalmente.

La posizione del disco nel piano è dunque determinata tramite le coordinate (x, y) del punto di contatto P , l'angolo χ misurato da un punto arbitrario della circonferenza fino al punto di contatto P , l'angolo θ tra la tangente al disco nel punto P e l'asse X , e l'angolo di inclinazione α tra il piano del disco e π , come mostrato in figura 2.2.

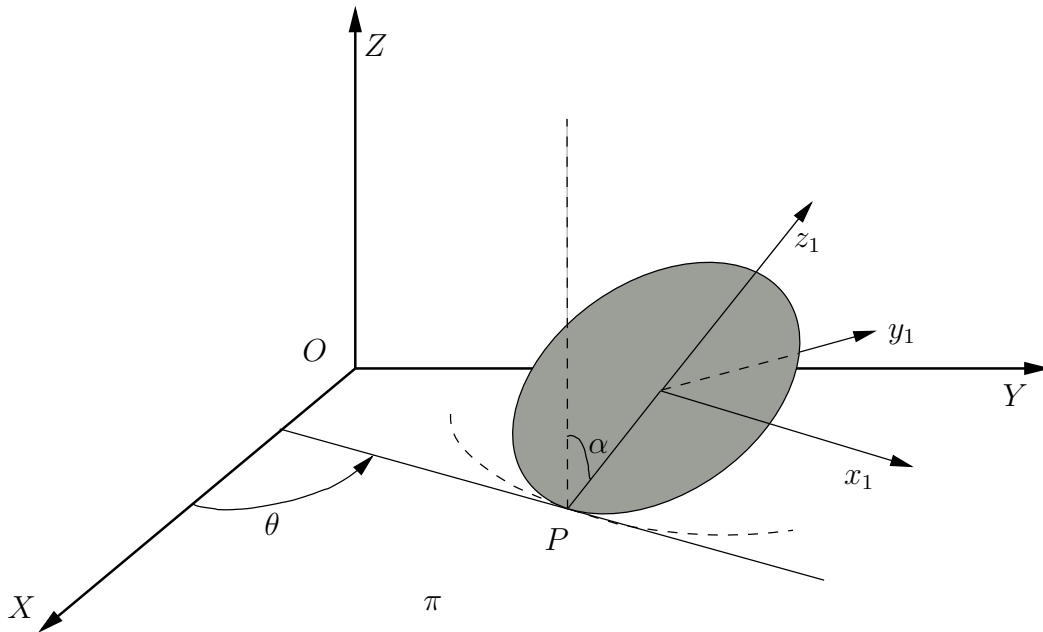


Figura 2.2: Falling disk nello spazio euclideo E^3 .

Allora la condizione che il disco rotoli senza slittare sul piano π impone che la velocità istantanea del punto di contatto del disco sia uguale a zero per ogni istante di tempo. Uno spostamento arbitrariamente piccolo del disco può così essere caratterizzato attraverso la variazione delle coordinate x, y, χ, θ ed α , che possiamo indicare come $dx, dy, d\chi, d\theta$ e $d\alpha$.

Sia R il raggio del disco. Poiché il sistema rotola senza slittare, la variazione delle cinque coordinate che individuano la posizione del disco, deve soddisfare le due condizioni

$$\begin{cases} dx = R d\chi \cos \theta, \\ dy = R d\chi \sin \theta. \end{cases} \quad (2.2)$$

Pertanto, la condizione di rotolare senza slittare sul piano è un vincolo anolonomo espresso dalle equazioni (2.2), le quale possono essere anche scritte nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = R \dot{\chi} \cos \theta, \\ \dot{y} = R \dot{\chi} \sin \theta. \end{cases} \quad (2.3)$$

In ogni modo, sebbene queste condizioni debbano essere soddisfatte, le cinque coordinate di riferimento possono assumere qualunque valore quando il disco si muove sul piano, cioè il disco può assumere qualunque posizione nel piano, purché le velocità soddisfino i vincoli.

Per verificare questo aspetto, consideriamo il disco in una posizione iniziale caratterizzata dalle coordinate $(x_0, y_0, \chi_0, \theta_0, \alpha_0)$ e supponiamo di volerlo portare in una certa configurazione finale con $(x_1, y_1, \chi_1, \theta_1, \alpha_1)$. Per realizzare tale moto, possiamo rotolare il disco dal punto $P_0 = (x_0, y_0)$

sul piano fino al punto $P_1 = (x_1, y_1)$ lungo una curva di lunghezza $l = R(\chi_1 - \chi_0 + 2\pi k)$, con $k \in \mathbb{N}$. Dunque ruotiamo il disco attorno alla perpendicolare al piano π passante per P_1 fin quando l'angolo θ non assume il valore desiderato. Infine, incliniamo il disco affinché sia nella posizione con $\alpha = \alpha_1$.

Quindi, come si capisce dall'analisi del moto appena fatta, le posizioni che può assumere nello spazio il disco durante il suo moto da una configurazione all'altra sono del tutto arbitrarie.

Una volta constatata la differenza tra vincoli olonomi ed anolonomi, introduciamo alcune ipotesi sui vincoli, affinché sia poi possibile studiare il sistema meccanico in esame in modo approfondito ed accurato. Supponiamo allora di avere $m + p$ vincoli definiti attraverso altrettante equazioni vincolari, dove sia m il numero di vincoli olonomi presenti sul sistema, mentre p il numero di vincoli anolonomi. Inoltre, si suppone che le funzioni f_j , con $j = 1, \dots, m + p$, abbiano derivate parziali continue e che siano soddisfatte le condizioni di:

1. *compatibilità* dei p vincoli con il sistema meccanico, ovvero non sia vuoto l'insieme delle n -uple di punti $\{P_1, \dots, P_n\}$ di \mathbb{R}^3 e delle corrispondenti n -uple di velocità che verificano le $m + p$ equazioni vincolari della forma (2.1);
2. *indipendenza* per gli m vincoli olonomi, cioè si richiede che la matrice jacobiana associata alle equazioni vincolari geometriche abbia rango massimo.

Osservazione 2.1. Nelle ipotesi che abbiamo introdotto per le equazioni vincolari, quella di indipendenza è stata messa in relazione con lo jacobiano delle sole m funzioni che definiscono i vincoli olonomi, ovvero si suppone che

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

abbia rango massimo. Di seguito, si vede come effettivamente solo questa ipotesi sia necessaria per ottenere dei risultati validi ai fini della teoria.

Quindi, a seguito della presenza dei vincoli olonomi, il sistema non può assumere una qualsiasi disposizione nello spazio euclideo, ma sono solo ammesse quelle configurazioni che appartengono alla varietà $Q = \{ (x_1, y_1, \dots, z_n) \mid F(x_1, y_1, \dots, z_n) = 0 \}$, dove $F(x_1, y_1, \dots, z_n)$ è la funzione vettoriale che tiene conto di tutti gli m vincoli olonomi presenti sul sistema. Si vede inoltre che, in base alle ipotesi fatte, Q è una sottovarietà immersa di \mathbb{R}^{3n} .

2.3 Coordinate generalizzate

Lo studio dei sistemi meccanici formalizzato finora prevede che ciascun sistema sia studiato osservando come si muovono le sue coordinate nello spazio fisico tridimensionale, ovvero facendo riferimento ai punti fisici o, al più, alla loro rappresentazione nello spazio delle configurazioni, tra le quali comunque esiste una corrispondenza biunivoca. In entrambi i casi, comunque, bisogna introdurre i vincoli come relazioni tra le coordinate dei punti che costituiscono il sistema meccanico.

Tuttavia, dato un sistema di n punti, un risultato dovuto a Lagrange è quello di studiare il sistema non più con riferimento alle terne che identificano gli n punti nello spazio fisico, ma attraverso delle coordinate introdotte direttamente nello spazio delle configurazioni e che tengano conto dei vincoli imposti sul sistema.

Se, infatti, la matrice jacobiana J associata alle m relazioni vincolari olonome risulta di rango massimo, allora, in base al teorema del Dini, tutte le coordinate dei punti del sistema sono esprimibili, in un opportuno intorno di ciascuna configurazione compatibile con i vincoli, tramite un numero $l = 3n - m$ di parametri indipendenti q_1, \dots, q_l detti *coordinate generalizzate* oppure *lagrangiane*.

Le coordinate così introdotte risultano variabili negli intervalli aperti I_1, \dots, I_l e sono in relazione con le coordinate precedenti attraverso le funzioni

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, \dots, q_l, t), \\ y_i = y_i(q_1, \dots, q_l, t), \\ z_i = z_i(q_1, \dots, q_l, t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

ciascuna dall'aperto in \mathbb{R}^{3n} , in modo tale che queste funzioni abbiano derivate parziali del primo ordine continue e che la matrice jacobiana, ad esse associata, abbia rango massimo, ovvero sia proprio pari ad l . Queste relazioni possono essere scritte in forma compatta come

$$\xi_h = \xi_h(q_1, \dots, q_l, t), \quad h = 1, \dots, 3n, \quad (2.4)$$

con chiaro significato dei simboli. In pratica, le coordinate generalizzate così introdotte possono essere interpretate come le coordinate per lo spazio delle configurazioni Q del sistema, il quale adesso ha una dimensione ridotta di un grado pari al numero di vincoli olonomi presenti sul sistema. Ad ogni punto di tale spazio corrisponde così una ed una sola configurazione del sistema $\{P_1, \dots, P_n\}$ compatibile con i vincoli olonomi e viceversa. Pertanto, Q è caratterizzato dalle coordinate necessarie e sufficienti per descrivere la posizione degli n punti del sistema nello spazio tridimensionale, e poiché $\dim(Q) \leq 3n$, segue che i vincoli geometrici diminuiscono il numero di variabili necessarie ad individuare la configurazione del sistema di punti materiali.

Osservazione 2.2. Da un punto di vista geometrico, lo spazio delle configurazioni Q risulta essere una varietà differenziabile di dimensione l , le cui carte locali sono proprio le coordinate lagrangiane e sulla quale il moto del sistema è descritto attraverso il moto di un punto sulla varietà stessa. Quindi, tale varietà risulta localmente diffeomorfa allo spazio \mathbb{R}^{3n} , ovvero, in ogni intorno aperto di un punto dello spazio delle configurazioni ammesso dai vincoli anolonomi, esiste un diffeomorfismo che mappa tale punto nello spazio \mathbb{R}^{3n} .

Osservazione 2.3. Il motivo per cui lo spazio delle configurazioni Q ha dimensione $l = 3n - m$, con m numero dei soli vincoli olonomi, dipende dal fatto che i vincoli anolonomi non sono integrabili. Infatti, l'olonomia di un vincolo permette di esprimerlo attraverso una funzione $h(q) = \text{costante}$, come si è visto nell'esempio 2.1. In questo modo, la configurazione del sistema è vincolata a stare su una sottovarietà dello spazio delle configurazioni, nella quale adottiamo le coordinate generalizzate ora definite. Questa condizione di essere olonomo è equivalente, attraverso il teorema di Frobenius, all'integrabilità della corrispondente distribuzione.

I vincoli anolonomi, invece, non impongono delle restrizioni sulle posizioni, ma solo sui moti che possono essere seguiti nella sottovarietà. In seguito vedremo le implicazioni dovute a tale caratteristica dei vincoli anolonomi.

La possibilità di rappresentare la configurazione del sistema attraverso un insieme di coordinate generalizzate risulta possibile in virtù del fatto che se la matrice jacobiana, la quale possiamo anche scrivere nella forma

$$J = \left(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_h} \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ h=1, \dots, 3n}}$$

ha rango massimo, allora la matrice

$$\hat{J} = \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial q_k} \right)_{\substack{h=1, \dots, 3n \\ k=1, \dots, l}}$$

ha anch'essa rango massimo. Questa è una conseguenza diretta del teorema del Dini poiché, se la matrice \hat{J} non avesse rango massimo, allora le $3n$ coordinate sarebbero esprimibili con un numero minore di l parametri indipendenti.

Il fatto che gli intervalli in cui le coordinate variano siano degli aperti, comporta che in generale le configurazioni del sistema non sono tutte quelle possibili, ma soltanto quelle in un intorno di una determinata configurazione. Quindi, come è noto dalla geometria differenziale, può accadere che sia necessario più di un sistema di coordinate generalizzate per rappresentare tutte le configurazioni del sistema considerato, mentre ciascuno di questi sistemi di coordinate costituisce una rappresentazione locale.

Esempio 2.3. Con riferimento agli esempi 2.1 e 2.2 considerati in precedenza, le coordinate generalizzate per i due sistemi sono semplicemente la posizione x lungo la guida per il primo, mentre nel secondo esempio le coordinate generalizzate sono $(x, y, \theta, \chi, \alpha)$.

Di conseguenza, i corrispondenti spazi delle configurazioni risultano essere $Q = \mathbb{R}$ nel primo caso, mentre $Q = \text{SE}(2) \times S^1 \times S^1$ per il *falling disk*, dove con $\text{SE}(2)$ si è indicato il *gruppo speciale euclideo* nel piano, ovvero il gruppo delle traslazioni e delle rotazioni nel piano.³

2.4 Vincoli anolonomi

L'introduzione delle coordinate generalizzate di un sistema meccanico permette di passare da un moto vincolato che ha luogo in uno spazio a dimensione maggiore, ad un moto libero in uno spazio opportuno. La riduzione della dimensione è legata, come abbiamo visto, al numero di vincoli olonomi. Per questo motivo, le coordinate generalizzate sono delle coordinate libere, le quali intrinsecamente tengono conto dell'effetto dei vincoli olonomi sul sistema.

Chiaramente l'espressione dei vincoli olonomi rispetto a questo nuovo insieme di coordinate, non ha molto interesse. Invece, possiamo riscrivere i vincoli anolonomi che agiscono sul sistema come

$$f_j(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) = 0 \quad j = 1, \dots, p,$$

ovvero come funzioni delle coordinate e delle velocità generalizzate. Tuttavia, in meccanica, i vincoli cinematici che si è soliti trovare sono esprimibili in una forma che risulta lineare nelle velocità generalizzate, cioè si hanno vincoli descrivibili attraverso una relazione del tipo

$$\sum_{k=1}^n a_k(q^i, t) \dot{q}^k + b(q^i, t) = 0.$$

Questi sono di solito detti vincoli anolonomi *lineari*.⁴ Se poi $b \equiv 0$ allora sono detti *omogenei*, mentre indipendenti dal tempo qualora i coefficienti a_k e b non ne dipendano esplicitamente.

In seguito faremo riferimento a vincoli anolonomi lineari ed omogenei linearmente indipendenti, i quali vengono detti anche *vincoli Pfaffiani*, ed indicati in modo sintetico con l'espressione

$$A(q)\dot{q} = 0, \tag{2.5}$$

dove A rappresenta una matrice lineare $p \times n$ dipendente dalle coordinate generalizzate, mentre \dot{q} è il vettore colonna delle velocità generalizzate. Osserviamo che, in analogia con la richiesta che J abbia rango massimo, si suppone anche che $\text{rank}(A) = p$, ovvero che le righe della matrice A siano tutte linearmente indipendenti. Questo permette di escludere che vi siano vincoli anolonomi ripetuti.

³In pratica, il gruppo speciale euclideo rappresenta il gruppo dei moti rigidi nel piano oppure nello spazio. In questo secondo caso, come abbiamo visto nell'esempio 1.9 a pagina 12, si indica con $\text{SE}(3)$. Entrambi questi due gruppi giocano un ruolo importante nella teoria dei sistemi anolonomi, poiché segnalano la presenza di simmetrie nel sistema.

⁴Per una trattazione dei vincoli anolonomi non lineari, si rimanda a [16], [17].

Esempio 2.4. Se riprendiamo in considerazione i vincoli (2.3) introdotti nell'esempio 2.2 a pagina 25, si dimostra facilmente che questi vincoli siano Pfaffiani. Infatti, possiamo riscrivere tali espressioni dei vincoli nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = R\dot{\chi} \\ \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \end{cases}, \quad (2.6)$$

ottenuta prendendo il versore che identifica la retta passante per l'intersezione del piano contenente il disco con il piano π . In particolare, se esaminiamo la matrice di trasformazione

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3),$$

questa identifica la rotazione attorno all'asse inerziale Z che porta a far coincidere l'asse X con quello solidale al disco rigido x . Pertanto, richiedere che il punto di contatto non abbia slittamento né laterale né longitudinale significa che la componente della velocità del punto di contatto deve essere diretta completamente lungo la direzione del moto, ovvero

$$\begin{cases} \langle v_P, \vec{i}_1 \rangle = R\dot{\chi}, \\ \langle v_P, \vec{j}_1 \rangle = 0, \end{cases}$$

dove con \vec{i}_1 e \vec{j}_1 si sono indicati i versori del sistema di riferimento solidale al disco. Esprimendo questi versori e la velocità v_P del punto di contatto nel sistema di riferimento inerziale si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{j}_1 &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \\ v_P &= \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}, \end{aligned}$$

e dunque svolgendo i prodotti scalari si ricavano le equazioni vincolari (2.6). In tal caso, è dunque evidente che la forma matriciale associata risulta

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -R \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.7)$$

pertanto i vincoli sono lineari nelle velocità, omogenei e linearmente indipendenti, avendo A rango uguale a 2.

2.5 Spostamenti virtuali e gradi di libertà

Un moto arbitrario del sistema può essere rappresentato nello spazio delle configurazioni Q ad un certo tempo attraverso una certa curva. Se poi il sistema è olonomo, allora anche il viceversa è vero: ogni curva dello spazio delle configurazioni rappresenta, al variare del tempo, un moto del sistema nello spazio fisico tridimensionale. Tuttavia ciò non è valido se il sistema è anolonomo. Infatti, nel secondo caso, solo certe curve nello spazio delle configurazioni in determinati tempi corrispondono a moti del sistema compatibili con i suoi vincoli, poiché il punto nello spazio delle configurazioni del sistema meccanico considerato non si può muovere lungo una direzione arbitraria.

Il fenomeno è legato al fatto che le velocità generalizzate ed il tempo che definiscono lo spostamento devono adesso soddisfare un certo numero di vincoli anolonomi della forma

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} dq_k + a_{i0} dt = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (2.8)$$

Tuttavia, come abbiamo detto, nella presente trattazione ci limitiamo a studiare vincoli anolonomi scleronomi ed omogenei, ovvero del tipo (2.5). In questo caso, per ogni configurazione q , tutti i possibili spostamenti compatibili con le condizioni vincolari giacciono sullo spazio tangente T_qQ alla sottovarietà Q . Allora, in relazione con il problema di eliminare le reazioni dei vincoli ideali, problema principale nella derivazione delle equazioni di moto dei sistemi meccanici, si è soliti introdurre il concetto di spostamenti virtuali.

Definizione 2.6. In una generica configurazione q , l'insieme di tutti i possibili *spostamenti virtuali* è definito come il sottospazio lineare dello spazio tangente alla varietà delle configurazioni in q , il quale consiste nei vettori δq che soddisfino i vincoli, ovvero il sottospazio \mathcal{D}_q è definito come

$$\mathcal{D}_q = \{ \delta q \in T_qQ \mid A(q)\delta q = 0 \}.$$

Globalmente è dunque possibile una distribuzione \mathcal{D} sulla varietà Q che descrive i vincoli anolonomi e che è specificata in ogni punto $q \in Q$ dal sottospazio lineare $\mathcal{D}_q \subset T_qQ$. Quindi, introdotto il concetto di spostamento virtuale possiamo dare la seguente

Definizione 2.7. Il numero di spostamenti virtuali linearmente indipendenti di un sistema viene chiamato il numero di *gradi di libertà* del sistema.

Per un sistema olonomo, è noto che il numero di gradi di libertà è uguale al numero di coordinate lagrangiane del sistema. Questo invece non è più valido per un sistema anolonomo, per il quale il numero di gradi di libertà è minore del numero di coordinate generalizzate. In generale, dunque, i gradi di libertà per un sistema meccanico soggetto a vincoli anolonomi sono dati dalla relazione

$$g = l - p,$$

dove l è il numero di coordinate lagrangiane necessarie a descrivere il sistema, mentre p è il numero di vincoli anolonomi e coincide con il rango della matrice A , avendo supposto che tutti i vincoli sul sistema siano indipendenti tra loro.

Esempio 2.5. Si consideri nuovamente l'esempio 2.2 del *falling disk*. In questo caso abbiamo un corpo rigido che si muove in uno spazio tridimensionale, quindi la sua generica posizione è descritta attraverso sei coordinate. Imponendo poi che il punto di contatto sia sempre sul piano π , togliamo una coordinata attraverso un vincolo olonomo; pertanto abbiamo cinque coordinate lagrangiane necessarie e sufficienti per descrivere le configurazioni del sistema.

Si introducono allora i vincoli anolonomi. In particolare, abbiamo due vincoli di non slittamento laterale e longitudinale rispettivamente, quindi il numero di gradi di libertà del sistema risulta essere pari a *tre*. La scelta naturale dei gradi di libertà è quella di prendere i tre angoli che descrivono l'inclinazione del disco, ovvero θ , α e χ .

Osservazione 2.4. In conclusione, si osserva che per descrivere un sistema fisico di n punti materiali liberi nello spazio sono necessarie $6n$ coordinate cartesiane. Se poi sono presenti vincoli olonomi, il numero di coordinate si riduce del numero di vincoli imposti, e ciò corrisponde ad una riduzione della dimensione dello spazio delle configurazioni. Infine, se sono presenti anche vincoli anolonomi, si vietano determinate velocità nel fibrato tangente allo spazio delle configurazioni, e questo corrisponde ad una diminuzione dello spazio delle fasi. Infatti, le velocità possono assumere valori solo nella distribuzione determinata dai vincoli anolonomi sul fibrato tangente.

2.6 Integrabilità dei vincoli cinematici

Dopo aver introdotto i vincoli su un sistema meccanico e distinto tra vincoli olonomi ed anolonomi, si vuole determinare un metodo per distinguere i due tipi di vincolo. Più precisamente, dato un

vincolo cinematico, intendiamo verificare se questo può essere integrato oppure se risulta essere un vincolo anolonomo. Osserviamo che conoscere il numero esatto di vincoli olonomi presenti sul sistema è necessario per ottenere il numero minimo necessario di coordinate generalizzate in modo da descrivere la configurazione del sistema.

In base a quanto abbiamo visto nella sezione precedente, sappiamo che ad ogni vincolo anolonomo lineare può essere associata una distribuzione. In generale, però, possiamo associare una distribuzione \mathcal{D} di rango ρ su Q ad ogni insieme di vincoli *cinematici* lineari. Questa distribuzione, detta *distribuzione vincolare*, può essere definita come l'annullatore delle $k = n - \rho$ 1-forme su Q linearmente indipendenti definite dai vincoli. Usando le coordinate locali (q, \dot{q}) definite sul fibrato tangente, le fibre \mathcal{D}_q della distribuzione vincolare possono essere considerate come il nucleo della matrice $A(q)$ associata adesso al sistema di vincoli cinematici, la quale dipende da q in modo liscio ed ha ovunque rango k , ovvero abbiamo

$$\mathcal{D}_q = \{ \delta q \in T_q Q \mid A(q)\delta q = 0 \}.$$

dove appunto $A(q) \in M(k \times n, \mathbb{R})$ è la matrice dei vincoli cinematici lineari. Essendo la matrice $A(q)$ di rango massimo, ossia i vincoli sono tutti linearmente indipendenti, risulta $\dim \mathcal{D}_q = n - k = \rho$.

Ne consegue che un vincolo cinematico può essere espresso in funzione delle sole coordinate generalizzate q soltanto se la distribuzione \mathcal{D} è integrabile. Infatti, un vincolo della forma (2.5) risulta olonomo se esiste una funzione $F: Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che possiamo esprimere questo vincolo come $F(q) = 0$. Se indichiamo con $f_i(q)$, con $i = 1, \dots, k$, le componenti della funzione vettoriale F , la condizione precedente si traduce nell'equivalenza

$$\sum_{h=1}^n a_{ih}(q)\dot{q}_h = 0 \iff f_i(q) = 0 \iff \sum_{h=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial q_h}(q)\dot{q}_h = 0$$

con $i = 1, \dots, k$, avendo differenziato rispetto al tempo la seconda espressione per ottenere la terza. Pertanto, un vincolo cinematico risulta olonomo se esiste una funzione vincolare F tale che per le sue componenti valga la relazione

$$a_{ih}(q) = \frac{\partial f_i}{\partial q_h}(q), \quad h = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.9)$$

D'altra parte, ricordiamo che una distribuzione \mathcal{D} su Q risulta integrabile se esiste una funzione $F: Q \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho} = \mathbb{R}^k$ tale che il suo jacobiano abbia rango massimo, ovvero $\text{rank } DF(q) = k$ per ogni $q \in Q$, e $\mathcal{D}_q = \{ v \in T_q Q \mid DF(q)v = 0 \}$ per ogni $q \in Q$. Una volta determinata F , la varietà integrale associata alla distribuzione risulta essere $N = \{ q \in Q \mid F(q) = 0 \}$, con $T_q N = \mathcal{D}_q$, ovvero i punti della varietà che ammettono come spazio tangente la fibra della distribuzione \mathcal{D}_q sono quelli che stanno in $N = F^{-1}(0)$.

Quindi, perché sia soddisfatta la seconda ipotesi sulla funzione $F(q)$ è necessario richiedere che la sua matrice jacobiana sia uguale alla matrice $A(q)$ associata al sistema di vincoli cinematici. Chiaramente, le due matrici sono uguali se sono uguali i corrispondenti elementi, ovvero si ottiene nuovamente la relazione (2.9), indicando con $f_i(q)$, con $i = 1, \dots, k$, le componenti della funzione. Di conseguenza, una distribuzione è integrabile solo se il vincolo che la definisce risulta olonomo.

Proposizione 2.1. *Un vincolo cinematico risulta olonomo se e soltanto se la distribuzione associata è integrabile.*

A questo punto, per determinare la natura di un vincolo cinematico, possiamo applicare il teorema di Frobenius 1.2, e quindi verificare se la distribuzione è involutiva. Inoltre, in base alla proposizione 1.6, è sufficiente verificare l'involutività della distribuzione sui generatori della stessa. Pertanto, abbiamo adesso un metodo operativo per verificare se un vincolo cinematico è olonomo oppure anolonomo.

Osservazione 2.5. Le considerazioni svolte adesso evidenziano maggiormente la differenza tra vincoli olonomi ed anolonomi. Nel primo caso, infatti, l'insieme \mathcal{D}_q delle velocità ammissibili è lo spazio tangente alla sottovarietà integrale N dello spazio delle configurazioni, per cui prendendo $q \in N$ risulta che $\dot{q} \in \mathcal{D}_q = T_q N$. Per un vincolo anolonomo, invece, ciò non è vero, quindi non è possibile ridurre la dimensione dello spazio delle configurazioni perché sia soddisfatta anche la condizione sulle velocità.

Esempio 2.6. Consideriamo ancora una volta il *falling disk* introdotto nell'esempio 2.2. Per questo sistema abbiamo assodato che i vincoli sono lineari ed esprimibili nella forma (2.7), tuttavia adesso è più conveniente esprimerli nella forma (2.3) che ricordiamo essere

$$\begin{cases} \dot{x} = R\dot{\chi} \cos \theta, \\ \dot{y} = R\dot{\chi} \sin \theta, \end{cases}$$

per cui la distribuzione vincolare associata risulta essere

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \text{Span} \left\{ R \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + R \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \chi}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} = \\ &= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

A questo punto bisogna calcolare le parentesi di Lie tra tutti i generatori della distribuzione, tuttavia si constata che l'unica parentesi diversa da zero è la seguente

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}, R \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + R \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \chi} \right] &= R \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + R \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \chi} + \\ &\quad - R \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} - R \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial \theta} = \\ &= -R \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + R \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Il campo vettoriale così ottenuto non appartiene alla distribuzione, la quale non risulta involutiva e quindi non è integrabile. Pertanto il vincolo cinematico considerato è anolonomo.

Capitolo 3

Meccanica Lagrangiana dei sistemi olonomi

Dopo aver richiamato velocemente alcune nozioni sulla dinamica dei sistemi fisici, verifichiamo adesso il formalismo lagrangiano, il quale permette di ricavare facilmente le equazioni di moto per un sistema meccanico. In particolare, nel presente capitolo ci soffermeremo sul caso di sistemi olonomi, mentre nel prossimo si affronterà il problema di ricavare le equazioni di moto per un sistema anolonomo.

3.1 Principio di Hamilton ed equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi olonomi

Le equazioni di Eulero-Lagrange e quelle di Hamilton possono essere ricavate partendo dalla formulazione newtoniana della meccanica, ottenendo successivamente i principi variazionali come teoremi. D'altra parte, si può seguire anche la strada opposta: assumere per validi i principi variazionali e poi derivare le equazioni di Eulero-Lagrange e quelle di Hamilton come teoremi. In questo lavoro scegliamo il secondo approccio, il quale mette in rilievo gli aspetti geometrici della meccanica.

Si esamina quindi un insieme di curve $c: [a, b] \rightarrow Q$, le quali uniscono due punti dati q_0, q_1 nello spazio delle configurazioni Q . Queste curve possono anche essere soggette a qualche vincolo, tuttavia per ora ci limitiamo a considerare sistemi liberi. L'insieme di tutte le curve siffatte differenziabili due volte viene indicato con

$$\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b]) = \left\{ c: [a, b] \rightarrow Q \mid c \in C^2, c(a) = q_0, c(b) = q_1 \right\}.$$

Si può dimostrare che questo insieme risulta una varietà differenziabile di dimensione infinita. Sia quindi c una curva in $\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$. Allora, lo spazio tangente a $\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$ in c è dato da

$$T_c \mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b]) = \left\{ X: [a, b] \rightarrow TQ \mid X \in C^1, X(t) \in T_{c(t)}Q, X(a) = X(b) = 0 \right\}.$$

Un vettore tangente X in c è dunque un campo vettoriale lungo la curva c che si annulla ai suoi estremi $c(a)$ e $c(b)$.

Poiché X è un vettore tangente alla varietà $\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$, possiamo considerarlo come il vettore tangente per $s = 0$ ad una curva $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \mapsto c_s$ di $\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$, la quale coincide con c per $s = 0$, ovvero $c_0 = c$, per cui

$$X(t) = \left. \frac{d}{ds} c_s(t) \right|_{s=0}.$$

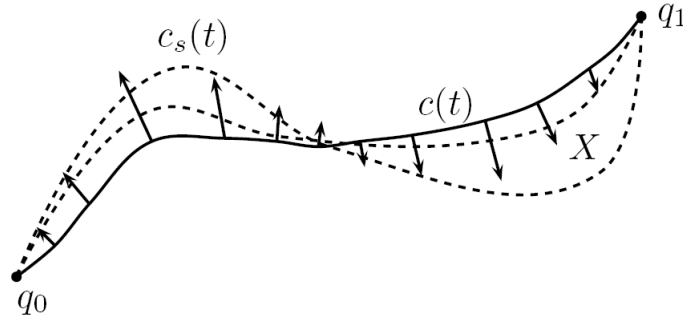


Figura 3.1: Variazione c_s e variazione infinitesimale X di una curva c con estremi q_0 e q_1 .

La curva c_s viene detta una *variazione* di c , mentre il vettore X è una *variazione infinitesima* della curva c , detto anche spostamento virtuale corrispondente alla variazione c_s .

Esempio 3.1. Siano q_1, \dots, q_n le coordinate locali su Q , mentre X_1, \dots, X_n le componenti di un campo vettoriale tangente X rispetto alla base canonica dello spazio tangente $\{\partial/\partial q_1, \dots, \partial/\partial q_n\}$. Se $c(t)$ è una curva rappresentata dalle funzioni lisce $q_1^*(t), \dots, q_n^*(t)$, allora si può definire una variazione $c_s(t)$ come la curva di componenti $q_i(s, t) = q_i^*(t) + sX_i(t)$, per $i = 1, \dots, n$.

Sia dunque Q lo spazio delle configurazioni¹ di un sistema con coordinate generalizzate q^i , con $i = 1, \dots, l$, e TQ il suo fibrato tangente. Quindi definiamo un funzionale $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$, il quale viene detto *Lagrangiana* del sistema. Per un sistema meccanico, la Lagrangiana viene spesso scelta della forma

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + U(q),$$

dove $T: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ è l'*energia cinetica* del sistema, mentre $U: Q \rightarrow \mathbb{R}$ rappresenta il suo *potenziale*. Allora, consideriamo l'*azione* classica associata alla Lagrangiana, definita come

$$\begin{aligned} \mathcal{I}: \mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ c &\mapsto \int_a^b L(c(t), \dot{c}(t)) dt. \end{aligned}$$

Quindi si ha che

$$d\mathcal{I}(c)(X) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{I}(c_s) = \int_a^b \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(c_s, \dot{c}_s) dt.$$

Svolgendo i calcoli ed integrando per parti, si vede che in coordinate locali possiamo scrivere

$$d\mathcal{I}(c)(X) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) X^i dt, \quad (3.1)$$

per $c \in \mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$ e $X \in T_c \mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$.

Definizione 3.1 (Principio di Hamilton). Una curva $c \in \mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$ è un moto per un sistema lagrangiano definito da L se e soltanto se c è un *punto critico* di \mathcal{I} , ovvero se $d\mathcal{I}(c) = 0$.

¹Come abbiamo accennato nel capitolo 2, lo spazio delle configurazioni di un sistema può essere pensato come una varietà differenziabile, per la quale le coordinate generalizzate rappresentano le carte coordinate. Inoltre, supponiamo che su tale varietà sia definita una metrica g al fine di poter calcolare l'energia cinetica. Osserviamo inoltre che, nella trattazione che segue, le coordinate generalizzate vengono scelte già sul sistema non vincolato: in questo modo, le coordinate lagrangiane coincidono con le coordinate fisiche dei punti.

Il significato del principio di Hamilton può essere considerato nel seguente modo: la quantità $\int_a^b L(q(t), \dot{q}(t)) dt$ è estremalizzata lungo tutte le possibili variazioni. Gli esempi mostrano poi che la quantità $\int_a^b L dt$ da estremalizzare non è necessariamente minimizzata da una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange, così come in analisi i punti critici delle funzioni non sono necessariamente dei minimi.²

Un risultato alla base del calcolo delle variazioni è la seguente

Proposizione 3.1. *Il principio di Hamilton per una curva $c(t)$ è equivalente alla condizione che $c(t)$ soddisfi le equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Dimostrazione. Sia $X \in T_c \mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$ una variazione infinitesima della curva c corrispondente alla variazione c_s . Essendo c un punto critico del funzionale \mathcal{I} , significa che $d\mathcal{I}(c)(X) = 0$ per ogni $X \in T_c \mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$. In vista della (3.1), questo equivale a scrivere

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) X^i dt = 0, \quad \forall X^i.$$

Allora, usando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, è facile provare che per una curva c la condizione di essere critica è equivalente ad essere soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana L , ovvero

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad \square$$

Un aspetto saliente delle equazioni di Eulero-Lagrange è che possono essere viste come un modo di scrivere la seconda legge di Newton in una forma che ha senso in un sistema di coordinate arbitrario, curvilineo e mobile, ovvero il formalismo di Eulero-Lagrange è *covariante*. È questo un grande vantaggio sia per la teoria sia per i problemi pratici.

Inoltre, è interessante notare che la relazione rimane invariata se si sostituisce la Lagrangiana con $L(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt} S(q, t)$, per ogni funzione $S(q, t)$. Questo riflette l'*invarianza di gauge* della meccanica classica.

3.1.1 Sistemi meccanici con forze esterne

In presenza di forze esterne F^i agenti sul sistema³, con $i = 1, \dots, m$, si deve considerare il lavoro totale fatto da queste forze durante il moto del sistema, il quale risulta essere

$$W(c) = \sum_{j=1}^m \int_a^b F^j(\dot{c}(t)) dt.$$

Si noti che se queste forze sono derivabili da un potenziale U nel senso che $F^i = -\partial U / \partial q^i$, allora esse possono essere incorporate nella Lagrangiana sommandovi $-U$. Dunque, tale modo di introdurre le forze è consistente con le stesse equazioni di Eulero-Lagrange.

²L'esempio più semplice è forse ottenuto studiando le geodetiche su una sfera, sulla quale le geodetiche attorno alla sfera sono punti critici ma non dei minimi.

³Nei libri di meccanica le forze esterne sono spesso considerate come campi vettoriali, ma, invece, dovrebbero essere viste come campi di 1-forme. Questa distinzione assume un'importanza cruciale quando si intende formulare la meccanica da un punto di vista geometrico.

Definizione 3.2 (Principio integrale di Lagrange-d'Alembert). Sia $c \in \mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$. Allora c è un moto per il sistema lagrangiano definito da L con forze esterno F^1, \dots, F^m se e soltanto se c è tale che $d\mathcal{I}(c) = W(c)$.

In coordinate, il principio integrale di Lagrange-d'Alembert può essere espresso nel seguente modo: risulta che $d\mathcal{I}(c) = W(c)$ se e soltanto se $d\mathcal{I}(c)(X) = W(c)(X)$ per ogni $X \in T_c\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$, ovvero

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) X^i dt = \sum_{j=1}^m \int_a^b F_i^j(\dot{c}(t)) X^i dt \quad \forall X^i.$$

Usando nuovamente il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi forzati

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^m F_i^j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

3.2 Approccio geometrico alla meccanica Lagrangiana

Una volta introdotta brevemente la meccanica Lagrangiana dei vincoli olonomi, prima di passare allo studio dei vincoli anolonomi, vediamo come è possibile scrivere da un punto di vista geometrico gli stessi risultati. Una visione della meccanica in questa forma sarà poi molto utile per uno studio approfondito dei sistemi anolonomi.

A tale scopo, si consideri adesso un sistema di n punti liberi di muoversi nello spazio fisico tridimensionale. Allora, come abbiamo osservato nel capitolo 2, possiamo definire uno spazio delle configurazioni nel quale il sistema è rappresentato come un punto di $3n$ coordinate. In tal caso, le coordinate generalizzate corrispondono con le coordinate fisiche dei punti.

Sia quindi Q una varietà che rappresenta lo spazio delle configurazioni, e sia TQ il suo fibrato tangente. Le coordinate generalizzate q^i su Q inducono le coordinate (q^i, \dot{q}^i) su TQ , chiamate *coordinate tangenti*. Dunque, come abbiamo già verificato, la Lagrangiana è una mappa $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$, per la quale l'energia cinetica è definita come $T(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$ attraverso la metrica Riemanniana g , mentre $U: Q \rightarrow \mathbb{R}$ è il potenziale.

Anche in questo caso, possiamo introdurre il principio di Hamilton come nella definizione 3.1. Inoltre, notiamo che la condizione $d\mathcal{I}(c)(X) = 0$ rimane inalterata se sostituiamo l'integrando con $L(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt}S(q, t)$, con $S(q, t)$ funzione arbitraria. Questo fatto riflette l'*invarianza di gauge* (G-invarianza) della meccanica classica.

Definizione 3.3. Sia L una Lagrangiana su TQ e sia $\mathbb{F}L: TQ \rightarrow T^*Q$ l'applicazione definita in coordinate da

$$(q^i, \dot{q}^j) \mapsto (q^i, p_j),$$

dove $p_j = \partial L / \partial \dot{q}^j$. Allora $\mathbb{F}L$ è detta trasformazione di Legendre oppure *fiber derivative*.

Osservazione 3.1. Intrinsecamente, quindi $\mathbb{F}L$ differenzia L in direzione delle fibre.

Definizione 3.4. Una Lagrangiana L è detta *iperregolare* se $\mathbb{F}L$ è un diffeomorfismo globale. In questo caso, $\mathbb{F}L$ definisce un simplettomorfismo tra la varietà simplettica (TQ, ω_L) e (T^*Q, ω_Q) . Inoltre, se L è una Lagrangiana iperregolare, si definisce la corrispondente *Hamiltoniana* come

$$H(q^i, p_j) = p_i \dot{q}^i - L.$$

Osservazione 3.2. È possibile mostrare che le equazioni di Eulero-Lagrange per una Lagrangiana iperregolare L sono equivalenti alle equazioni di Hamilton per H .

Si consideri quindi la proiezione $\pi_Q: TQ \rightarrow Q$ e supponiamo che L sia iperregolare. Allora si definisce la funzione H_L su TQ come

$$H_L(q, \dot{q}) = \mathbb{F}L(q, \dot{q})\dot{q} - L(q, \dot{q}) \quad (3.4)$$

in modo tale che

$$H = H_L \circ (\mathbb{F}L)^{-1}. \quad (3.5)$$

Definizione 3.5. Si afferma che un campo vettoriale $X \in \Gamma(TTQ)$ è del *secondo ordine* se

$$(\pi_Q)_*X_{(q, \dot{q})} = \dot{q}, \quad \dot{q} \in T_qQ.$$

Sia dunque Ω la forma simplettica canonica su T^*Q . Quindi ponendo $\Omega_L = \mathbb{F}L^*\Omega$, si ottiene una forma simplettica su TQ , in quanto abbiamo assunto che $\mathbb{F}L$ sia un diffeomorfismo. Allora si può adesso definire il campo vettoriale Lagrangiano $X_L \in \Gamma(TTQ)$, corrispondente all'Hamiltoniana (3.4) quando il campo vettoriale del secondo ordine soddisfa

$$\Omega_L(X_L, Z) = \mathbf{d}H_L(Z), \quad (3.6)$$

dove Z è un campo vettoriale arbitrario su TQ . È facile verificare che X_L è legato con il campo vettoriale Hamiltoniano X_H , con l'Hamiltoniana H definita in (3.5), tramite la relazione

$$\mathbb{F}L_*X_L = X_H.$$

Il sistema di equazioni Lagrangiane (3.2) può adesso essere astratto per mezzo del sistema dinamico su TQ dato da

$$\dot{v} = X_L(v), \quad v \in TQ.$$

Definizione 3.6. Un campo vettoriale Z su TQ è detto *verticale* su $(\pi_Q)_*Z = 0$.

In coordinate locali, si può mostrare facilmente che la (3.6) è identicamente soddisfatta per ogni campo vettoriale verticale ed ogni campo vettoriale X_L del secondo ordine.

3.2.1 Introduzione dei vincoli olonomi

Nel problema $d\mathcal{I}(c) = 0$, se si suppone che ci siano vincoli olonomi addizionali esprimibili nella forma $\phi_i(q) = 0$, $i = 1, \dots, m$, allora si può estendere il principio di azione critica al problema variazionale esteso con i cosiddetti moltiplicatori di Lagrange

$$\int_a^b \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(L(c_s, \dot{c}_s) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_i(qc_s) \right) dt = 0, \quad (3.7)$$

dove le variazioni sono soggette alla condizione che $c_s \in \mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$ soddisfi i vincoli $\phi_i(c_s) = 0$, per $i = 1, \dots, m$, e $\phi_i(q_0) = \phi_i(q_1) = 0$, per $i = 1, \dots, m$.

Poniamo dunque $(c(t), \dot{c}(t)) = \bar{c}(t)$. Allora le condizioni necessarie possono essere scritte come

$$\mathbf{i}_{\bar{c}}\Omega_L - \mathbf{d}H_L + \sum_{i=1}^m \lambda \pi_Q^* \mathbf{d}\phi_i = 0, \quad (3.8)$$

con $\phi_i(q) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Supponiamo poi che l'insieme

$$Q_c = \{ q \in Q \mid \phi_i(q) = 0 \} \subset Q$$

sia una sottovarietà liscia e regolare di Q . Se $i: Q_c \rightarrow Q$ è un'inclusione, allora $\bar{i} = i_*: TQ_c \rightarrow TQ$ e $\bar{i}^* \pi_Q^* \mathbf{d}\phi_i = \mathbf{d}(\phi_i \circ \pi_Q \circ i) \equiv 0$. Ne consegue segue che le condizioni necessarie (3.8) sono soddisfatte semplicemente facendo il *pull back* attraverso \bar{i} a Q_c , ottenendo un sistema Lagrangiano su Q_c con Lagrangiana $L \circ \bar{i}$.

Dunque, finché i vincoli olonomi sono sufficientemente regolari, li possiamo rimuovere i vincoli restringendoci allo spazio definito tramite i vincoli stessi. Questo ragionamento fornisce così una spiegazione geometrica a quanto abbiamo visto in precedenza.

3.2.2 Sottovarietà Lagrangiane

Esiste un altro modo con il quale è possibile caratterizzare sistemi Hamiltoniani. Supponiamo che M sia una varietà che ammette una 2-forma non degenerativa Ω , ovvero la coppia (M, Ω) è una varietà *quasi simplettica*. Ricordiamo che una tale varietà è detta *simplettica* se Ω è chiusa, ovvero $d\Omega = 0$.

Definizione 3.7. Data una distribuzione \mathcal{D} su una sottovarietà $N \subset M$, si definisce il suo *complemento ortogonale* rispetto ad Ω come

$$\mathcal{D}_x^\perp = \{ Y_x \in T_x N \mid \Omega(x)(Y_x, X_x) = 0, \forall X_x \in \mathcal{D}_x \}, \quad x \in N.$$

Quindi, si dice che \mathcal{D} è una distribuzione *isotropica* se $\mathcal{D}^\perp \subset \mathcal{D}$, *coisotropica* se $\mathcal{D}^\perp \supset \mathcal{D}$, *Lagrangiana* se $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$, mentre *simplettica* su $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}^\perp = \{0\}$.

Osserviamo che per una distribuzione Lagrangiana risulta che $\dim D_x = \frac{1}{2} \dim M$.

Definizione 3.8. Una sottovarietà $N \subset M$ con un'inclusione $i: N \rightarrow M$ è detta una *sottovarietà Lagrangiana* quando Ω è una forma simplettica ed i_*TN è una distribuzione Lagrangiana su $N \subset M$.

Nel caso in cui sia $M = T^*Q$, esiste una forma simplettica naturale ω , ed una forma simplettica indotta $\dot{\omega}$ su TT^*Q data in coordinate locali come

$$\dot{\omega} = \sum_i dq_i \wedge dp_i + \sum_i dq_i \wedge d\dot{p}_i.$$

Se X_H è un campo vettoriale Hamiltoniano su T^*Q , allora si pone

$$N = \{ (x, X_H(x)) \mid x \in T^*Q \} \subset TT^*Q.$$

Ne segue che N è una sottovarietà Lagrangiana di TT^*Q , con forma simplettica $\dot{\omega}$, ed ogni sottovarietà Lagrangiana di TT^*Q è parametrizzata localmente da un campo vettoriale su T^*Q . Pertanto, i campi vettoriali Hamiltoniani su T^*Q sono equivalentemente definiti da sottovarietà Lagrangiane di TT^*Q che sono parametrizzate da una singola funzione Hamiltoniana su T^*Q .

3.2.3 Dissipazione di Rayleigh

Si può quindi estendere questo modello per includere anche dei fenomeni dissipativi, se questi possono essere definiti attraverso una *funzione di dissipazione* $D(q, \dot{q})$ tale che

$$\dot{q}^T D \dot{q} = \text{tasso di energia dissipata per secondo.}$$

In generale, si assume che le funzioni di dissipazione siano quadratiche, simmetriche e definite positive rispetto alle velocità generalizzate \dot{q} . Sia quindi $L(q, \dot{q})$ la Lagrangiana del sistema in esame, dunque le equazioni di moto con la componente dissipativa sono date localmente da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (3.9)$$

Si ha allora il seguente risultato, il quale è facile da dimostrare.

Teorema 3.1. *Se $E(q, \dot{q})$ è l'energia totale del sistema, allora*

$$\frac{d}{dt} E(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}.$$

Teorema 3.2. *Il sistema Lagrangiano dissipativo è invariante rispetto ad un cambio di coordinate $q = Q(\dot{q})$. In particolare, se il sistema dinamico è descritto da una Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ ed una funzione di dissipazione $D(q, \dot{q})$, con le (3.9) corrispondenti equazioni di moto, allora lo stesso sistema dinamico è descritto in termine delle Q -coordinate tramite una Lagrangiana $\mathcal{L}(Q, \dot{Q})$, una funzione di dissipazione $\mathcal{D}(Q, \dot{Q})$ e dalle equazioni di moto*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{Q}} = 0.$$

Questo tipo di dissipazione *rate-dependent* è spesso detto *dissipazione di Rayleigh*.

3.3 Sistemi meccanici con forze esterne

La maggior parte dei sistemi interagisce con l'ambiente circostante attraverso delle forze (generalizzate). Per descrivere queste interazioni si ricorre alla legge di Newton oppure al principio di Lagrange-d'Alembert. Sul secondo ritorneremo in seguito quando saranno introdotti i vincoli anolonomi.

Legge di Newton. Per determinare una legge di Newton consistente con il nostro spazio delle configurazioni, modellato attraverso la varietà Q , si introduce assiomaticamente un isomorfismo tra fibrati

$$\mathcal{P}: TQ \rightarrow T^*Q, \quad (3.10)$$

dove $\mathcal{P}_q: T_qQ \rightarrow T_q^*Q$ definisce la relazione tra la velocità di fase $\dot{q} \in T_qQ$ ed il momento $p \in T_q^*Q$ come

$$p = \mathcal{P}_q(\dot{q}). \quad (3.11)$$

Ad esempio, per una singola particella di massa m che si muove lungo una linea, questo isomorfismo è semplicemente dato dalla mappa $(q, v) \mapsto (q, mv)$, e più in generale, tramite la trasformazione di Legendre.

Per prima cosa, bisogna avere una nozione di moto uniforme tratto dalla Prima legge di Newton. Questa si modella come un flusso su TQ indotto da un campo vettoriale del secondo ordine X_0 su TQ , il quale risulta essere un flusso geodetico rispetto ad un'adeguata metrica su Q . Ora, anche $\mathcal{P}_*: TTQ \rightarrow TT^*Q$ è un isomorfismo tra fibrati, quindi \mathcal{P}_*X_0 definisce un campo vettoriale su T^*Q .

Il nostro concetto di *campo di forza* sarà una 1-forma $F(t)$ su Q dipendente dal tempo. Pertanto, abbiamo che $F(t) \in \Gamma(T^*Q)$, ovvero è una sezione del fibrato cotangente T^*Q per ogni t .

Se Z è un campo vettoriale su Q , allora possiamo sollevare Z ad una funzione P_Z su T^*Q ponendo

$$P_Z(q, p) = p(Z_q), \quad p \in T_q^*Q.$$

Si nota che P_Z è la *funzione momento* associata a Z .

Sia quindi η una 1-forma su Q , allora si definisce il *sollevamento verticale* di η , indicato con η^v , il quale sarà un campo vettoriale su T^*Q , ponendo

$$\eta^v(P_Z) = \eta(Z),$$

per ogni campo vettoriale Z su Q . Localmente, se $\eta = \sum_i \alpha_i dq^i$, allora $\eta^v = \sum_i \alpha_i (\partial/\partial p_i)$.

Definizione 3.9. Il *campo vettoriale Newtoniano* X_F corrispondente ad un campo di forze esterne F è il campo vettoriale su T^*Q dato da

$$X_F = \mathcal{P}_*X_0 + F^v. \quad (3.12)$$

Poiché X_0 è un campo vettoriale del secondo ordine, nelle coordinate locali (q, v) per TQ possiamo scriverlo nella forma

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = a_v(q, v).$$

Il sistema dinamico $\dot{\alpha} = X_F(\alpha)$, con $\alpha \in T^*Q$, può pertanto essere espresso in coordinate locali (q, p) per T^*Q nella forma

$$\begin{cases} \dot{p} = a_p(q, p) + F, \\ \dot{q} = \mathcal{P}_q^{-1}(p), \end{cases} \quad (3.13)$$

dove $a_v(q, p) = \frac{d}{dt}\mathcal{P}_q(v)$, $\dot{v} = a_v(q, v)$, mentre $\dot{q} = v = \mathcal{P}_q^{-1}(p)$.

La rappresentazione (3.13) è utile in quanto permette di distinguere le due componenti fondamentali del sistema newtoniano su T^*Q . La parte cinematica del sistema su Q è infatti definita localmente da

$$\dot{q} = \mathcal{P}_q^{-1}(p),$$

relazione che descrive l'evoluzione di q conoscendo $p \in T_qM$. La parte dinamica su T^*Q è invece definita localmente da

$$\dot{p} = a_p(q, p) + F,$$

la quale descrive l'evoluzione di p conoscendo $F \in T_q^*M$.

Principio di Lagrange-D'Alembert. Il principio di Lagrange-D'Alembert, il quale già abbiamo introdotto in precedenza, fornisce una strada alternativa per descrivere un moto soggetto ad un campo di forze esterne F . In particolare, si vede che la soluzione del problema variazionale definito dal principio integrale di Lagrange-d'Alembert 3.2 sono i flussi del campo vettoriale X_L su TQ che soddisfano

$$\mathbf{i}_{X_L}\Omega_L - \mathbf{d}H_L + \pi_Q^*F(t) \equiv 0.$$

Come la (3.8), anche questa formulazione include al suo interno l'effetto dei vincoli olonomi. Per incorporare anche i vincoli anolonomi, vedremo che è necessario includere delle forze addizionali per assicurare che i vincoli siano soddisfatti.

Capitolo 4

Meccanica Lagrangiana dei sistemi anolonomi

Adesso che abbiamo introdotto brevemente le nozioni basilari relative all'aspetto geometrico della meccanica Lagrangiana, passiamo a studiare dei sistemi nei quali sono presenti anche i vincoli anolonomi. In particolare, come abbiamo già detto, ci soffermiamo a considerare esclusivamente il caso di vincoli Pfaffiani, ovvero di vincoli anolonomi indipendenti, lineari nelle velocità ed omogenei.

Prima di iniziare la nostra trattazione, accenniamo brevemente alla storia di questi vincoli. Infatti, nel tempo si è riscontrata una certa confusione sul problema se fosse possibile derivare le equazioni di moto da un principio variazionale, come si è soliti fare, ovvero se esistesse un funzionale definito sullo spazio delle curve da estremalizzare. Per i vincoli anolonomi, è rilevante se i vincoli vengono imposti prima o dopo aver considerato le variazioni. Quando si impongono i vincoli sulla classe di curve che saranno prese in esame, si ottengono delle equazioni che sono variazionali nel senso comune, e questo tipo di approccio è certamente appropriato per problemi di controllo ottimale. Tuttavia, da un punto di vista meccanico, il procedimento non è quello che è di rigore, come vedremo in seguito. In particolare, la strada corretta è quella di imporre i vincoli dopo aver considerato le variazioni, ovvero ricorrendo al principio di Lagrange-d'Alembert.

È un fatto fondamentale che il principio di Lagrange-d'Alembert può essere derivato dal bilancio delle forze e dei momenti agenti sul sistema. Questo elimina qualunque dubbio sul fatto che le corrette equazioni di moto per un sistema meccanico anolonomo siano date dal principio di Lagrange-d'Alembert, in quanto questo discende direttamente dalla Seconda legge di Newton.

Inoltre, osserviamo che i sistemi anolonomi possono essere suddivisi in due classi. Nella prima si raggruppano quei sistemi con *vincoli anolonomi dinamici*, ovvero vincoli conservati dalle equazioni di Eulero-Lagrange o di Hamilton, come il momento angolare o più in generale le mappe dei momenti. Chiaramente, i vincoli non sono imposti esternamente sul sistema, ma sono piuttosto una conseguenza delle equazioni di moto, e dunque è spesso conveniente trattarli come leggi di conservazione invece che come vincoli. D'altra parte, nella seconda classe, i *vincoli anolonomi cinematici* sono quelli imposti sulla cinematica del sistema, come ad esempio il vincolo di rotolamento.

4.1 Equazioni di moto

L'estensione delle equazioni di Lagrange per modellare sistemi con vincoli anolonomi lineari e scleronomi è stata ad esempio sviluppata in [14] e [19], e si fonda sul seguente argomento: supponiamo che il sistema sia soggetto a p vincoli sulle velocità, rappresentati dall'equazione

$$A(q)\dot{q} = 0,$$

dove, adesso, $A(q)$ è una matrice $p \times n$ e \dot{q} un vettore colonna.¹

Si consideri dunque uno spazio delle configurazioni Q con coordinate locali q^i , $i = 1, \dots, n$, ed una distribuzione \mathcal{D} su Q che descriva i vincoli cinematici anolonomi. La distribuzione è data specificando, per ogni $q \in Q$, un sottospazio lineare $\mathcal{D} \subset T_q Q$, definito come l'insieme di tutti i possibili *spostamenti virtuali* per ciascuna configurazione q . Ricordiamo che il sottospazio \mathcal{D}_q è definito come

$$\mathcal{D}_q = \{ \delta q \in T_q Q \mid A(q)\delta q = 0 \}.$$

La forza vincolare (generalizzata), la quale è vista come un vettore cotangente in q , si assume che appartenga all'*annihilator* dello spazio degli spostamenti virtuali. Dunque, F deve essere una combinazione lineare delle righe di $A(q)$, ovvero

$$F = \lambda A(q).$$

Questa ipotesi prende il nome di *principio anolonomo*.² Qui F è visto come un vettore riga, mentre λ un vettore riga i cui elementi sono detti *moltiplicatori di Lagrange*.³ Quindi, tali moltiplicatori di Lagrange rappresentano le forze dei vincoli anolonomi che agiscono sul sistema affinché questo si muova lungo le traiettorie permesse. Intrinsecamente, questo moltiplicatore λ è una sezione del fibrato cotangente nel punto $q(t)$ che annulla la distribuzione vincolare. Spesso i moltiplicatori di Lagrange vengono determinati sfruttando la condizione che $\dot{q}(t)$ appartenga alla distribuzione.

Questa condizione, dunque, si può riassumere nella seguente ipotesi: per ogni spostamento virtuale consistente con i vincoli, le forze dovute alle reazioni vincolari F_i non fanno lavoro, ovvero si assume che l'uguaglianza

$$F_1 \delta q^1 + F_2 \delta q^2 + \dots + F_n \delta q^n = 0$$

valga per ogni spostamento virtuale $\delta q^i \in \mathcal{D}_q$. Allora, da questo punto di vista, il sistema è equivalente ad un sistema olonomo con applicate forze esterne, pertanto possiamo impiegare le equazioni (3.3), ottenendo così

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i} = \lambda A(q), \quad A(q)\dot{q} = 0. \quad (4.1)$$

Si noti che si hanno n equazioni differenziali del secondo ordine, le quali possono anche essere riscritte come $2n$ equazioni del primo ordine, e p equazioni vincolari, le quali devono essere risolte per trovare le $2n + p$ incognite q , \dot{q} e λ .

Definizione 4.1. Le equazioni (4.1) vengono dette *equazioni anolonome* oppure *equazioni di Lagrange-d'Alembert* per un sistema meccanico con vincoli Pfaffiani sulle velocità.

Osservazione 4.1. È possibile mostrare che le equazioni di Lagrange-d'Alembert hanno la stessa forma della condizione $\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = 0$ sulle accelerazioni generalizzate per un'opportuna connessione affine sulla varietà Q , mentre la forza vincolare λ può essere interpretata come una 2-forma fondamentale generalizzata, come è noto che accade per i sistemi olonomi. Con questa forma delle equazioni, si possono aggiungere le forze esterne direttamente a destra delle equazioni (4.1), così che le equazioni hanno la forma della legge di Newton generalizzata.

¹In seguito studieremo $A(q)$ da un punto di vista intrinseco.

²Assumendo valido tale principio, risulta poi possibile dimostrare la conservazione dell'energia per i sistemi anolonomi, definendo questa come $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L(\dot{q}^i, q^i)$.

³Il nome di moltiplicatori di Lagrange è per certi versi inappropriato, in quanto λ non ha niente a che vedere con i moltiplicatori di Lagrange del teorema per l'ottimizzazione vincolata dell'analisi in più variabili. Tuttavia, si assume questa terminologia per ragioni storiche.

Tuttavia, un problema con la derivazione classica delle equazioni di Lagrange-d'Alembert, eseguita come sopra, risiede nel fatto che non sono date le dovute giustificazioni per il principio anolonomo, ovvero l'ipotesi che i vettori delle forze generalizzate annullano *tutti* i possibili spostamenti virtuali (nel caso di vincoli ideali, i quali non fanno lavoro). Con questa assunzione, l'energia totale del sistema è conservata, e certamente la conservazione dell'energia vale per molti sistemi con vincoli anolonomi.

La variazione dell'energia totale del sistema è equivalente al lavoro svolto dalle forze generalizzate, il quale è $\langle F, \dot{q} \rangle$. Pertanto, la conservazione dell'energia richiede solo che il lavoro svolto dalle forze generalizzate in ogni istante sia nullo, cioè si abbia $\langle F, \dot{q} \rangle = 0$. I vincoli assicurano che il vettore \dot{q} giaccia nello spazio dei possibili spostamenti in q , ma, e qui è il problema, *la conservazione dell'energia in sé non spiega perché il vettore delle forze generalizzate dovrebbe annullare tutti i possibili spostamenti virtuali.*

In ogni modo, c'è un consenso generale nel ritenere che le equazioni di Lagrange-d'Alembert forniscano un modello accurato per osservare il comportamento di sistemi fisici vincolati. La confusione che si produce riguardo a queste equazioni evidenzia, comunque, l'inadeguatezza della derivazione classica.

La risoluzione finale per questa situazione risulta piuttosto semplice: si può infatti ricavare il principio di Lagrange-d'Alembert da $F = ma$ assieme alla Terza legge di Newton e l'ipotesi che i vincoli non svolgano lavoro.

Problemi variazionali. Come abbiamo menzionato brevemente, le equazioni corrette per i sistemi meccanici anolonomi non sono letteralmente quelle variazionali. Comunque, l'approccio variazionale è molto indicato per problemi di *controllo ottimale*, dove si vuole per definizione ottimizzare una qualche funzione (spesso detta *funzione costo*). Diamo di seguito un breve riscontro di questo aspetto della meccanica anolonomia.

Per sviluppare quello che è il problema variazionale per sistemi anolonomi, sia $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una traiettoria del sistema vincolato, con $c(a) = q_0$ e $c(b) = q_1$. Indichiamo poi con

$$\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b]) = \left\{ c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid c \in C^2, c(a) = q_0, c(b) = q_1 \right\}$$

lo spazio delle curve due volte differenziabili nell'intervallo $[a, b]$ che assumono valori in \mathbb{R}^n ed estremi q_0 e q_1 . Sia infine $\mathcal{I}: \mathcal{C}(q_a, q_b, [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ l'azione integrale definita come

$$\mathcal{I}(q) = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

Sia $\tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1, [a, b])$ il sottoinsieme di $\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$ consistente nelle curve che soddisfano i vincoli. Allora si vede che le equazioni variazionali richiedono che la curva c sia un punto critico di $\mathcal{I}|_{\tilde{\mathcal{C}}^2}$.

Questa formulazione, in generale, porta a delle equazioni che sono *differenti* da quelle di Lagrange-d'Alembert (4.1), sebbene nel caso olonomo entrambe le formulazioni conducano alle stesse equazioni.

4.2 Il principio di Lagrange-d'Alembert

Una volta compiute le considerazioni di cui sopra, affrontiamo il problema da un punto di vista più generale. In particolare, si parte da uno spazio delle configurazioni Q . Consideriamo dunque una Lagrangiana $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$. Scegliamo poi su Q le coordinate generalizzate q^i , $i = 1, \dots, n$, le quali inducono sul fibrato tangente le coordinate (q^i, \dot{q}^i) , per cui possiamo scrivere, come in precedenza, la Lagrangiana $L(q^i, \dot{q}^i)$. Supponiamo quindi che i vincoli imposti sul sistema meccanico possano essere descritti globalmente da una sottovarietà M dello spazio delle fasi TQ .

Definizione 4.2. Un sistema Lagrangiano anolonomo su una varietà Q consiste della coppia (L, M) , dove L è la Lagrangiana del sistema ed M una sottovarietà di TQ .

In seguito assumiamo che $\tau_Q(M) = Q$. Il moto del sistema è quindi forzato a stare in M , ovvero le velocità permesse per il sistema Lagrangiano anolonomo sono quelle appartenenti proprio alla sottovarietà M . Questo richiede allora l'introduzione di reazioni vincolari inizialmente incognite.

Nel caso in cui M sia un sottofibrato vettoriale di TQ , stiamo trattando il caso particolare di vincoli lineari. Allora possiamo fare riferimento ad M indicandolo con \mathcal{D} . Inoltre, se questo sottofibrato corrisponde ad una distribuzione integrabile, ci siamo ridotti nuovamente al caso di vincoli olonomi.

In generale, \mathcal{D} è pertanto una distribuzione che descrive i vincoli cinematici che stiamo studiando. Dunque, \mathcal{D} è una collezione di sottospazi lineari $\mathcal{D}_q \subset T_qQ$, uno per ogni $q \in Q$. Una curva $c(t) \in Q$ si dice che *soddisfa i vincoli* se $\dot{c}(t) \in \mathcal{D}_{c(t)}$ per ogni t . Tale distribuzione sarà, di norma, non integrabile nel senso del teorema di Frobenius, ovvero i vincoli sono, di solito, anolonomi.

Se quindi \mathcal{F} indica una foliazione su Q definita da \mathbf{d} , per ogni condizione iniziale $v_q \in \mathcal{D}_q$, il problema si riduce a quello di un sistema libero che giace sul foglio di \mathcal{F} contenente q (e quindi con meno gradi di libertà del sistema iniziale).

La situazione sopra impostata descrive vincoli *lineari*; nel caso di vincoli *affini*, come ad esempio una palla su un piano ruotante, se M è un sottofibrato affine modellato su un fibrato vettoriale \mathcal{D} , si assume che esista un campo vettoriale globale $\gamma \in \mathfrak{X}(Q)$ tale che $v_q \in M_q$ se e soltanto se $v_q - \gamma(q) \in \mathcal{D}_q$.

In seguito tratteremo esclusivamente vincoli lineari, quindi lavoreremo sempre con la distribuzione \mathcal{D} . Inoltre, supponiamo valga il seguente principio:

Definizione 4.3 (Principio dei Lavori Virtuali). I vincoli anolonomi imposti su un sistema Lagrangiano anolonomo sono detto ideali se le reazioni vincolari associate ad essi non fanno lavoro per ogni spostamento virtuale del sistema.

Classicamente, un percorso *ammissibile* è una traiettoria del sistema consistente con i vincoli. Questo corrisponde alle curve $c: [a, b] \rightarrow Q$ le quali uniscono due punti in Q e che soddisfano i vincoli determinati da \mathcal{D} , ovvero i vettori tangenti alla curva appartengono a \mathcal{D} , $\dot{c}(t) \in \mathcal{D}_{c(t)}$. L'insieme di tutte le curve che siano due volte differenziabili viene indicato con

$$\tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1, [a, b]) = \left\{ c: [a, b] \rightarrow Q \mid c \in \mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b]), \dot{c}(t) \in \mathcal{D}_{c(t)} \right\}.$$

Osserviamo che $\tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1, [a, b])$ è un sottoinsieme di $\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$ introdotto nel capitolo precedente. Data poi una curva $c \in \tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1, [a, b])$, l'insieme di tutte le possibili variazioni virtuali lungo c è il seguente sottoinsieme di $T_c\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$:

$$\mathcal{V}_c = \left\{ X \in T_c\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b]) \mid X(t) \in \mathcal{D}_{c(t)}, \forall t \in [a, b] \right\}.$$

Le questioni rilevanti nel descrivere il comportamento dinamico di sistemi soggetti a vincoli ideali sono ottenute attraverso il principio di Lagrange-d'Alembert esposto di seguito.

Definizione 4.4 (principio di Lagrange-d'Alembert). Sia c un percorso ammissibile appartenente a $\tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1, [a, b])$. Allora c è un moto del sistema Lagrangiano anolonomo (L, \mathcal{D}) se

$$d\mathcal{I}(c)(X) = 0, \tag{4.2}$$

per ogni $X \in \mathcal{V}_c$.

Osservazione 4.2. Questa formulazione del principio di Lagrange-d'Alembert è anche conosciuta come principio di Hölder. Esiste anche una formulazione equivalente dovuta a Gauss, il principio del vincolo minimo di Gauss.

Osservazione 4.3. Notiamo che il principio di Lagrange-d'Alembert non è *propriamente* variazionale, poiché il moto del sistema anolonomo non è un punto critico di qualunque funzionale nel senso del calcolo delle variazioni. Se volessimo seguire un approccio variazionale alla dinamica dei sistemi Lagrangiani vincolati, dovremmo considerare la restrizione dell'azione \mathcal{I} alla sottovarietà $\tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1, [a, b])$ di $\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b])$, ovvero $\tilde{\mathcal{I}}: \tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1, [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ e estremalizzare questo funzionale.

Deriviamo adesso le equazioni di moto per un sistema anolonomo. Come spiegato in precedenza, con tale principio si effettuano le variazioni *prima* di aver imposto i vincoli, ovvero non si impongono i vincoli sulla famiglia di curve che definisce la variazione. Gli argomenti usuali del calcolo delle variazioni mostrano che questo principio variazionale vincolato è equivalente alle equazioni

$$-d\mathcal{I}(c)(X) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \delta q^i = 0, \quad (4.3)$$

per ogni variazione δq tale che $\delta q \in \mathcal{D}_q$ ad ogni punto della curva $q(t)$ sottostante.

Per capire la struttura delle equazioni (4.3) in maggior dettaglio, sia $\{\omega^a\}$ un insieme di p 1-forme indipendenti il cui annullarsi descrive i vincoli presenti sul sistema; cioè i vincoli su $\delta q \in Q$ sono definiti attraverso p condizioni

$$\omega^a(q) \cdot \delta q = 0, \quad a = 1, \dots, p.$$

Sfruttando il fatto che queste p 1-forme sono indipendenti, è possibile scegliere una base di coordinate locali tale che le 1-forme abbiano la struttura

$$\omega^a(q) = ds^a + A_\alpha^a(r, s) dr^\alpha, \quad a = 1, \dots, p, \quad (4.4)$$

dove $q = (r, s) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$. In altre parole, localmente stiamo scrivendo la distribuzione come

$$\mathcal{D} = \{ (r, s, \dot{r}, \dot{s}) \in TQ \mid \dot{s} + A_\alpha^a \dot{r}^\alpha = 0 \}.$$

Con questa scelta, i vincoli su $\delta q = (\delta r, \delta s)$ sono conferiti dalla condizione

$$\delta s^a + A_\alpha^a \delta r^\alpha = 0. \quad (4.5)$$

Le equazioni di moto per il sistema sono date dalla (4.3), dove si scelgono le variazioni $\delta q(t)$ tali che soddisfino i vincoli. Quindi, sostituendo la (4.5) nella (4.3) e sfruttando il fatto che δr è arbitrario, si ricavano

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} \right) = A_\alpha^a \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^a} - \frac{\partial L}{\partial s^a} \right), \quad \alpha = 1, \dots, n-p. \quad (4.6)$$

Le equazioni (4.6) combinate con le equazioni vincolari

$$\dot{s}^a = -A_\alpha^a \dot{r}^\alpha, \quad a = 1, \dots, p, \quad (4.7)$$

forniscono una descrizione completa delle *equazioni di moto* del sistema. Si noti che queste consistono in $n-p$ equazioni del secondo ordine e p equazioni del primo ordine.

Definizione 4.5. Si definisce la *Lagrangiana vincolata* L_c come quella ottenuta sostituendo nella Lagrangiana i vincoli, ovvero

$$L_c(r^\alpha, s^a, \dot{r}^\alpha) = L(r^\alpha, s^a, \dot{r}^\alpha, -A_\alpha^a(r, s) \dot{r}^\alpha).$$

Allora, vediamo come le equazioni di moto (4.6) possono essere scritte in funzione della Lagrangiana vincolata. Si considerino le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_c}{\partial \dot{r}^\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} - A_\alpha^b \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b}, \\ \frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} \left(\frac{\partial A_\beta^b}{\partial r^\alpha} \dot{r}^\beta \right), \\ \frac{\partial L_c}{\partial s^a} &= \frac{\partial L}{\partial s^a} - \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} \left(\frac{\partial A_\beta^b}{\partial s^a} \dot{r}^\beta \right),\end{aligned}$$

e quindi sostituendo L_c nelle equazioni di Lagrange anolonome (4.3) si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^a \frac{\partial L_c}{\partial s^a} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} - A_\alpha^b \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} \right) - \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} \frac{\partial A_\beta^b}{\partial r^\alpha} \dot{r}^\beta + \\ &+ A_\alpha^a \frac{\partial L}{\partial s^a} - A_\alpha^a \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} \frac{\partial A_\beta^b}{\partial s^a} \dot{r}^\beta = \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} \right) - A_\alpha^a \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^a} - \frac{\partial L}{\partial s^a} \right) - \frac{d}{dt} A_\alpha^b \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} \frac{\partial A_\beta^b}{\partial r^\alpha} \dot{r}^\beta - A_\alpha^a \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} \frac{\partial A_\beta^b}{\partial s^a} \dot{r}^\beta = \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} \right) - A_\alpha^a \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^a} - \frac{\partial L}{\partial s^a} \right) + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} \left(\frac{\partial A_\beta^b}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial r^\beta} + A_\beta^a \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial s^a} - A_\alpha^a \frac{\partial A_\beta^b}{\partial s^a} \right) \dot{r}^\beta.\end{aligned}$$

Pertanto si ottengono le equazioni

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^a \frac{\partial L_c}{\partial s^a} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} B_{\alpha\beta}^b \dot{r}^\beta,$$

dove

$$B_{\alpha\beta}^b = \left(\frac{\partial A_\alpha^b}{\partial r^\beta} - \frac{\partial A_\beta^b}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^a \frac{\partial A_\beta^b}{\partial s^a} - A_\beta^a \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial s^a} \right).$$

Osservazione 4.4. Per il calcolo degli elementi $B_{\alpha\beta}^b$, si vede facilmente che quando i due pedici hanno lo stesso valore allora l'elemento corrispondente è nullo, ovvero $B_{\alpha\alpha}^b = 0$; quando invece scambiamo tra loro i due pedici l'elemento cambia segno, cioè $B_{\alpha\beta}^b = -B_{\beta\alpha}^b$.

Osservazione 4.5. Si osservi che L_c è una Lagrangiana *degenere* nel senso che non dipende da \dot{s} . Si noti anche che pensare s come una variabile ciclica non conduce alle leggi di conservazioni nel modo usuale a causa dei vincoli.

Sia quindi $d\omega^b$ la derivata esterna di ω^b , allora risulta che

$$\begin{aligned}d\omega^b &= d(ds^b + A_\alpha^b dr^\alpha) = \\ &= \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial r^\beta} dr^\beta \wedge dr^\alpha - \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial s^a} A_\beta^a dr^\beta \wedge dr^\alpha.\end{aligned}$$

Contraendo poi $d\omega^b$ con \dot{q} si ricava

$$\begin{aligned}d\omega^b(\dot{q}, \cdot) &= \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial r^\beta} \dot{r}^\beta dr^\alpha - \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial s^a} A_\beta^a \dot{r}^\beta dr^\alpha - \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial r^\beta} \dot{r}^\alpha dr^\beta + \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial s^a} A_\beta^a \dot{r}^\alpha dr^\beta = \\ &= \left(\frac{\partial A_\beta^b}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial r^\beta} + A_\beta^a \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial s^a} - A_\alpha^a \frac{\partial A_\beta^b}{\partial s^a} \right) \dot{r}^\beta dr^\alpha = \\ &= B_{\alpha\beta}^b \dot{r}^\beta dr^\alpha.\end{aligned}$$

Infine, sfruttando questi due calcoli, possiamo scrivere le equazioni di moto del sistema vincolato come

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^a \frac{\partial L_c}{\partial s^a} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} \mathbf{d}\omega^b(\dot{q}, \delta q). \quad (4.8)$$

Questo modo di scrivere le equazioni evidenzia l'azione dei vincoli. Infatti, il membro a sinistra della (4.8) risulta essere la derivata variazionale della Lagrangiana vincolata, mentre il membro a destra consiste delle forze che mantengono i vincoli. Inoltre si vede che, nel caso particolare in cui i vincoli siano olonomi, si ha $\mathbf{d}\omega^b = 0$ in quanto $\mathbf{d}\omega^b$ rappresenta la curvatura e la curvatura misura la mancanza di integrabilità dei vincoli. Le equazioni (4.8) allora si riducono alle equazioni di Eulero-Lagrange di seconda specie per sistemi olonomi, per i quali è quindi appropriato tenere conto subito dei vincoli.

4.2.1 Formulazione intrinseca delle equazioni

Introdotta il linguaggio delle connessioni di Ehresmann, vediamo come interpretare i calcoli svolti in precedenza in coordinate. In seguito, ci interesseremo solo di sistemi con vincoli omogenei, tralasciando il caso affine.⁴

Supponiamo di aver scelto un fibrato ed una connessione di Ehresmann A su questo fibrato tali che la distribuzione vincolare \mathcal{D} sia data dal sottofibrato orizzontale associato ad A . In altre parole, si suppone che la connessione A sia scelta in modo che i vincoli siano scritti nella forma $A \cdot \dot{q} = 0$.

Osservazione 4.6. Si noti che questo è un modo intrinseco per scrivere i vincoli ed insieme un modo di pensare la collezione di 1-forme che abbiamo già impiegato nella descrizione in coordinate.

In queste coordinate possiamo scegliere il fibrato in modo tale che sia dato in coordinate dalla mappa $(s, r) \mapsto r$, mentre la connessione è definita, per questa scelta delle coordinate, dagli stessi vincoli. Come abbiamo affermato in precedenza, non è questa l'unica scelta possibile del fibrato, sebbene questa sorta di ambiguità sia talvolta rimossa quando si trattino sistemi simmetrici.

Usando il linguaggio delle connessioni, la *Lagrangiana vincolata* può essere scritta come

$$L_c(q, \dot{q}) = L(q, \text{hor } \dot{q}),$$

ed inoltre abbiamo il seguente

Teorema 4.1. *Le equazioni di Lagrange-d'Alembert possono essere scritte come*

$$\delta L_c = \langle \mathbb{F}L, B(\dot{q}, \delta q) \rangle,$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica la coppia di un vettore con un vettore duale, mentre

$$\delta L_c = \langle \delta q^\alpha, \frac{\partial L_c}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}^\alpha} \rangle,$$

nel quale δq è una variazione orizzontale (ovvero prende valori nello spazio orizzontale), e B è la curvatura vista come una 2-forma a valori verticali, oltre alle equazioni vincolari

$$A(q)\dot{q} = 0.$$

Questo teorema deriva dal fatto che i vincoli impongono delle restrizioni su \dot{q} e che il principio di Lagrange-d'Alembert richiede che δq sia orizzontale. La formulazione dipende dal particolare tipo di connessione, pur essendoci delle libertà nella scelta di tale connessione. Tuttavia, quando siamo in presenza di un gruppo di simmetria G , esiste un fibrato naturale con il quale si può lavorare e sul quale possiamo prendere una connessione, ovvero il fibrato quoziente $Q \rightarrow Q/G$.

⁴Una trattazione approfondita del caso affine può essere trovata in [5] e [6].

4.2.2 Equazioni di moto con i moltiplicatori di Lagrange

Un altro modo di ottenere le equazioni di moto per sistemi anolonomi è quello di ricorrere ai moltiplicatori di Lagrange a partire dal principio di Lagrange-d'Alembert.⁵

Si ricordi che dal principio di Lagrange-d'Alembert (4.3) si ottiene

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \delta q^i = 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

con le variazioni $\delta q^1 \in \mathcal{D}$, ovvero le variazioni appartengono alla distribuzione vincolare. Inoltre, riprendiamo la scrittura dei vincoli su δq^i come

$$\sum_{i=1}^n a_i^j \delta q^i = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

dove a_i^j è una matrice $p \times n$ i cui elementi dipendono da q . Quindi moltiplichiamo ciascuna di queste equazioni per una quantità λ_j , la quale, in generale, non è nulla, e poi sommiamo le espressioni risultanti. In questo modo, banalmente si trova che

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \lambda_j a_i^j \delta q^i = 0.$$

Pertanto, possiamo aggiungere questo termine alle equazioni di Lagrange-d'Alembert una volta sommate tra loro, in modo da ottenere

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^p \lambda_j a_i^j \right) \delta q^i = 0. \quad (4.9)$$

Assumere che i nostri vincoli siano indipendenti implica che uno dei $p \times p$ minori della matrice a_i^j di dimensioni $p \times n$ deve essere diverso da zero. Si suppone che questo sia dato per gli indici che vanno da 1 a p . Possiamo poi assumere che le variazioni $\delta q^{p+1}, \dots, \delta q^n$ sono arbitrarie (e questi sono proprio i gradi di libertà del sistema), in quanto le equazioni vincolari possono essere soddisfatte scegliendo valori risultanti definiti per le variazioni $\delta q^1, \dots, \delta q^p$.

Si possono successivamente scegliere i valori dei moltiplicatori di Lagrange in modo che l'espressione in parentesi nella (4.9) sia nulla per ogni variazione dipendente $\delta q^1, \dots, \delta q^p$. Questo implica la risoluzione di un sistema lineare di equazioni algebriche nelle incognite λ_j , il quale è risolubile in virtù della nostra ipotesi sulla matrice a_i^j .

Una volta fatto ciò, le equazioni (4.9) diventano

$$\sum_{i=p+1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^p \lambda_j a_i^j \right) \delta q^i = 0,$$

dove le variazioni sono adesso indipendenti. Dunque, ciascun termine in parentesi deve anche essere nullo indipendentemente dagli altri. Mettendo infine insieme le osservazioni per le variabili dipendenti e quelle indipendenti, si ottiene un insieme di n equazioni

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^p \lambda_j a_i^j,$$

le quali assieme alle p equazioni vincolari permettono la completa risoluzione del sistema.

⁵Una trattazione più approfondita del metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ritrova in [19].

Capitolo 5

Caratteristiche geometriche della bicicletta

Una volta introdotti brevemente i sistemi anolonomi e visto come ricavare le relative equazioni di moto, ci focalizziamo sullo studio della dinamica ed il controllo della bicicletta. Nel presente capitolo si introduce la giusta terminologia e si definisce la geometria del biciclo.

5.1 Il modello

Quando studiamo un qualunque fenomeno o sistema reale in forma astratta, bisogna costruire un modello matematico, il quale verrà successivamente modellizzato attraverso gli strumenti di cui si dispone. Nel caso oggetto della presente indagine, pertanto, è necessario in primo luogo stabilire il modello che si vuole impiegare nell'analisi del sistema, fissando, in base all'osservazione diretta di una generica bicicletta reale, i parametri geometrici caratterizzanti e le forze che influiscono sul moto della stessa.

Si consideri quindi la bicicletta schematizzata in figura 5.1, la quale si muove su di un piano orizzontale. Si assume che i due pneumatici siano dei tori perfettamente rigidi a sezione circolare rispettivamente di raggio r per la ruota posteriore ed r_a per quella anteriore. La bicicletta risulta così essere composta da quattro corpi rigidi uniti tra loro attraverso tre giunti rotoidali:

- la *ruota posteriore*;
- il *retrotreno*, costituito dal telaio, dal sellino e dal gruppo di trasmissione della potenza; in seguito, con un abuso di terminologia, faremo riferimento a tale componente chiamandolo anche solo telaio;
- l'asse dello sterzo, detto brevemente *sterzo* oppure *avantreno*;
- la *ruota anteriore*.

Due giunti rotoidali uniscono con il telaio e lo sterzo rispettivamente la ruota posteriore e quella anteriore, mentre il terzo giunto connette il telaio allo sterzo. In seguito indicheremo i giunti rotoidali con la lettera del punto nel quale sono montati.

La ruota posteriore ed il retrotreno costituiscono la *parte posteriore* della bicicletta, mentre lo sterzo e la ruota anteriore la *parte anteriore*. Individuiamo quindi un primo piano, detto *piano posteriore*, che contenga la ruota posteriore e, per come è montato il giunto B , anche il telaio, mentre un secondo, nel quale giacciono sia la ruota anteriore sia lo sterzo, è chiamato solitamente *piano anteriore*. Inoltre, l'intersezione del piano posteriore con il piano del terreno determina la cosiddetta *linea di contatto* (in inglese, *contact line*).

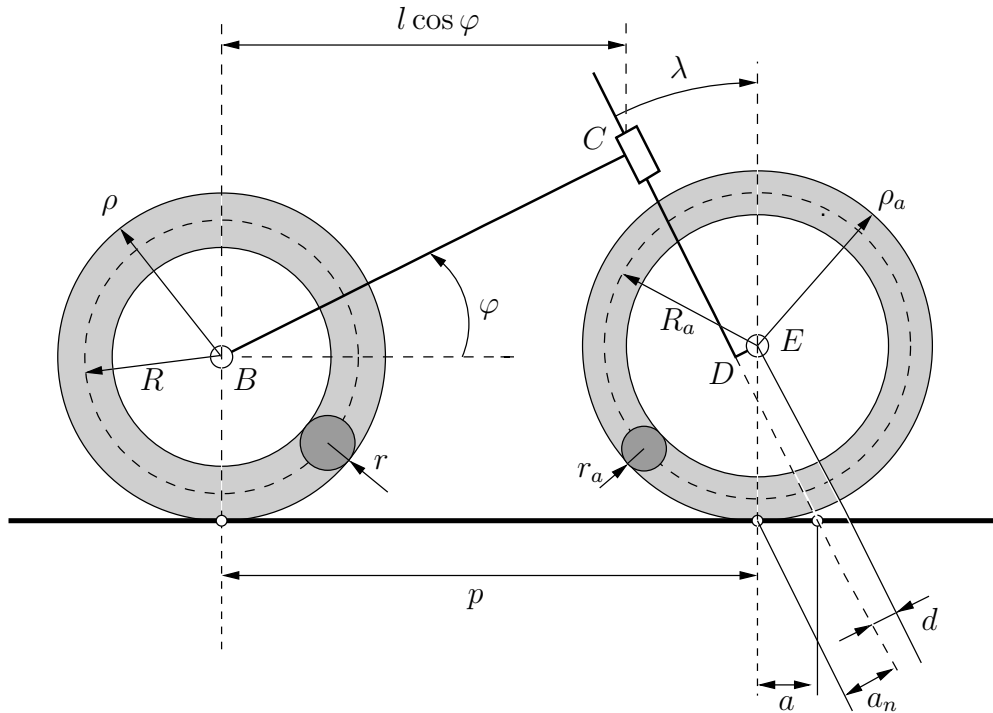


Figura 5.1: Modello di bicicletta.

Definizione 5.1. Si dice che il sistema si trova nella *configurazione banale* quando il piano posteriore risulta parallelo a quello anteriore ed entrambi sono ortogonali al piano orizzontale del terreno.

A questo punto, facendo riferimento alla configurazione banale, è possibile definire i parametri geometrici che caratterizzano la bicicletta e ne individuano completamente la struttura meccanica. Quindi, come riportato in figura 5.1, indichiamo con R ed R_a rispettivamente i raggi medi del toro posteriore e di quello anteriore, mentre con r ed r_a i corrispondenti raggi della sezione torica dello pneumatico posteriore ed anteriore. Tuttavia, in pratica risulta più facile misurare i raggi delle due ruote, quindi se indichiamo con ρ quello della ruota posteriore e con ρ_a quello della ruota anteriore, otteniamo le due relazioni

$$\rho = (R + r), \quad \rho_a = (R_a + r_a),$$

le quali, conoscendo due di questi parametri per ciascuna ruota, permettono di ricavare il terzo.

Indichiamo poi con p il *passo* della bicicletta, ovvero la distanza che intercorre tra i punti di contatto delle due ruote, mentre con d il disassamento della forcella (in inglese, *fork offset*), dato dalla distanza tra l'asse dello sterzo ed il centro della ruota anteriore; nel modello considerato, assumiamo che il segmento \overline{DE} determinante l'*offset* sia sempre normale all'asse dello sterzo.

Osserviamo quindi che il passo p non risulta costante, ma è variabile con la configurazione della bicicletta. Pertanto, in seguito faremo riferimento alla distanza l che intercorre tra il centro della ruota posteriore ed il giunto rotoidale C . Quando la bicicletta si trova nella posizione banale, questa distanza può essere messa facilmente in relazione al passo, ma prima è necessario introdurre alcuni parametri caratterizzanti il sistema.

Con riferimento alla figura 5.2, l'angolo λ tra la verticale e l'asse di rotazione dello sterzo viene detto *caster angle*; talvolta, si fa anche riferimento al suo complementare, detto *angolo di testa*. Indichiamo invece con φ l'angolo formato tra l'asse passante per il centro della ruota posteriore parallelo alla linea di contatto e l'asse coincidente con il segmento \overline{BC} , anche se al fine pratico

possiamo sceglierlo affinché il centro di massa del telaio giaccia su tale segmento. Questo angolo rappresenta il beccheggio della bicicletta nella configurazione banale. Si definisce quindi il *caster angle ridotto* l'angolo $\varepsilon = \lambda - \varphi$, il quale svolge un ruolo importante nell'analisi della bicicletta.

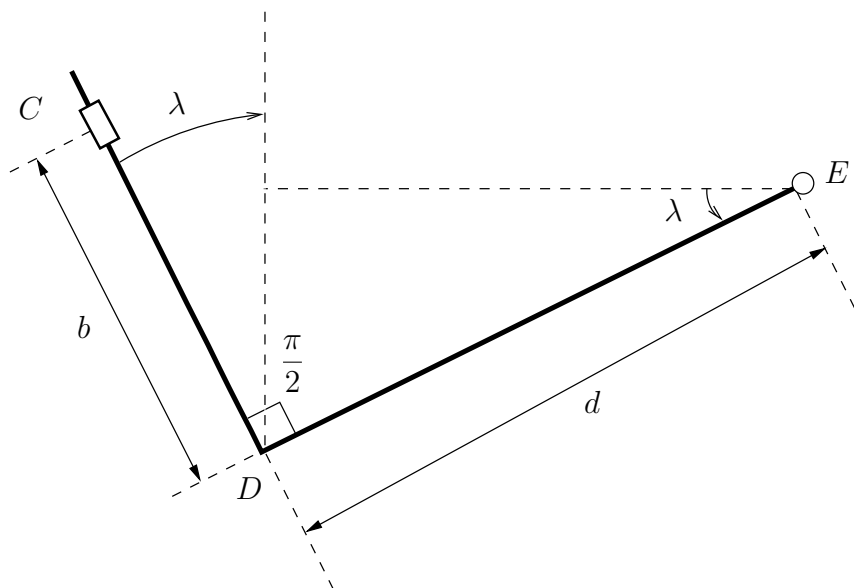


Figura 5.2: Schema dettaglio della forcella della bicicletta.

Infine, detta h la lunghezza totale dell'asse dello sterzo, indichiamo con b la parte corrispondente al segmento \overline{CD} , la quale identifica l'*abbassamento della forcella* e svolge un ruolo importante per i calcoli svolti nei prossimi capitoli. A questo punto, è poi facile verificare che il passo p , nella configurazione banale, risulta essere dato dalla relazione

$$p = l \cos \varphi + b \sin \lambda + d \cos \lambda.$$

Spendiamo adesso qualche parola sull'avancorsa, la quale viene spesso studiata in letteratura, soprattutto per quanto riguarda gli effetti che produce sulla stabilità della bicicletta. Per come abbiamo introdotto i parametri geometrici nella sezione precedente e facendo riferimento alla figura 5.1, quando la bicicletta si trova nella configurazione banale è chiaro che l'*avancorsa* risulta essere

$$a = \rho_a \tan \lambda - \frac{d}{\cos \lambda}.$$

Questa viene anche detta *avancorsa meccanica* per essere distinta dall'*avancorsa normale*, la quale corrisponde invece alla distanza condotta perpendicolarmente tra il punto di contatto della ruota anteriore con il terreno e l'asse di rotazione dello sterzo, pari a

$$a_n = \rho_a \sin \lambda - d.$$

Risulta evidente che queste due grandezze sono tra loro correlate, essendo $a_n = a \cos \varepsilon$. In conclusione, l'*avancorsa meccanica*, così come quella normale, sono derivate dagli altri parametri geometrici presi in considerazione. La scelta fatta in questo lavoro circa i parametri a cui dare maggiore importanza è solo di carattere pratico, in quanto risulta più immediato, per come sono stati svolti i calcoli in seguito, variare ad esempio il *caster angle* oppure l'*offset* invece dell'*avancorsa*.

5.2 Sistemi di riferimento e matrici di rotazione

Una volta definite le grandezze geometriche caratteristiche, si introducono i sistemi di riferimento rispetto ai quali viene determinata la generica configurazione della bicicletta. In particolare, abbiamo un sistema di riferimento inerziale e diversi sistemi solidali ai vari corpi rigidi che compongono il sistema meccanico. Il sistema inerziale $\Sigma = (O; X, Y, Z)$ viene fissato con l'asse X coincidente con la linea di contatto quando la bicicletta si trova nella configurazione banale, mentre l'origine può essere scelta in un punto qualunque di tale asse. L'asse Z , invece, si assume normale al piano del terreno e diretto verso l'alto (ovvero verso opposto a quello della gravità), mentre l'asse Y viene determinato in modo che la terna soddisfi la regola della mano destra.

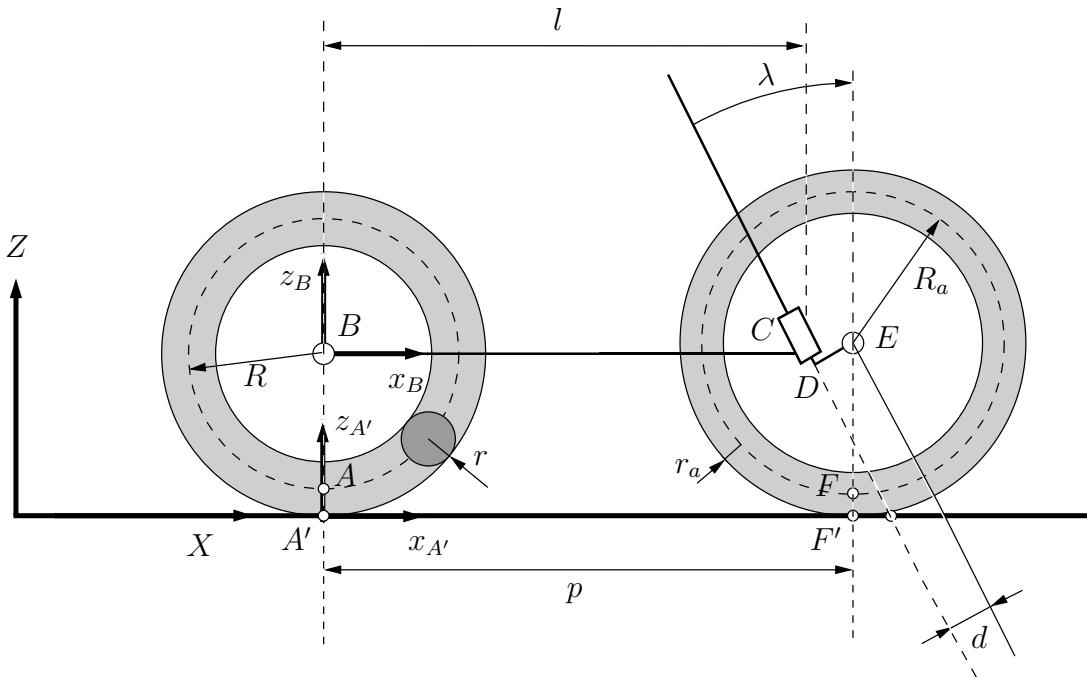


Figura 5.3: Sistemi di riferimento adottati nella bicicletta per $\varphi = 0$.

Per quanto riguarda i sistemi solidali, con riferimento alla schematizzazione della bicicletta riportata in figura 5.3, scegliamo un primo sistema $S_B = (B; x_B, y_B, z_B)$ solidale al telaio con l'origine nel punto B , l'asse x_B parallelo alla linea di contatto e l'asse z_B normale al terreno quando il sistema si trova nella configurazione banale. Osserviamo quindi che il sistema di riferimento S_B non risente della rotazione propria della ruota, in quanto il giunto rotoidale in B non trasmette tale rotazione al telaio.

Tuttavia, quando si deve calcolare la velocità angolare della ruota posteriore e l'energia cinetica rotazionale della stessa, è necessario tener conto anche di tale moto rotatorio. Pertanto, indichiamo con $S_{Br} = (B; x_{Br}, y_{Br}, z_{Br})$ il sistema di riferimento solidale alla ruota che si muove con essa.

Prendiamo poi un sistema di riferimento $S'_A = (A'; x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$ con l'origine nel punto di contatto, l'asse $z_{A'}$ normale al terreno, dunque passante per i punti A' ed A , e l'asse $x_{A'}$ parallelo all'asse X . Un ulteriore sistema di riferimento, indicato con $S_A = (A; x_A, y_A, z_A)$, viene fissato sulla ruota con l'origine in A , l'asse x_A sempre parallelo ad X ; ma l'asse z_A adesso risulta passante per i punti A e B .

Per la parte anteriore, si considera invece il sistema di riferimento $S_D = (D; x_D, y_D, z_D)$ con l'origine nel punto più basso della forcella, l'asse z_D lungo lo sterzo diretto verso l'alto e l'asse x_D preso lungo il segmento \overline{DE} .

Solidali alla ruota anteriore, inoltre, si adottano altri quattro sistemi di riferimento in modo analogo a quanto fatto per quella posteriore.

In particolare, abbiamo i sistemi $S_E = (E; x_E, y_E, z_E)$ e $S_{Er} = (E; x_{Er}, y_{Er}, z_{Er})$ presi con l'origine nel centro della ruota anteriore e gli assi in modo analogo a quanto fatto per quella posteriore. Pertanto, il primo dei due sistemi di riferimento non risente della rotazione propria della ruota, e quindi risulta orientato nello stesso modo di S_D ; il secondo, invece, rimane solidale alla ruota girando con essa.

Infine, si definisce il sistema $S_F = (F; x_F, y_F, z_F)$ con asse z_F passante per i punti F ed E , mentre $S_{F'} = (F'; x_{F'}, y_{F'}, z_{F'})$ con l'asse $z_{F'}$ passa per i punti F' ed F . Per entrambi i due sistemi l'asse x è preso parallelo all'asse X nella configurazione banale. Osserviamo quindi che l'asse $z_{F'}$, così come l'asse $Z_{A'}$ del sistema $S_{A'}$, rimane sempre normale al piano del terreno; questo è dovuto al fatto che i tori sono rigidi e a sezione circolare, per cui la distanza minima tra il punto di contatto della ruota con il terreno ed il centro della sezione torica è sempre il raggio di tale sezione, ortogonale al suolo per questioni di tangenza.

Dopo aver definito i sistemi di riferimento, intendiamo adesso determinare gli angoli di Eulero necessari per passare dall'orientamento proprio di un sistema di riferimento a quello caratteristico di un altro. In questo modo si determina un insieme di trasformazioni che saranno in seguito impiegate per lo studio della cinematica della bicicletta.

Si analizzi dunque la bicicletta in una configurazione generica nello spazio ambiente. Rispetto al sistema di riferimento inerziale, siano quindi $A' = (x, y, 0)^T$ le coordinate del punto di contatto della ruota posteriore sul piano del terreno, considerato appunto $z = 0$ il piano orizzontale su cui giace il punto di contatto: in seguito supporremo che la bicicletta si muova su tale piano orizzontale; in caso contrario sarebbe necessario introdurre una funzione che descriva l'andamento altimetrico della strada.

La linea di contatto, invece, non risulta più coincidente con l'asse X come nella configurazione banale, ma determina un angolo con tale asse. In particolare, il sistema di riferimento $S_{A'}$ appare ruotato rispetto a quello inerziale attorno all'asse Z di un angolo θ , detto *angolo di imbardata*, e misurato a partire dall'asse X con verso concorde alla regola della mano destra. In seguito, tutti gli angoli saranno presi positivi secondo tale regola. In sostanza, il passaggio dal sistema inerziale a quello solidale in A' è descritto dalla matrice di rotazione

$$\mathcal{R}_{A'} = \mathcal{R}_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Osservazione 5.1. Osserviamo che la matrice (5.1), così come tutte le matrici di rotazione che saranno introdotte in seguito, ruota il sistema di riferimento invece dei vettori. Trasformazioni di questo tipo sono dette *alias*, mentre quelle che, ruotando i vettori, lasciano invariati gli assi, sono dette *alibi*. Nella figura 5.4 è mostrata l'azione dei due tipi di trasformazione su un vettore nel piano.

L'angolo che il piano posteriore forma con quello normale al terreno prende invece il nome di *angolo di rollio* ed indicato con α . Osserviamo quindi che l'angolo di rollio può assumere valori solo nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, altrimenti la bicicletta compenetrerebbe il terreno. In realtà, questo intervallo è teorico, in quanto la presenza dei pedali e del manubrio lo riduce ulteriormente. Tuttavia, ai fini teorici, ci basta sapere che il coseno dell'angolo di rollio non si annulla in nessun caso.

Osserviamo inoltre che il sistema di riferimento S_A viene ottenuto da $S_{A'}$ per mezzo di una rotazione attorno all'asse $x_{A'}$ pari all'angolo di rollio.¹ Tuttavia, per motivi pratici, conviene

¹Si può dimostrare che il sistema di riferimento solidale alla ruota viene ottenuto per mezzo di due sole rotazioni, senza essere così necessario introdurre un'ulteriore rotazione attorno l'asse y_A .

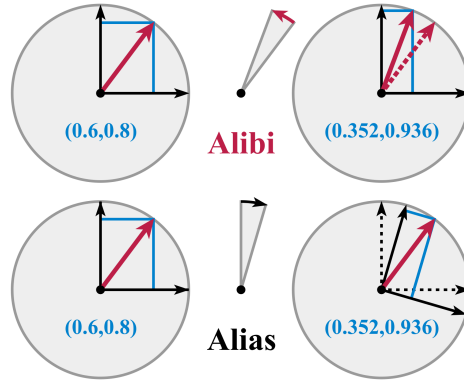


Figura 5.4: Esempio di rotazioni *alibi* ed *alias* nel piano.

prendere l'opposto dell'angolo di rollio, ovvero $\alpha \mapsto -\alpha$, in modo che si abbia un angolo positivo quando la bicicletta si inclina verso sinistra. Allora, la matrice di rotazione è data da

$$\mathcal{R}_2(-\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\alpha) & \text{sen}(-\alpha) \\ 0 & -\text{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Passando poi al telaio, il giunto rotoidale in B permette una rotazione rispetto alla ruota posteriore attorno all'asse y_B . Tale rotazione viene descritta dall'*angolo di beccheggio* μ , il quale, per ragioni pratiche, viene anch'esso preso con segno opposto, ovvero si ha $\mu \mapsto -\mu$. Pertanto, in una configurazione generica, il passaggio dal sistema di riferimento S_A ad S_B è dato dalla matrice di rotazione

$$\mathcal{R}_3(-\mu) = \begin{pmatrix} \cos(-\mu) & 0 & -\text{sen}(-\mu) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(-\mu) & 0 & \cos(-\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu & 0 & \text{sen} \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \mu & 0 & \cos \mu \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Osservazione 5.2. Notiamo che, secondo la definizione dell'angolo μ , questo angolo tiene conto sia della componente variabile sia del beccheggio costante nella configurazione banale, ovvero, in tale configurazione, risulta $\mu = \varphi$.

Per quanto riguarda lo sterzo, vediamo che il giunto C permette una rotazione dell'asse dello sterzo attorno a z_D , dunque si introduce appunto quello che viene chiamato comunemente *angolo di sterzo* ed indicato con $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pertanto, la matrice di rotazione associata a questa trasformazione risulta essere

$$\mathcal{R}_4(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Osserviamo quindi che, in seguito alla precedente scelta fatta a proposito dell'angolo α , l'angolo ψ e lo stesso angolo α hanno lo stesso segno quando comportano una rotazione della bicicletta dalla stessa parte. Inoltre, nella configurazione banale, l'asse z_D risulta inclinato rispetto alla verticale del *caste angle* ridotto ε , dunque quando andiamo a comporre le singole matrici di rotazione, si deve tener conto di questo fatto, introducendo un'ulteriore rotazione di $-\varepsilon$ attorno ad y_B , ovvero otteniamo

$$\mathcal{R}'(-\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(-\varepsilon) & 0 & -\text{sen}(-\varepsilon) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(-\varepsilon) & 0 & \cos(-\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & 0 & \text{sen} \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{pmatrix}.$$

5.2.1 Composizione delle matrici di rotazione

Ora che abbiamo espresso tutte le singole rotazioni che entrano in gioco nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, dobbiamo comporre tra di loro le matrici per ottenere la matrice di trasformazione finale, che permette di passare dal sistema di riferimento inerziale ai vari sistemi solidali.

Osservazione 5.3. Notiamo che le rotazioni introdotte sono tutte espresse in *terna corrente*, ovvero rispetto alla terna che si ottiene a seguito di ogni singola trasformazione (la prima coincide con la terna inerziale). Pertanto, al fine di ricavare le matrici di trasformazione per passare Σ ai diversi sistemi solidali, è necessario impiegare la legge di composizioni di rotazioni successive in terna corrente. Nel caso generale in cui si abbiano n terne distinte, ognuna legata alla precedente da una matrice R_i^{i-1} , $i = 1, \dots, n$, ricordiamo che la matrice di rotazione complessiva si ricava per mezzo della composizione:

$$R_n^0 = R_n^{n-1} R_{n-1}^{n-2} \dots R_2^1 R_1^0,$$

precisando appunto che abbiamo considerato trasformazioni *alias*.

In base alla precedente osservazione, andiamo quindi a determinare le matrici di trasformazioni cercate. La trasformazione diretta per passare da Σ ad S_A (sempre a meno di traslazioni) può essere espressa nella forma

$$\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_2(-\alpha)\mathcal{R}_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\cos \alpha \sin \theta & \cos \alpha \cos \theta & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha \sin \theta & \sin \alpha \cos \theta & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Questa matrice di rotazione esprime i versori solidali alla ruota in funzione di quelli inerziali e viceversa, tuttavia non considerando la rotazione propria della ruota. Sia quindi χ l'angolo che identifica la *rotazione propria* della ruota posteriore, il quale si misura a partire da un qualunque raggio della ruota e si assume nullo nella configurazione banale. Allora, il sistema S_{Br} è individuato da quello inerziale attraverso la trasformazione

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{Br} &= \mathcal{R}_{y_B}(\chi)\mathcal{R}_2(-\alpha)\mathcal{R}_1(\theta) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \theta + \sin \alpha \sin \chi \sin \theta & \cos \chi \sin \theta - \sin \alpha \sin \chi \cos \theta & -\cos \alpha \sin \chi \\ -\cos \alpha \sin \theta & \cos \alpha \cos \theta & -\sin \alpha \\ \sin \chi \cos \theta - \sin \alpha \cos \chi \sin \theta & \sin \chi \sin \theta + \sin \alpha \cos \chi \cos \theta & \cos \alpha \cos \chi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

dove la rotazione $\mathcal{R}_{y_B}(\chi)$ viene effettuata attorno all'asse y_B solidale.

Il sistema di riferimento solidale al telaio, invece, può essere ottenuto a partire da quello inerziale, componendo la matrice (5.3) con (5.2), e così ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_B &= \mathcal{R}_3(-\mu)\mathcal{R}_2(-\alpha)\mathcal{R}_1(\theta) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \mu \cos \theta - \sin \alpha \sin \mu \sin \theta & \cos \mu \sin \theta + \sin \alpha \sin \mu \cos \theta & \cos \alpha \sin \mu \\ -\cos \alpha \sin \theta & \cos \alpha \cos \theta & -\sin \alpha \\ -\sin \mu \cos \theta - \sin \alpha \cos \mu \sin \theta & -\sin \mu \sin \theta + \sin \alpha \cos \mu \cos \theta & \cos \alpha \cos \mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Infine, rimane da ricavare la matrice di rotazione caratteristica dello sterzo, ovvero quella che descrive l'orientamento di S_D a partire da Σ . Questa matrice di rotazione associata alla parte anteriore risulta tuttavia piuttosto complicata, in quanto si ottiene combinando tra loro ben cinque rotazioni. È anche vero che le due rotazioni attorno ad y_B possono essere considerate assieme, per

cui, in conclusione, si ricava la matrice

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D &= \mathcal{R}_4(\psi)\mathcal{R}_3(-\mu - \varepsilon)\mathcal{R}_2(-\alpha)\mathcal{R}_1(\theta) = \\ &= \begin{pmatrix} c_\psi(c_{\mu+\varepsilon}c_\theta - s_\alpha s_{\mu+\varepsilon} s_\theta) - c_\alpha s_\psi s_\theta & c_\psi(c_{\mu+\varepsilon} s_\theta + s_\alpha s_{\mu+\varepsilon} c_\theta) + c_\alpha s_\psi c_\theta & c_\alpha s_{\mu+\varepsilon} c_\psi - s_\alpha s_\psi \\ s_\psi(s_\alpha s_{\mu+\varepsilon} s_\theta - c_{\mu+\varepsilon} c_\theta) - c_\alpha c_\psi s_\theta & c_\alpha c_\psi c_\theta - s_\psi(c_{\mu+\varepsilon} s_\theta + s_\alpha s_{\mu+\varepsilon} c_\theta) & -c_\alpha s_{\mu+\varepsilon} s_\psi - s_\alpha c_\psi \\ -s_{\mu+\varepsilon} c_\theta - s_\alpha c_{\mu+\varepsilon} s_\theta & -s_{\mu+\varepsilon} s_\theta + s_\alpha c_{\mu+\varepsilon} c_\theta & c_\alpha c_{\mu+\varepsilon} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7)$$

dove abbiamo indicato con c ed s le abbreviazioni di \cos e \sin rispettivamente. In base a quanto affermato in precedenza, questa matrice caratterizza anche il sistema di riferimento S_E .

Tuttavia, a causa della complessità della matrice \mathcal{R}_D , conviene introdurre un'altra matrice di rotazione definita tramite tre *angoli ausiliari*. Di conseguenza, sarà poi possibile esprimere in forma concisa i vincoli anolonomi imposti sulla ruota anteriore. In particolare, dalla teoria sappiamo che l'orientamento di una terna di assi ortogonali nello spazio tridimensionale può essere ottenuto attraverso tre angoli di Eulero. Siano quindi $\tilde{\theta}$ l'angolo di imbardata anteriore, il quale descrive la rotazione attorno all'asse Z , $\tilde{\alpha}$ l'angolo di rollio anteriore, detto anche *camber angle*, il quale individua la rotazione attorno all'asse $x_{F'}$, mentre $\tilde{\mu}$ il beccheggio anteriore, il quale invece identifica la rotazione attorno ad y_E . Allora, adottando per i segni di $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\mu}$ una convenzione analoga a quella adottata per α e μ , si ottiene la matrice di rotazione

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}} &= \tilde{\mathcal{R}}_3(-\tilde{\mu})\tilde{\mathcal{R}}_2(-\tilde{\alpha})\tilde{\mathcal{R}}_1(\tilde{\theta}) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} - \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} + \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} & \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \\ -\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\alpha} \\ -\sin \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} - \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} + \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} & \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Adesso, non resta che imporre l'uguaglianza tra i coseni direttori della matrice (5.7) con quelli che identificano la trasformazione (5.8). In questo modo, si ottengono nove relazioni per gli angoli ausiliari, come ad esempio

$$\sin \tilde{\alpha} = \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi + \sin \alpha \cos \psi. \quad (5.9)$$

Osserviamo anche che, sempre per ragioni fisiche, l'angolo $\tilde{\alpha}$ può assumere valori solo nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. D'altronde, si vede che il coseno di tale angolo è sempre diverso da zero secondo come abbiamo scelto l'intervallo di definizione di α .

Indichiamo quindi con χ_a la rotazione propria della ruota anteriore, della quale bisogna tenere conto quando si passa al sistema di riferimento solidale alla ruota S_{E_r} . Non riportiamo la matrice di rotazione che si ricava componendo \mathcal{R}_D con $\mathcal{R}_{y_E}(\chi_a)$ in quanto l'espressione è particolarmente estesa, tuttavia sappiamo che il sistema S_{E_r} viene ottenuto da quello inerziale tramite la matrice di rotazione $\mathcal{R}_{E_r} = \mathcal{R}_{y_E}(\chi_a)\mathcal{R}_D$. Anche l'angolo χ_a è scelto in modo che nella configurazione banale sia nullo.

Infine, conforme a come abbiamo introdotto gli angoli ausiliari, risultano immediate le espressioni per le matrici che identificano i due sistemi $S_{F'}$ ed S_F . Infatti, l'orientamento della prima terna è dato semplicemente da

$$\mathcal{R}_{F'} = \tilde{\mathcal{R}}_1(\tilde{\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} & 0 \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mentre per il secondo sistema, in analogia con la rotazione \mathcal{R}_A , abbiamo

$$\mathcal{R}_F = \tilde{\mathcal{R}}_2(-\tilde{\alpha})\tilde{\mathcal{R}}_2(\tilde{\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} & 0 \\ -\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\alpha} \\ -\sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\theta} & \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta} & \cos \tilde{\alpha} \end{pmatrix}.$$

5.3 Coordinate generalizzate e spazio delle configurazioni

Nella sezione precedente abbiamo introdotto una serie di angoli per descrivere l'orientamento dei sistemi di riferimento solidali rispetto al sistema inerziale. Tuttavia, è chiaro che non tutti gli angoli di Eulero prima definiti sono necessari per descrivere la configurazione della bicicletta. Pertanto, adesso si intende determinare il numero di coordinate generalizzate necessarie (e sufficienti) per descrivere completamente lo spazio delle configurazioni del nostro sistema.

Il modello studiato nel presente lavoro è costituito da quattro corpi rigidi, quindi nello spazio ambiente, se non fossero presenti vincoli di alcun genere, il sistema presenterebbe 24 gradi di libertà. Tuttavia, è noto che i quattro corpi in questione sono uniti tra loro tramite tre giunti rotoidali, mentre i punti di contatto della ruota posteriore ed anteriore sono vincolati a giacere sul piano orizzontale $z = 0$. Quindi, sappiamo dalla teoria che la presenza di questi vincoli olonomi riduce il numero di coordinate necessarie ad individuare la configurazione del sistema. In particolare, ciascun giunto rotoidale toglie 5 gradi di libertà, mentre il vincolo di contatto sottrae un grado di libertà per ciascuna ruota. In conclusione, il numero di coordinate generalizzate necessarie per descrivere la configurazione del sistema risulta essere

$$l = 24 - 5 \times 3 - 2 = 7,$$

da cui andrà poi tolto il numero di vincoli anolonomi per determinare il numero di gradi di libertà del sistema. Tuttavia, per imporre i vincoli sulle velocità dobbiamo prima studiare la cinematica del sistema, quindi tale operazione verrà svolta solo in seguito.

Per ora ci interessa però solo determinare le coordinate lagrangiane del sistema. Vediamo quindi che due possono essere identificate con le coordinate del punto di contatto della ruota posteriore x ed y , mentre come terza può essere scelto l'angolo di imbardata θ . Osserviamo inoltre che, per definizione, nella configurazione banale sia y che θ risultano uguali a zero, mentre x è nullo se e soltanto se l'origine del sistema di riferimento inerziale O coincide con il punto di contatto A' della ruota posteriore con il terreno.

È poi naturale prendere come coordinate anche l'angolo di rollio α e l'angolo di sterzo ψ . Osserviamo che l'angolo di beccheggio, invece, può essere determinato in funzione di questi due. Infatti, lo spostamento del centro della ruota anteriore, con la conseguente nascita del beccheggio, dipende dall'angolo di sterzo e dal rollio. D'altra parte, se scegliessimo come coordinata lagrangiana l'angolo μ ed uno dei due suddetti, si potrebbe ricavare il terzo in funzione di quelli.

Finora abbiamo così determinato cinque coordinate lagrangiane per il sistema. Le due rimanenti sono chiaramente le due rotazioni proprie delle ruote posteriore e anteriore, ovvero rispettivamente χ e χ_a . In conclusione, lo spazio delle configurazioni della bicicletta risulta essere

$$Q = \text{SE}(2) \times S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1,$$

dove $\text{SE}(2)$ è il gruppo speciale euclideo nel piano. Poiché assumiamo che il piano del terreno sia omogeneo ed isotropo, questo comporta una simmetria di tale gruppo. Infatti, la posizione del punto A' e l'orientamento della linea di contatto non influiscono sulle caratteristiche intrinseche del moto. Questo comporta poi delle semplificazioni nella Lagrangiana che in seguito sfrutteremo per ricavare più rapidamente le equazioni di moto.

Osservazione 5.4. È noto che la scelta delle coordinate lagrangiane può essere fatta in modo arbitrario, purché le coordinate scelte siano indipendenti tra loro. Ad esempio, un'altra possibile scelta poteva essere quella di considerare i tre angoli ausiliari introdotti per la ruota anteriore, le coordinate del punto di contatto della ruota anteriore $F' = (z, w, 0)^T$ sul piano della strada, e le rotazioni proprie delle due ruote. La scelta di un sistema di coordinate piuttosto di un altro non comporta nessuna differenza sostanziale, in quanto il passaggio tra i due sistemi di coordinate viene effettuato attraverso un diffeomorfismo.

5.4 Beccheggio e punto di contatto anteriore

Nella sezione precedente abbiamo accennato al fatto che, per la scelta compiuta delle coordinate generalizzate, il beccheggio μ non risulta una coordinata indipendente, ma deriva dagli angoli di rollio e di sterzo. Inoltre, si è anche considerato un altro possibile sistema di coordinate generalizzate, ed abbiamo dimostrato che il passaggio dall'uno all'altro è dato da un diffeomorfismo.

In particolare, per gli angoli ausiliari $\tilde{\theta}$, $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\mu}$, il loro legame con le coordinate generalizzate si ottiene dalle nove equazioni ricavate uguagliando gli elementi della matrice (5.7) con quelli della matrice (5.8). In ogni modo, non tutte queste relazioni sono tra loro indipendenti, in quanto per i coseni direttori valgono sempre le identità trigonometriche. Tuttavia, in conclusione è possibile determinare il diffeomorfismo che sussiste tra i due sistemi di riferimento.

In modo analogo, ci si propone adesso di determinare l'espressione di μ in funzione delle coordinate generalizzate, così come quella delle coordinate del punto di contatto della ruota anteriore, ovvero si esprime il diffeomorfismo che lega queste coordinate a quelle lagrangiane. Questo risulta utile poiché in seguito si impiegheranno, per lo svolgimento dei calcoli, anche le coordinate ausiliarie al fine di semplificare i calcoli.

Per ottenere tali relazioni, è necessario determinare l'espressione del vettore $(F' - A')$ in funzione delle coordinate lagrangiane. Chiaramente, nella configurazione banale, tale vettore ha modulo p e giace sull'asse X . Tuttavia, nella generica configurazione, questa semplificazione non è più valida, in quanto il punto di contatto si muove sul terreno. Allora, per determinare le nuove coordinate, sfruttiamo il fatto che

$$(F' - A') = (F' - F) + (F - E) + (E - D) + (D - C) + (C - B) + (B - A) + (A - A'),$$

ovvero abbiamo espresso il vettore incognito attraverso la somma di vettori dei quali si conosce l'espressione.

Ne consegue che, avendo scelto come ruote due tori rigidi a sezione circolare, l'ultimo vettore che compare nella precedente somma può essere espresso nella forma

$$(A - A')_{\Sigma} = r\vec{k}$$

in qualsiasi configurazione la bicicletta si trovi, dove $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ individua l'insieme dei versori inerziali caratteristici del sistema di riferimento Σ . In seguito, indicheremo i versori dei sistemi solidali usando il pedice dello stesso sistema.

Per quanto riguarda la posizione del punto B , nel sistema di riferimento solidale S_A questo è individuato dal vettore $(B - A)_{S_A} = R\vec{k}_{S_A}$. Quindi, sfruttando la matrice di rotazione (5.4), si esprimono i versori solidali rispetto a quelli inerziali secondo le relazioni

$$\begin{cases} \vec{i}_{S_A} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \\ \vec{j}_{S_A} = -\cos \alpha \sin \theta \vec{i} + \cos \alpha \cos \theta \vec{j} - \sin \alpha \vec{k}, \\ \vec{k}_{S_A} = -\sin \alpha \sin \theta \vec{i} + \sin \alpha \cos \theta \vec{j} + \cos \alpha \vec{k}, \end{cases} \quad (5.10)$$

per cui l'espressione di tale vettore nel sistema di riferimento inerziale risulta essere

$$(B - A)_{\Sigma} = -R \sin \alpha \sin \theta \vec{i} + R \sin \alpha \cos \theta \vec{j} + R \cos \alpha \vec{k}. \quad (5.11)$$

Passiamo poi a determinare l'espressione del vettore che identifica il punto C . Nel sistema di riferimento solidale risulta semplicemente $(C - B)_{S_B} = l\vec{i}_{S_B}$, per cui non rimane che esprimere il versore solidale rispetto a quelli inerziali. Allora, impiegando la matrice di rotazione (5.6), si ricavano le relazioni

$$\begin{cases} \vec{i}_{S_B} = (\cos \mu \cos \theta - \sin \alpha \sin \mu \sin \theta) \vec{i} + (\cos \mu \sin \theta + \sin \alpha \sin \mu \cos \theta) \vec{j} + \cos \alpha \sin \mu \vec{k}, \\ \vec{j}_{S_B} = -\cos \alpha \sin \theta \vec{i} + \cos \alpha \cos \theta \vec{j} - \sin \alpha \vec{k}, \\ \vec{k}_{S_B} = -(\sin \mu \cos \theta + \sin \alpha \cos \mu \sin \theta) \vec{i} - (\sin \mu \sin \theta - \sin \alpha \cos \mu \cos \theta) \vec{j} + \cos \alpha \cos \mu \vec{k}, \end{cases}$$

tra i due insiemi di versori. Quindi, sostituendo l'espressione di \vec{i}_{S_B} si ottiene

$$(C - B)_\Sigma = l(\cos \mu \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \theta) \vec{i} + \\ + l(\cos \mu \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \mu \cos \theta) \vec{j} + l \cos \alpha \operatorname{sen} \mu \vec{k}.$$

A questo punto, i rimanenti vettori che dobbiamo determinare sono tutti relativi alla parte anteriore della bicicletta, per cui ci riferiamo al sistema solidale S_D individuato dalla matrice di rotazione \mathcal{R}_D . Per prima cosa, constatiamo che i versori solidali adesso sono espressi nel sistema inerziale dalle relazioni

$$\begin{cases} \vec{i}_{S_D} = [\cos \psi (\cos(\mu + \varepsilon) \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \theta) - \cos \alpha \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta] \vec{i} + \\ \quad + [\cos \psi (\cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \cos \theta) + \cos \alpha \operatorname{sen} \psi \cos \theta] \vec{j} + \\ \quad + [\cos \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \cos \psi - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \psi] \vec{k}, \\ \vec{j}_{S_D} = [\operatorname{sen} \psi (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \theta - \cos(\mu + \varepsilon) \cos \theta) - \cos \alpha \cos \psi \operatorname{sen} \theta] \vec{i} + \\ \quad + [\cos \alpha \cos \psi \cos \theta - \operatorname{sen} \psi (\cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \cos \theta)] \vec{j} + \\ \quad - [\cos \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi + \operatorname{sen} \alpha \cos \psi] \vec{k}, \\ \vec{k}_{S_D} = -[\operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \cos \theta + \operatorname{sen} \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \theta] \vec{i} + \\ \quad + [\operatorname{sen} \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \theta - \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \theta] \vec{j} + \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \vec{k}. \end{cases}$$

D'altra parte, possiamo anche esprimere i vettori solidali di S_D rispetto a quelli inerziali sfruttando gli angoli ausiliari introdotti nella matrice (5.8), per cui si ottiene

$$\begin{cases} \vec{i}_{S_D} = (\cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} - \operatorname{sen} \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} \operatorname{sen} \tilde{\theta}) \vec{i} + (\cos \tilde{\mu} \operatorname{sen} \tilde{\theta} + \operatorname{sen} \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta}) \vec{j} + \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} \vec{k}, \\ \vec{j}_{S_D} = -\cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\theta} \vec{i} + \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta} \vec{j} - \operatorname{sen} \tilde{\alpha} \vec{k}, \\ \vec{k}_{S_D} = -(\operatorname{sen} \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} + \operatorname{sen} \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \operatorname{sen} \tilde{\theta}) \vec{i} - (\operatorname{sen} \tilde{\mu} \operatorname{sen} \tilde{\theta} - \operatorname{sen} \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta}) \vec{j} + \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \vec{k}. \end{cases}$$

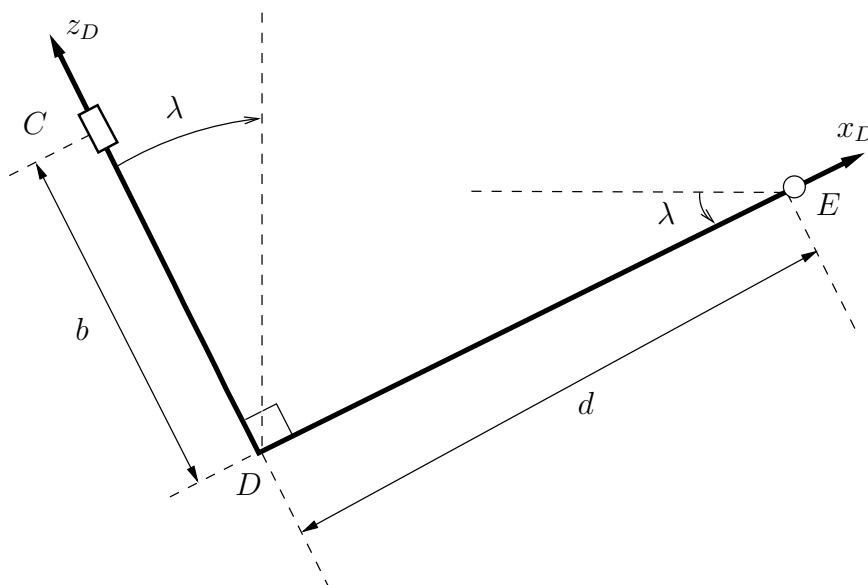


Figura 5.5: Sistema di riferimento solidale S_D .

Con riferimento alla figura 5.5, notiamo che il vettore $(C - D)$ risulta caratterizzato dal versore \vec{k}_{S_D} e dal modulo b . Tuttavia, noi siamo interessati al vettore opposto, per cui nel sistema

di riferimento inerziale abbiamo

$$\begin{aligned} (D - C)_\Sigma &= b[\text{sen}(\mu + \varepsilon) \cos \theta + \text{sen } \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \text{sen } \theta] \vec{i} + \\ &\quad + b[\text{sen}(\mu + \varepsilon) \text{sen } \theta - \text{sen } \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \theta] \vec{j} - b \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \vec{k} = \\ &= b(\text{sen } \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} + \text{sen } \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \text{sen } \tilde{\theta}) \vec{i} + \\ &\quad + b(\text{sen } \tilde{\mu} \text{sen } \tilde{\theta} - \text{sen } \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta}) \vec{j} - b \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \vec{k}. \end{aligned}$$

Il vettore $(E - D)$, nel sistema di riferimento solidale, ha diversa da zero solo la componente lungo \vec{i}_{S_D} , per cui risulta

$$\begin{aligned} (E - D)_\Sigma &= d[\cos \psi (\cos(\mu + \varepsilon) \cos \theta - \text{sen } \alpha \text{sen}(\mu + \varepsilon) \text{sen } \theta) - \cos \alpha \text{sen } \psi \text{sen } \theta] \vec{i} + \\ &\quad + d[\cos \psi (\cos(\mu + \varepsilon) \text{sen } \theta + \text{sen } \alpha \text{sen}(\mu + \varepsilon) \cos \theta) + \cos \alpha \text{sen } \psi \cos \theta] \vec{j} + \\ &\quad + d[\cos \alpha \text{sen}(\mu + \varepsilon) \cos \psi - \text{sen } \alpha \text{sen } \psi] \vec{k} = \\ &= d(\cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} - \text{sen } \tilde{\alpha} \text{sen } \tilde{\mu} \text{sen } \tilde{\theta}) \vec{i} + \\ &\quad + d(\cos \tilde{\mu} \text{sen } \tilde{\theta} + \text{sen } \tilde{\alpha} \text{sen } \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta}) \vec{j} + d \cos \tilde{\alpha} \text{sen } \tilde{\mu} \vec{k}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il vettore $(F - E)$, invece, conviene lavorare direttamente con gli angoli ausiliari. Infatti, vediamo che tale vettore, appartenente al piano della ruota anteriore, non risente della rotazione data da $\tilde{\mu}$ attorno all'asse y_D . Pertanto, se ci riferiamo al sistema S_D piuttosto che ad S_E , risulta

$$(F - E) = -R_a \text{sen } \tilde{\mu} \vec{i}_{S_D} - R_a \cos \tilde{\mu} \vec{k}_{S_D};$$

sostituendo poi tali versori solidali con le loro espressioni rispetto a quelli inerziali ricavate tramite gli angoli ausiliari, si ottiene

$$(F - E)_\Sigma = R_a \text{sen } \tilde{\alpha} \text{sen } \tilde{\theta} \vec{i} - R_a \text{sen } \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta} \vec{j} - R_a \cos \tilde{\alpha} \vec{k}.$$

Si osserva quindi un'analogia con l'espressione (5.11) ottenuta per la ruota posteriore. Questo è dovuto proprio alla scelta fatta degli angoli ausiliari per la ruota anteriore, e comporta ora come in seguito notevoli semplificazioni per la scrittura di determinate grandezze fisiche.

Infine, poiché anche la ruota anteriore è un toro a sezione circolare, il vettore $(F' - F)$ mantiene la stessa espressione rispetto a Σ , in qualunque configurazione si trovi la bicicletta. Infatti, la rotazione che caratterizza il sistema di riferimento $S_{F'}$ rispetto a quello inerziale lascia invariato il versore \vec{k} . Pertanto, risulta

$$(F' - F) = -r_a \vec{k}.$$

A questo punto, siamo in grado di esprimere il vettore $(F' - A')$ nella generica configurazione, per cui le coordinate del punto di contatto della ruota anteriore sono esprimibile rispetto a quelle del punto di contatto posteriore attraverso la relazione

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z \\ w \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -\text{sen } \alpha \text{sen } \theta \\ \text{sen } \alpha \cos \theta \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} \cos \mu \cos \theta - \text{sen } \alpha \text{sen } \mu \text{sen } \theta \\ \cos \mu \text{sen } \theta + \text{sen } \alpha \text{sen } \mu \cos \theta \\ \cos \alpha \text{sen } \mu \end{pmatrix} + \\ &\quad + b \begin{pmatrix} \text{sen}(\mu + \varepsilon) \cos \theta + \text{sen } \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \text{sen } \theta \\ \text{sen}(\mu + \varepsilon) \text{sen } \theta - \text{sen } \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \theta \\ -\cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \end{pmatrix} + \\ &\quad + d \begin{pmatrix} \cos \psi (\cos(\mu + \varepsilon) \cos \theta - \text{sen } \alpha \text{sen}(\mu + \varepsilon) \text{sen } \theta) - \cos \alpha \text{sen } \psi \text{sen } \theta \\ \cos \psi (\cos(\mu + \varepsilon) \text{sen } \theta + \text{sen } \alpha \text{sen}(\mu + \varepsilon) \cos \theta) + \cos \alpha \text{sen } \psi \cos \theta \\ \cos \alpha \text{sen}(\mu + \varepsilon) \cos \psi - \text{sen } \alpha \text{sen } \psi \end{pmatrix} + \\ &\quad + R_a \begin{pmatrix} \text{sen } \tilde{\alpha} \text{sen } \tilde{\theta} \\ -\text{sen } \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta} \\ -\cos \tilde{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_a \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Quindi, uguagliando membro a membro, si ricavano le espressioni di z , w e μ in funzione delle coordinate generalizzate scelte. In particolare, per il beccheggio, abbiamo

$$(r - r_a) + R \cos \alpha + l \cos \alpha \sin \mu - b \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + d(\cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi) - R_a \sqrt{1 - \sin^2 \tilde{\alpha}} = 0, \quad (5.13)$$

mentre per le coordinate del punto di contatto della ruota anteriore si ottiene

$$z = x - R \sin \alpha \sin \theta + l(\cos \mu \cos \theta - \sin \alpha \sin \mu \sin \theta) + b(\sin(\mu + \varepsilon) \cos \theta + \sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \sin \theta) + d \cos \psi (\cos(\mu + \varepsilon) \cos \theta - \sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \sin \theta) - d \cos \alpha \sin \psi \sin \theta + R_a \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\theta} \quad (5.14)$$

e

$$w = y + R \sin \alpha \cos \theta + l(\cos \mu \sin \theta + \sin \alpha \sin \mu \cos \theta) + b(\sin(\mu + \varepsilon) \sin \theta - \sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \theta) + d \cos \psi (\cos(\mu + \varepsilon) \sin \theta + \sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \theta) + d \cos \alpha \sin \psi \cos \theta - R_a \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta}. \quad (5.15)$$

5.4.1 Valutazioni sul beccheggio e sul punto di contatto anteriore

Le relazioni che abbiamo trovato per esprimere il beccheggio e le coordinate del punto di contatto della ruota anteriore in funzione di α e ψ risultano complicate, pertanto possono essere risolte solo per via numerica.

Per ricavare i risultati seguenti, abbiamo scelto i valori dei parametri geometrici della bicicletta riportati in tabella 5.1. In seguito, faremo sempre riferimento a questi valori per la risoluzione numerica delle equazioni. Si osserva quindi che, per come sono scelti tali parametri geometrici, il valore di μ , quando sia α sia ψ sono nulli, risulta diverso da zero. Questo valore corrisponde all'angolo φ che identifica appunto il beccheggio nella configurazione banale.

Tabella 5.1: Valori dei parametri geometrici impiegati nella risoluzione numerica.

Simbolo	Significato geometrico	Valore
r	raggio sezione torica posteriore	0.02 m
R	raggio toro posteriore	0.3 m
l	lunghezza del telaio	1.02 m
b	abbassamento della forcella	0.02 m
d	<i>offset</i>	0.05 m
ε	<i>caster angle</i> ridotto	0.1π rad
R_a	raggio toro anteriore	0.35 m
r_a	raggio sezione torica anteriore	0.015 m

Riportiamo quindi in figura 5.6a i valori assunti dal beccheggio al variare di α nell'intervallo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, mantenendo ψ uguale a zero.

Si nota dunque subito che l'andamento dell'angolo μ risulta simmetrico rispetto alla configurazione banale, ovvero quando anche α è nullo. Questo concorda con quanto ci aspettiamo, poiché in tale

situazione inclinare la bicicletta verso destra o verso sinistra produce gli stessi effetti. Inoltre, per la convenzione fatta sul segno dell'angolo μ , di conseguenza l'aumento del rollio comporta un abbassamento del telaio, e quindi una diminuzione del beccheggio.

In figura 5.6b, invece, abbiamo riportato l'angolo μ in funzione di ψ , il quale può variare sempre nell'intervallo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, mentre adesso è l'angolo di rollio ad essere preso nullo. Anche in questo caso, il beccheggio presenta un andamento simmetrico rispetto a $\psi = 0$, tuttavia la variazione dell'angolo μ ora risulta maggiore rispetto al caso precedente. Pertanto, l'influenza dell'angolo di sterzo è predominante sul beccheggio.

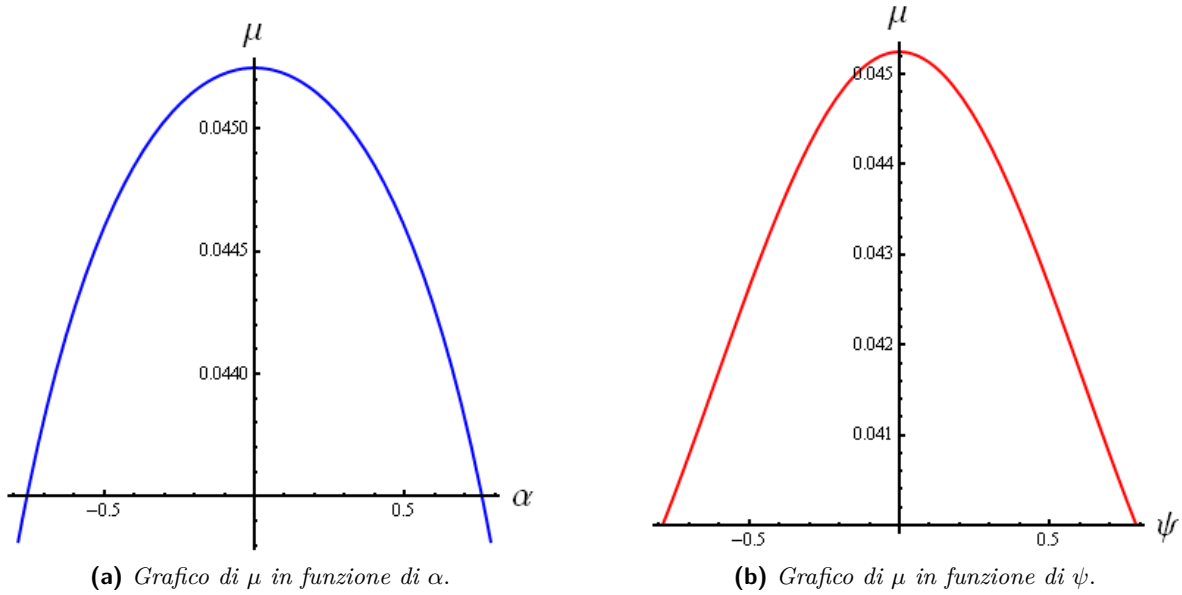


Figura 5.6: Andamenti dell'angolo di beccheggio in funzione di α e ψ .

La simmetria che caratterizza i due grafici in figura (5.6) si perde non appena l'angolo tenuto costante viene preso diverso da zero. Ad esempio, in figura 5.7 riportiamo l'andamento di μ rispetto all'angolo di sterzo, avendo fissato $\alpha = \frac{\pi}{6}$, ovvero la bicicletta è inclinata verso sinistra di 30° . Si osserva allora una maggiore variazione del beccheggio, ed in particolare si ha un innalzamento del telaio, quando lo sterzo è ruotato verso destra (valori negativi dell'angolo).

Quando invece lo sterzo viene ruotato dalla stessa parte verso la quale è inclinata la bicicletta, si ha all'inizio una diminuzione di μ , fino al valore minimo pari a $\mu \simeq 0.0377$ rad assunto in corrispondenza di $\psi = \frac{\pi}{8}$, mentre successivamente osserviamo un innalzamento del telaio rispetto alla sua posizione nella configurazione banale in corrispondenza dei valori di ψ prossimi a 90° .

Osservazione 5.5. Osserviamo che l'equazione (5.13) può essere anche risolta in forma chiusa nel caso particolare in cui il *reduced caster angle* e l'abbassamento della forcella b siano uguali a zero. Infatti, possiamo allora scrivere la relazione in questione nella forma

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 \mu \cos^2 \alpha \left[l^2 + d^2 \cos^2 \psi + 2ld \cos \psi + R_a^2 \sin^2 \psi \right] + \\
 & + 2 \sin \mu \cos \alpha \left[(r - r_a)l + (r - r_a)d \cos \psi + Rl \cos \alpha + Rd \cos \alpha \cos \psi + \right. \\
 & \quad \left. - ld \sin \psi - d^2 \sin \alpha \cos \psi \sin \psi + R_a^2 \sin \alpha \cos \psi \sin \psi \right] + \\
 & + \left[(r - r_a)^2 + R^2 \cos^2 \alpha + d^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \psi + 2(r - r_a)R \cos \alpha + \right. \\
 & \quad \left. - 2(r - r_a)d \sin \alpha \sin \psi - 2Rd \cos \alpha \sin \alpha \sin \psi + R_a^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \psi - R_a^2 \right] = 0,
 \end{aligned}$$

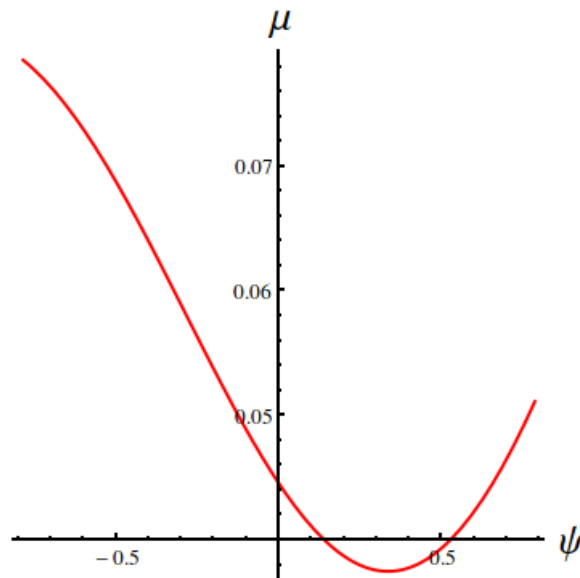


Figura 5.7: Andamento di μ in funzione di ψ per $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

la quale non è altro che un'equazione di secondo grado nell'incognita μ . Tuttavia, delle due soluzioni che si ottengono, bisogna considerare solo quella con il segno positivo per chiare ragioni fisiche.

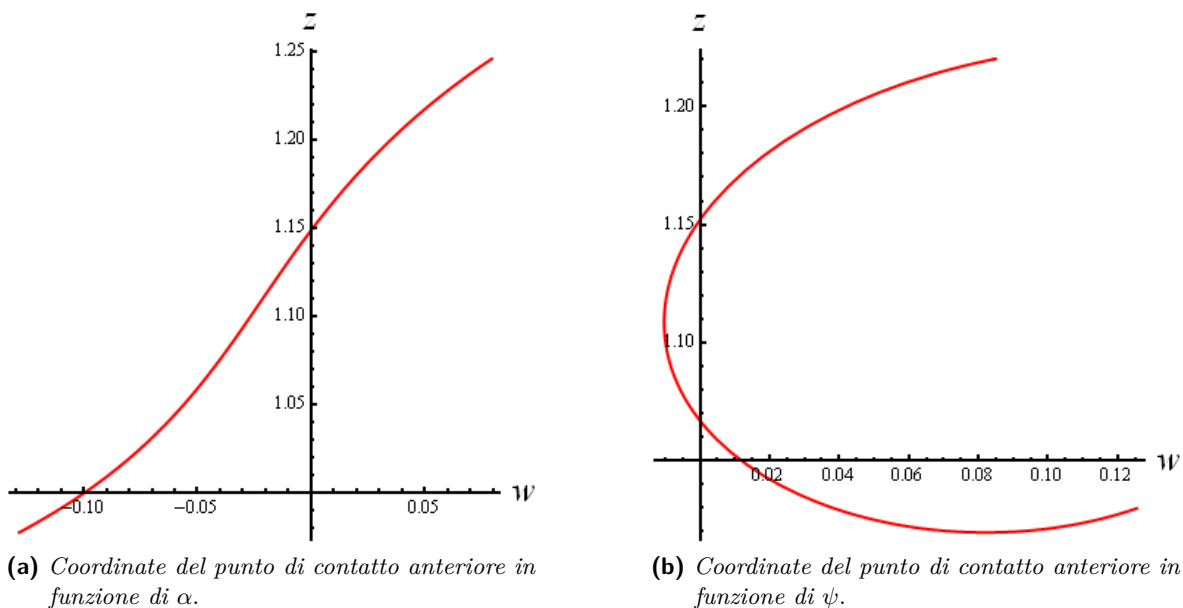


Figura 5.8: Posizione del punto di contatto anteriore nel piano.

Per quanto riguarda le coordinate del punto di contatto anteriore, riportiamo in figura 5.8 lo spostamento di tale punto nel piano al variare degli angoli α e ψ , avendo preso le coordinate del punto posteriore e l'angolo θ entrambi uguali a zero.

Allora, il grafico 5.8a rappresenta la posizione del punto di contatto riportata in funzione dell'angolo di rollio, fissato $\psi = \frac{\pi}{6}$. Si vede quindi che per valori negativi dell'angolo α il punto di contatto indietreggia e trasla verso destra, infatti è negativo il valore della componente lungo Y .

Questo concorda con l'esperienza comune per cui, se la bicicletta ha lo sterzo inclinato verso sinistra e viene successivamente inclinata verso destra, allora il punto di contatto si avvicina a quello posteriore. Quando poi l'angolo di rollio è positivo, ovvero la bicicletta viene inclinata dalla stessa parte verso cui è ruotato lo sterzo, si vede un avanzamento del punto di contatto, mentre il valore di w rimane negativo fino a valori di α poco maggiori di 0.3 rad.

Nel grafico 5.8b, invece, sono riportate le coordinate del punto F' in funzione di ψ , avendo adesso fissato $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Per valori positivi di ψ , aumenta il valore assunto dalla componente z , mentre si osserva uno spostamento del punto di contatto lungo l'asse Y inizialmente verso destra, e poi verso sinistra (valori di w positivi). Quando invece ruotiamo lo sterzo dalla parte opposta rispetto a cui è inclinata la bicicletta, cioè per valori negativi di ψ , si ha una diminuzione del valore della coordinata z ed un conseguente spostamento verso sinistra del punto di contatto. Notiamo che, mentre lo spostamento longitudinale è minore quando variamo ψ , quello laterale risulta maggiore rispetto a quello ottenuto in precedenza facendo variare α .

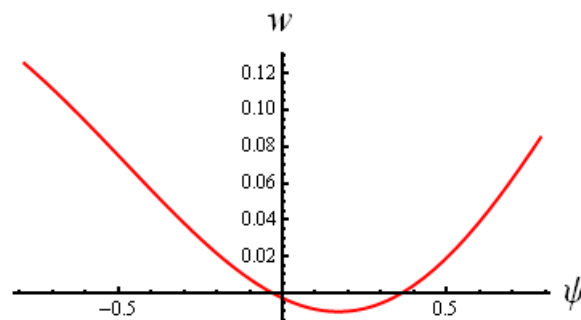


Figura 5.9: Andamento della coordinata w in funzione di ψ per $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

In figura 5.9 riportiamo infine l'andamento della coordinata w del punto di contatto in funzione dell'angolo di sterzo. Anche in questo caso abbiamo assunto $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Tale grafico esemplifica quanto abbiamo appena detto a proposito dell'andamento di w . Inoltre, si osserva un andamento qualitativamente simile a quello ottenuto in [10].

Capitolo 6

Cinematica della bicicletta

Lo studio cinematico della bicicletta risulta essenziale perché possiamo poi valutarne l'aspetto dinamico. Adesso che abbiamo definito la geometria della bicicletta, si devono esprimere le grandezze cinematiche dei quattro corpi rigidi che compongono il sistema, in modo da ricavare successivamente quelle grandezze fisiche le quali consentono di formulare le equazioni di moto. In particolare, conformemente a come opereremo in seguito, dobbiamo ricavare le velocità dei centri di massa di ciascun corpo rigido componente la bicicletta e le relative velocità angolari. I vincoli anolonomi saranno poi imposti sulle velocità dei punti di contatto delle due ruote.

6.1 Velocità lineari ed angolari

Abbiamo detto che, per ciascuno dei quattro corpi rigidi che costituiscono la bicicletta, è opportuno ricavare l'espressione della velocità del proprio centro di massa e la velocità angolare caratteristica del corpo stesso. Quest'ultima può essere determinata rammentando che, nel sistema mobile solidale al corpo rigido, la velocità angolare può essere espressa attraverso la relazione

$$\vec{\omega}_S = \left\langle \frac{d\vec{j}_S}{dt}, \vec{k}_S \right\rangle \vec{i}_S + \left\langle \frac{d\vec{k}_S}{dt}, \vec{i}_S \right\rangle \vec{j}_S + \left\langle \frac{d\vec{i}_S}{dt}, \vec{j}_S \right\rangle \vec{k}_S, \quad (6.1)$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare. Per ottenere poi l'espressione di tale grandezza nel sistema di riferimento inerziale è sufficiente esprimere i versori solidali rispetto a quelli fissi.

La velocità del centro di massa, invece, si ottiene o differenziando rispetto al tempo le coordinate del centro di massa in questione, o applicando la *formula fondamentale dei moti rigidi*

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge (P - O), \quad (6.2)$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo rigido in questione. È chiaro che i tre vettori nella (6.2) devono essere espressi rispetto allo stesso sistema di riferimento. Osserviamo che questo secondo metodo per ricavare la velocità di un punto comporta un numero maggiore di calcoli, tuttavia, quando determiniamo il quadrato della velocità, si possono sfruttare delle regole che permettono di semplificare certe operazioni.

6.1.1 Ruota posteriore

Cominciamo ricavando le velocità della ruota posteriore della bicicletta. Osserviamo quindi che la velocità del punto di contatto A' si ottiene derivando rispetto al tempo le sue componenti, e dunque risulta essere

$$\vec{v}(A') = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}.$$

Questa coincide poi con la velocità del punto A , come si può facilmente verificare impiegando la formula fondamentale dei moti rigidi: in tal caso abbiamo semplicemente $\vec{\omega}_{S_{A'}} = \dot{\theta} \vec{k}$, per cui il calcolo è immediato.

Per determinare poi la velocità del centro di massa della ruota posteriore, ovvero del punto B , si impiega la formula fondamentale dei moti rigidi, per cui è necessario ricavare prima l'espressione della velocità angolare della ruota. Sfruttando allora la relazione (6.1), si deve calcolare la derivata dei versori solidali rispetto al tempo. Questo può essere facilmente fatto se esprimiamo tali versori rispetto al sistema fisso. Dalla (5.10) sappiamo quali sono le espressioni dei versori di S_A rispetto a Σ , pertanto si ricava

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{i}_{S_A}}{dt} &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \cos \theta \vec{j}, \\ \frac{d\vec{j}_{S_A}}{dt} &= (\dot{\alpha} \sin \alpha \sin \theta - \dot{\theta} \cos \alpha \cos \theta) \vec{i} - (\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \theta + \dot{\theta} \cos \alpha \sin \theta) \vec{j} - \dot{\alpha} \vec{k}, \\ \frac{d\vec{k}_{S_A}}{dt} &= -(\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta + \dot{\theta} \sin \alpha \cos \theta) \vec{i} + (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta - \dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta) \vec{j} - \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{k};\end{aligned}$$

per calcolare il prodotto scalare, ricordiamo che i due vettori devono essere espressi nella stessa base, quindi, con riferimento al sistema fisso, si ricava

$$\begin{aligned}\omega_{S_{A1}} &= \left\langle \frac{d\vec{j}_1}{dt}, \vec{k}_1 \right\rangle = -\dot{\alpha}, \\ \omega_{S_{A2}} &= \left\langle \frac{d\vec{k}_1}{dt}, \vec{i}_1 \right\rangle = -\dot{\theta} \sin \alpha, \\ \omega_{S_{A3}} &= \left\langle \frac{d\vec{i}_1}{dt}, \vec{j}_1 \right\rangle = \dot{\theta} \cos \alpha,\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $\omega_{S_{Ai}}$, $i = 1, 2, 3$, le tre componenti della velocità angolare della ruota posteriore nel sistema di riferimento solidale. Per esprimere poi tale velocità nel sistema di riferimento fisso è sufficiente esprimere i versori solidali in funzione di quelli inerziali, ottenendo

$$\{\vec{\omega}_{S_A}\}_{\Sigma} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \cos \theta \\ -\dot{\alpha} \sin \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

La velocità angolare così ricavata, però, non tiene conto della rotazione propria della ruota. Questa entra in gioco solo quando si deve determinare l'energia cinetica rotazionale di tale corpo rigido, mentre per calcolare $\vec{v}(B)$ non bisogna considerare l'angolo χ per la simmetria della ruota stessa. Comunque, ricaviamo di seguito anche l'espressione di tale velocità angolare, la quale sarà successivamente impiegata per determinare la dinamica del sistema. In particolare, svolgendo calcoli analoghi a quelli fatti in precedenza, si trova che

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{S_{Br}} &= -(\dot{\alpha} \cos \chi + \dot{\theta} \cos \alpha \sin \chi) \vec{i}_{S_{Br}} + \\ &+ (\dot{\chi} - \dot{\theta} \sin \alpha) \vec{j}_{S_{Br}} + (\dot{\theta} \cos \alpha \cos \chi - \dot{\alpha} \sin \chi) \vec{k}_{S_{Br}}\end{aligned} \quad (6.4)$$

nel relativo sistema di riferimento solidale, mentre in quello inerziale abbiamo

$$\begin{aligned}\{\vec{\omega}_{S_{Br}}\}_{\Sigma} &= -(\dot{\alpha} \cos \theta + \dot{\chi} \cos \alpha \sin \theta) \vec{i} + \\ &+ (\dot{\chi} \cos \alpha \cos \theta - \dot{\alpha} \sin \theta) \vec{j} + (\dot{\theta} - \dot{\chi} \sin \alpha) \vec{k}.\end{aligned}$$

Osserviamo che, esprimendo tale velocità angolare nel sistema S_A , allora questa si ottiene semplicemente sommando $\dot{\chi}$ alla componente lungo \vec{j}_{S_A} di $\vec{\omega}_{S_A}$, come risulta evidente da semplici considerazioni di tipo fisico.

A questo punto possiamo passare a determinare la velocità del centro di massa. Applicando la formula fondamentale dei moti rigidi si ha

$$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\omega}_{S_A} \wedge (B - A),$$

dove i vettori possono essere espressi in qualsiasi sistema di riferimento, purché sia lo stesso per tutti. Allora, calcolando il prodotto vettoriale e ricordando che $\vec{v}(A) = \vec{v}(A')$, otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{v}(B) = & (\dot{x} - R\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta - R\dot{\theta} \sin \alpha \cos \theta) \vec{i} + \\ & + (\dot{y} + R\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta - R\dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta) \vec{j} + \\ & - R\dot{\alpha} \sin \alpha \vec{k}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Come abbiamo notato prima, è evidente che l'espressione così ottenuta per la velocità coincide con quella ricavata derivando rispetto al tempo le coordinate del punto B .

6.1.2 Retrotreno

In modo del tutto analogo a quanto riscontrato per la ruota anteriore, si ricava per prima la velocità angolare del retrotreno. Osserviamo tuttavia che la terna solidale a tale corpo rigido è analoga a quella per ottenere il sistema S_{B_r} . Infatti, al posto della rotazione corrispondente all'angolo χ , adesso ne abbiamo una pari a $-\mu$ attorno allo stesso angolo. Quindi la velocità cercata risulta avere la stessa forma della (6.4), sostituendo χ con $-\mu$. In questo modo si ha

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{S_B} = & (-\dot{\alpha} \cos \mu + \dot{\theta} \cos \alpha \sin \mu) \vec{i}_{S_B} + \\ & - (\dot{\mu} + \dot{\theta} \sin \alpha) \vec{j}_{S_B} + (\dot{\alpha} \sin \mu + \dot{\theta} \cos \alpha \cos \mu) \vec{k}_{S_B}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

mentre rispetto al sistema di riferimento inerziale si ha l'espressione

$$\begin{aligned} \{\vec{\omega}_{S_B}\}_{\Sigma} = & (-\dot{\alpha} \cos \theta + \dot{\mu} \cos \alpha \sin \theta) \vec{i} + \\ & - (\dot{\mu} \cos \alpha \cos \theta + \dot{\alpha} \sin \theta) \vec{j} + (\dot{\theta} + \dot{\mu} \sin \alpha) \vec{k}. \end{aligned}$$

Sia quindi G il centro di massa del telaio, per cui supponendo che tale corpo rigido sia simmetrico rispetto al piano $x_B z_B$ risulta $(G - B)_{S_B} = (l_2, 0, h_2)^T$. Allora, passando a determinarne la velocità, vediamo che

$$\vec{v}(G) = \vec{v}(B) + \vec{\omega}_{S_B} \wedge (G - B) = \vec{v}(A) + \vec{\omega}_{S_A} \wedge (B - A) + \vec{\omega}_{S_B} \wedge (G - B).$$

In questo caso, però, conviene non sommare tra loro i tre termini che compaiono nell'espressione precedente, ma esprimerli ciascuno nel relativo sistema di riferimento, ovvero nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \vec{v}(G) = & \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}_{\Sigma} + \begin{pmatrix} -R\dot{\theta} \sin \alpha \\ R\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}_{S_A} + \\ & + \begin{pmatrix} -h_2(\dot{\mu} + \dot{\theta} \sin \alpha) \\ l_2(\dot{\alpha} \sin \mu + \dot{\theta} \cos \alpha \cos \mu) + h_2(\dot{\alpha} \cos \mu - \dot{\theta} \cos \alpha \sin \mu) \\ l_2(\dot{\mu} + \dot{\theta} \sin \alpha) \end{pmatrix}_{S_B}; \end{aligned} \quad (6.7)$$

così facendo, come avevamo accennato in precedenza, il calcolo del quadrato della velocità di G risulta semplificato, in quanto, esprimendo ad esempio tutti gli addendi nel sistema fisso, si ottengono dei elementi nel prodotto che comunque si elidono tra di loro. Nel modo indicato, invece, tali termini neanche compaiono.

6.1.3 Parte anteriore

Rimangono infine da determinare la velocità angolare per lo sterzo e la ruota anteriore, e le velocità dei corrispondenti centri di massa. Come si vede già dalla matrice (5.7), si prospetta un'espressione piuttosto complicata per la velocità angolare, pertanto effettuiamo il calcolo impiegando il programma Wolfram Mathematica. Allora, nel sistema di riferimento solidale, la velocità angolare risulta essere

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{S_D} = & \left[-\dot{\alpha} \cos(\mu + \varepsilon) \cos \psi + \dot{\theta}(\cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi) - \dot{\mu} \sin \psi \right] \vec{i}_{S_D} + \\ & + \left[\dot{\alpha} \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi - \dot{\theta}(\cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi + \sin \alpha \cos \psi) - \dot{\mu} \cos \psi \right] \vec{j}_{S_D} + \\ & + \left[\dot{\alpha} \sin(\mu + \varepsilon) + \dot{\theta} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + \dot{\psi} \right] \vec{k}_{S_D},\end{aligned}\quad (6.8)$$

mentre espressa in quello fisso ha la forma:

$$\begin{aligned}\{\vec{\omega}_{S_D}\}_\Sigma = & \left[-\dot{\alpha} \cos \theta + \dot{\mu} \cos \alpha \sin \theta - \dot{\psi}(\sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \sin \theta + \sin(\mu + \varepsilon) \cos \theta) \right] \vec{i} + \\ & + \left[-\dot{\alpha} \sin \theta - \dot{\mu} \cos \alpha \cos \theta + \dot{\psi}(\sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \theta - \sin(\mu + \varepsilon) \sin \theta) \right] \vec{j} + \\ & + \left[\dot{\theta} + \dot{\mu} \sin \alpha + \dot{\psi} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \right] \vec{k}.\end{aligned}$$

Notiamo poi che, per l'avantreno, possiamo calcolare la velocità angolare anche considerando la matrice (5.8) degli angoli ausiliari. In questo modo si ottiene

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{S_D} = & (-\dot{\tilde{\alpha}} \cos \tilde{\mu} + \dot{\tilde{\theta}} \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu}) \vec{i}_{S_D} + \\ & - (\dot{\tilde{\mu}} + \dot{\tilde{\theta}} \sin \tilde{\alpha}) \vec{j}_{S_D} + (\dot{\tilde{\alpha}} \sin \tilde{\mu} + \dot{\tilde{\theta}} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu}) \vec{k}_{S_D},\end{aligned}\quad (6.9)$$

nel sistema di riferimento solidale, mentre rispetto quello fisso si ha

$$\begin{aligned}\{\vec{\omega}_{S_D}\}_\Sigma = & (-\dot{\tilde{\alpha}} \cos \tilde{\theta} + \dot{\tilde{\mu}} \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\theta}) \vec{i} + \\ & - (\dot{\tilde{\mu}} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta} + \dot{\tilde{\alpha}} \sin \tilde{\theta}) \vec{j} + (\dot{\tilde{\theta}} + \dot{\tilde{\mu}} \sin \tilde{\alpha}) \vec{k}.\end{aligned}$$

Osserviamo che la velocità angolare per un corpo rigido è unica, perciò le componenti di questo pseudo-vettore nello stesso sistema di riferimento devono essere uguali tra loro. Otteniamo così sei relazioni tra le derivate degli angoli ausiliari e le coordinate generalizzate. Ad esempio, si ricava che

$$\dot{\tilde{\theta}} + \dot{\tilde{\mu}} \sin \tilde{\alpha} = \dot{\theta} + \dot{\mu} \sin \alpha + \dot{\psi} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon).$$

Per ottenere la velocità angolare $\vec{\omega}_{S_{Er}}$ della ruota anteriore, possiamo invece sfruttare l'analogia che sussiste tra questa e la ruota posteriore. Infatti, impiegando anche in questo caso gli angoli ausiliari, possiamo direttamente scrivere la velocità angolare nella forma

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{S_{Er}} = & -(\dot{\tilde{\alpha}} \cos \chi_a + \dot{\tilde{\theta}} \cos \tilde{\alpha} \sin \chi_a) \vec{i}_{S_{Er}} + \\ & + (\dot{\chi}_a - \dot{\tilde{\theta}} \sin \tilde{\alpha}) \vec{j}_{S_{Er}} + (\dot{\tilde{\theta}} \cos \tilde{\alpha} \cos \chi_a - \dot{\tilde{\alpha}} \sin \chi_a) \vec{k}_{S_{Er}},\end{aligned}\quad (6.10)$$

dove abbiamo direttamente tenuto conto della rotazione propria della ruota. Se al contrario intendiamo ricavare $\vec{\omega}_{S_F}$, è sufficiente porre $\chi_a = 0$ per ottenerne l'espressione nel sistema solidale.

Rimangono infine da determinare le velocità dei centri di massa dello sterzo e della ruota anteriore. Indichiamo allora con H il primo di questi due centri di massa, e supponiamo che per la simmetria dello sterzo tale punto giaccia sull'asse z_D . Pertanto, nel sistema di riferimento solidale, possiamo scrivere $(H - D)_{S_D} = (h_3 - b) \vec{k}_{S_D}$, per cui risulta $(H - C)_{S_D} = h_3 \vec{k}_{S_D}$. Allora, sfruttando la (6.2) possiamo scrivere

$$\vec{v}(H) = \vec{v}(C) + \vec{\omega}_{S_D} \wedge (H - C),\quad (6.11)$$

dove il vettore $\vec{v}(C)$ si ottiene da $\vec{v}(G)$ ponendo $l_2 = l$ ed $h_2 = 0$. Poiché l'espressione di questa velocità è piuttosto estesa, per ora non esplicitiamo i termini dell'uguaglianza soprascritta. Solo in seguito, quando se ne dovrà calcolare il quadrato, scriveremo i termini nella loro forma completa.

Per la velocità del centro della ruota anteriore, invece, sfruttiamo l'analogia che sussiste con quella posteriore quando si considerano gli angoli ausiliari. In particolare, si vede che

$$\begin{aligned}\vec{v}(E) = & (\dot{z} - R_a \dot{\alpha} \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\theta} - R_a \dot{\theta} \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta}) \vec{i} + \\ & + (\dot{w} + R_a \dot{\alpha} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta} - R_a \dot{\theta} \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\theta}) \vec{j} + \\ & - R_a \dot{\alpha} \sin \tilde{\alpha} \vec{k}.\end{aligned}$$

Dobbiamo quindi determinare l'espressione di \dot{z} e di \dot{w} , ma queste possono essere ottenute derivando rispetto al tempo le espressioni (5.14) e (5.15) rispettivamente. Sfruttando anche gli angoli ausiliari, si ricava

$$\begin{aligned}\dot{z} = & \dot{x} - R \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta - R \dot{\theta} \sin \alpha \cos \theta - l \dot{\mu} \sin \mu \cos \theta - l \dot{\theta} \cos \mu \sin \theta + \\ & - l \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \mu \sin \theta - l \dot{\mu} \sin \alpha \cos \mu \sin \theta - l \dot{\theta} \sin \alpha \sin \mu \cos \theta + \\ & + b \dot{\mu} \cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} - b \dot{\theta} \sin \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} + b \dot{\alpha} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} - b \dot{\mu} \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} + \\ & + b \dot{\theta} \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} - d \dot{\mu} \sin \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} - d \dot{\theta} \cos \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} - d \dot{\alpha} \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} + \\ & - d \dot{\mu} \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} - d \dot{\theta} \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} + R_a \dot{\alpha} \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\theta} + R_a \dot{\theta} \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta}\end{aligned}\quad (6.12)$$

e

$$\begin{aligned}\dot{w} = & \dot{y} + R \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta - R \dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta - l \dot{\mu} \sin \mu \sin \theta + l \dot{\theta} \cos \mu \cos \theta + \\ & + l \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \mu \cos \theta + l \dot{\mu} \sin \alpha \cos \mu \cos \theta - l \dot{\theta} \sin \alpha \sin \mu \sin \theta + \\ & + b \dot{\mu} \cos \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} + b \dot{\theta} \sin \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} - b \dot{\alpha} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} + b \dot{\mu} \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} + \\ & + b \dot{\theta} \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} - d \dot{\mu} \sin \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} + d \dot{\theta} \cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} + d \dot{\alpha} \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} + \\ & + d \dot{\mu} \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \cos \tilde{\theta} - d \dot{\theta} \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \sin \tilde{\theta} - R_a \dot{\alpha} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\theta} + R_a \dot{\theta} \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\theta}.\end{aligned}\quad (6.13)$$

Osserviamo che la componente lungo \vec{k} di $\vec{v}(E)$ può essere ricavata impiegando la (5.13). Infatti, possiamo riscrivere tale relazione nella forma

$$\begin{aligned}R_a \cos \tilde{\alpha} = & (r - r_a) + R \cos \alpha + l \cos \alpha \sin \mu - b \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + \\ & + d(\cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi),\end{aligned}$$

e derivando entrambi i membri rispetto al tempo, si ottiene l'espressione di $R_a \dot{\alpha} \sin \tilde{\alpha}$ rispetto alle coordinate lagrangiane. In seguito faremo spesso ricorso a questo espediente, ovvero esprimere $R_a \cos \tilde{\alpha}$ tramite la (5.13).

6.2 Vincoli anolonomi

Nel capitolo precedente, quando abbiamo studiato la geometria della bicicletta, si è tenuto conto dei vincoli olonomi per ricavare il numero di coordinate generalizzate necessarie per descrivere lo spazio delle configurazioni per il sistema meccanico. Adesso che stiamo considerando la cinematica della bicicletta, invece, si devono imporre i vincoli sulle velocità dei punti di contatto delle due ruote con il piano del terreno. In questo modo, come ricaviamo dal capitolo 2, otteniamo i *gradi di libertà* del sistema.

Vediamo allora che i vincoli anolonomi associati alla bicicletta sono quelli legati al rotolamento delle due ruote sul piano della strada. È evidente che, in ogni caso, la particolare forma delle equazioni vincolari anolonome dipende dal modello di ruota considerato. Nel caso in esame, le due ruote si suppone siano due tori rigidi: questo modello è utile per lo studio del moto di una bicicletta i cui pneumatici siano molto gonfiati.

Ricaviamo quindi l'espressione delle equazioni vincolari a partire dalla ruota posteriore. Il raggio della ruota è, come ricordiamo, $\rho = R + r$, mentre x ed y sono le coordinate del punto A' di contatto del toro con il piano della strada. Un incremento dell'angolo χ della quantità $d\chi$, mantenendo θ ed α costanti, corrisponde ad uno spostamento del punto A' pari a $ds_1 = (R + r \cos \alpha)d\chi$, come mostrato in figura 6.1. Osserviamo che ds_1 dipende dal raggio della sezione torica r secondo il coseno dell'angolo di rollio: più la ruota è inclinata, minore è lo spostamento longitudinale di A' .

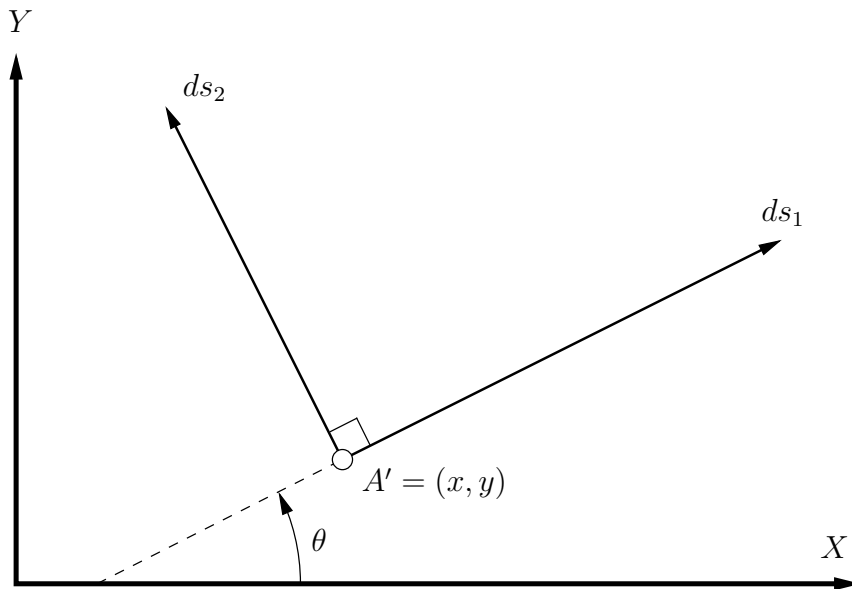


Figura 6.1: Spostamenti infinitesimi del punto di contatto posteriore.

D'altra parte, se incrementiamo l'angolo α della quantità $d\alpha$, tenendo costanti θ e χ , lo spostamento laterale del punto di contatto della ruota posteriore risulta essere $ds_2 = r d\alpha$. Notiamo che il segno di tale spostamento è positivo nella direzione mostrata in figura 6.1, in accordo con le convenzioni adottate per l'angolo di rollio.

A questo punto, si deve correlare la velocità del punto A' con questi due spostamenti, laterale e longitudinale. In particolare, essendo $\vec{v}(A') = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$, si richiede che

$$\langle \vec{v}(A'), \vec{i}_{S_{A'}} \rangle = \frac{ds_1}{dt}$$

e

$$\langle \vec{v}(A'), \vec{j}_{S_{A'}} \rangle = \frac{ds_2}{dt}.$$

Svolgendo quindi i due prodotti scalari e differenziando rispetto al tempo i due spostamenti, possiamo scrivere i vincoli anolonomi per la ruota posteriore nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = (R + r \cos \alpha) \dot{\chi}, & (6.14a) \\ \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = -r \dot{\alpha}. & (6.14b) \end{cases}$$

Osservazione 6.1. L'espressione dei vincoli anolonomi per la ruota anteriore può essere ottenuta anche seguendo un ragionamento diverso. Infatti, possiamo scomporre i due spostamenti ds_1 e ds_2 lungo gli assi X ed Y . In questo modo si ottiene

$$\begin{cases} dx = ds_1 \cos \theta - ds_2 \sin \theta, \\ dy = ds_1 \sin \theta + ds_2 \cos \theta, \end{cases}$$

e differenziando rispetto al tempo si ricava

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\dot{\alpha} \sin \theta + (R + r \cos \alpha)\dot{\chi} \cos \theta, \\ \dot{y} = r\dot{\alpha} \cos \theta + (R + r \cos \alpha)\dot{\chi} \sin \theta. \end{cases} \quad (6.15)$$

Chiaramente le due espressioni dei vincoli di non slittamento laterale e longitudinale sono tra loro equivalenti, e si ricava una dall'altra in pochi passaggi. Mentre le espressioni (6.14) risultano di facile impiego per imporre i vincoli nella Lagrangiana, impiegheremo le (6.15) per scrivere la matrice associata alla connessione di Ehresmann.

Osservazione 6.2. Nel caso in cui si assuma che la ruota sia un disco rigido, possiamo esprimere i vincoli di non slittamento dalle equazioni vincolari scritte sopra, ponendo $r = 0$. I vincoli così ottenuti sono analoghi a quelli per *falling disk* introdotti nell'esempio 2.2 a pagina 25. Però, il modello che si determina in questo modo risulta evidentemente più povero e meno adatto alla descrizione del sistema reale.

Trovata l'espressione dei vincoli anolonomi per la ruota posteriore, bisogna determinare le equazioni vincolari per la velocità del punto di contatto anteriore. Per tali relazioni, conviene considerare gli angoli ausiliari ed esprimere le coordinate di F' con z e w . Così facendo, in analogia con la ruota posteriore, i vincoli risultano essere della forma

$$\begin{cases} \dot{z} \cos \tilde{\theta} + \dot{w} \sin \tilde{\theta} = (R_a + r_a \cos \tilde{\alpha})\dot{\chi}_a, \\ \dot{z} \sin \tilde{\theta} - \dot{w} \cos \tilde{\theta} = -r_a \dot{\tilde{\alpha}}. \end{cases} \quad (6.16a)$$

$$(6.16b)$$

In conclusione, abbiamo un totale di quattro vincoli anolonomi imposti sul sistema. Pertanto, il numero di gradi di libertà che presenta la bicicletta risulta essere

$$g = 7 - 2 \times 2 = 3.$$

Dobbiamo quindi stabilire i gradi di libertà per il sistema. Infatti, queste relazioni permettono di vincolare quattro a scelta delle sette velocità generalizzate alle tre rimanenti. In particolare, quando la bicicletta si muove in avanti, è noto che il conducente esercita un momento sulla ruota posteriore e può controllare sia l'angolo di rollio sia l'angolo di sterzo. Pertanto, risulta naturale preferire come gradi di libertà appunto la rotazione propria χ e gli angoli α e ψ . Allora, dobbiamo esplicitare le velocità lagrangiane nelle relazioni (6.16) ed esprimere $\dot{\theta}$ e $\dot{\chi}_a$ in funzione di $\dot{\alpha}$, $\dot{\psi}$ e $\dot{\chi}$. Chiaramente, sulle velocità libere che selezioniamo adesso saranno poi introdotti i relativi controlli.

Osservazione 6.3. Come abbiamo ricordato adesso, la scelta dei gradi di libertà non è univoca. Se ad esempio consideriamo una bicicletta in fase di frenata, supponendo che il momento frenante agisca solo sulla ruota anteriore, dobbiamo vincolare χ invece di χ_a quando si esplicitano i vincoli (6.16). In questo caso, infatti, il controllo viene effettuato sulla ruota anteriore.

6.2.1 Espressione dei vincoli anteriori rispetto alle velocità generalizzate

Per esprimere i vincoli (6.16) in funzione delle velocità lagrangiane occorre determinare subito il coseno ed il seno dell'angolo $\tilde{\theta}$. Questo può essere fatto sfruttando l'uguaglianza che sussiste tra

ciascun elemento della matrice (5.7) ed il corrispondente della matrice (5.8). In particolare, risulta che

$$\operatorname{sen} \tilde{\theta} = \frac{\cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta + \cos \alpha \cos \psi \operatorname{sen} \theta}{\cos \tilde{\alpha}}$$

e

$$\cos \tilde{\theta} = \frac{\cos \alpha \cos \psi \cos \theta - \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi \cos \theta}{\cos \tilde{\alpha}},$$

dove $\cos \tilde{\alpha}$ si ricava dall'uguaglianza (5.9).

Consideriamo quindi per prima l'equazione vincolare (6.16b). Sostituendo le espressioni del seno e del coseno di $\tilde{\theta}$ ricavate adesso e quelle per \dot{z} e \dot{w} ottenute in precedenza (vedi (6.12) e (6.13)), il vincolo viene esplicitato nella forma

$$\begin{aligned} & (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \operatorname{sen} \theta) \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi - (\dot{x} \operatorname{sen} \theta - \dot{y} \cos \theta) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi + \\ & + (\dot{x} \operatorname{sen} \theta - \dot{y} \cos \theta) \cos \alpha \cos \psi + R \dot{\alpha} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi - R \dot{\alpha} \cos^2 \alpha \cos \psi + \\ & - R \dot{\theta} \operatorname{sen} \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi - l \dot{\mu} \operatorname{sen} \mu \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi + l \dot{\theta} \cos \mu \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi + \\ & - l \dot{\theta} \cos \alpha \cos \mu \cos \psi + l \dot{\alpha} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \mu \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi - l \dot{\theta} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \mu \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi + \\ & + l \dot{\mu} \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \mu \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi - l \dot{\mu} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \mu \cos \psi - l \dot{\alpha} \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \mu \cos \psi + \\ & - b \dot{\theta} \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} + b \dot{\alpha} \cos^2 \tilde{\alpha} \cos \mu - b \dot{\mu} \operatorname{sen} \tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} - d \dot{\theta} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} - d \dot{\alpha} \cos^2 \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} + \\ & - d \dot{\mu} \operatorname{sen} \tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} + R_a \dot{\alpha} \cos^2 \tilde{\alpha} = -r_a \dot{\alpha} \cos \tilde{\alpha}, \end{aligned}$$

dove abbiamo moltiplicato entrambi i membri per $\cos \tilde{\alpha}$. A questo punto, sostituiamo i vincoli (6.14) in tale espressione ed esprimiamo $R_a \cos \tilde{\alpha}$ per mezzo della (5.13). Si ottiene così la seguente espressione di $\dot{\theta}$ rispetto alle altre velocità:

$$\begin{aligned} & \dot{\theta} [R \operatorname{sen} \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi - l \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \psi + l \cos \alpha \cos \mu \cos \psi + \\ & + b \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} + d \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu}] = \dot{\chi} \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi (R + r \cos \alpha) + \\ & + \dot{\mu} [l \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \psi - l \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \cos \mu \cos \psi + R \cos^2 \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi + \\ & + r \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi - b \operatorname{sen} \alpha \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} - d \operatorname{sen} \alpha \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} + \\ & + \dot{\psi} [r \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} + R \cos \alpha \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} + l \cos \alpha \operatorname{sen} \mu \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} + \\ & - b \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} - d \cos^2 \alpha \cos^2(\mu + \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Per poter meglio lavorare con questa relazione piuttosto estesa, conviene scriverla nella forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta} g(\alpha, \psi) &= (\dot{\chi} + \dot{\mu})(R + r \cos \alpha) \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi + \\ &+ [\dot{\mu} \operatorname{sen} \alpha + \dot{\psi} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon)] g(\alpha, \psi) + \dot{\psi} r(\alpha, \psi) \end{aligned}$$

dove si definiscono le funzioni

$$\begin{aligned} g(\alpha, \psi) &= R \operatorname{sen} \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi - l \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \psi + l \cos \alpha \cos \mu \cos \psi + \\ &+ b \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu} + d \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} r(\alpha, \psi) &= (\cos \alpha \cos \psi - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi)(R \cos \alpha \operatorname{sen}(\mu + \varepsilon) + l \cos \alpha \cos \varepsilon) + \\ &+ r \cos \tilde{\alpha} \operatorname{sen} \tilde{\mu}. \end{aligned}$$

Osserviamo quindi che il minimo di $g(\alpha, \psi)$ risulta diverso da zero per ogni valore di α e ψ nell'intervallo in cui sono definiti.¹ Pertanto, è possibile dividere ambedue i membri per $g(\alpha, \psi)$, in modo da ottenere un'espressione esplicita di $\dot{\theta}$ in funzione delle altre velocità.

¹Questo può essere verificato numericamente, imponendo per i parametri geometrici della bicicletta degli intervalli ragionevoli.

Tuttavia, si nota che l'espressione per $\dot{\theta}$ ottenuta non è ancora solo in funzione delle velocità generalizzate, ma nel membro destro compare anche $\dot{\mu}$. Pertanto, sapendo che il beccheggio dipende dall'angolo di rollio e da quello di sterzo, vogliamo esprimere la sua derivata appunto rispetto a $\dot{\alpha}$ e $\dot{\psi}$. A tal fine, consideriamo l'equazione (5.13) e deriviamo ambedue i membri rispetto al tempo, così ottenendo

$$\begin{aligned} & -R\dot{\alpha} \sin \alpha - l\dot{\alpha} \sin \alpha \sin \mu + l\dot{\mu} \cos \alpha \cos \mu + b\dot{\alpha} \sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + \\ & + b\dot{\mu} \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) - d\dot{\alpha} \sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \psi + d\dot{\mu} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \psi + \\ & - d\dot{\psi} \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi - d\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \psi - d\dot{\psi} \sin \alpha \cos \psi + R_a \dot{\tilde{\alpha}} \sin \tilde{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Quindi, svolgendo i calcoli e raggruppando i termini che moltiplicano le stesse velocità, si ricava

$$\begin{aligned} & \dot{\mu} [\cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \sin \tilde{\alpha} \sin \psi ((r - r_a) + R \cos \alpha + l \cos \alpha \sin \mu - b \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} + d \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu}) + \\ & + \cos^2 \tilde{\alpha} (l \cos \alpha \cos \mu + b \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) + d \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \cos \psi)] = \\ & = -\dot{\psi} \sin \tilde{\alpha} [\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} ((r - r_a) + R \cos \alpha + l \cos \alpha \sin \mu - b \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu}) - d \cos^2 \tilde{\alpha} \cos^2 \tilde{\mu}] + \\ & - \dot{\alpha} [\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} ((r - r_a) \sin(\mu + \varepsilon) \sin \tilde{\alpha} + R \sin \psi + l \sin \mu \sin \psi + b \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi) + \\ & + \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} ((r - r_a) \cos(\mu + \varepsilon) \cos \psi \sin \tilde{\alpha} - d \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi)], \end{aligned}$$

espressione la quale può essere riscritta nella forma

$$\dot{\mu} n(\alpha, \psi) = -\dot{\psi} p(\alpha, \psi) - \dot{\alpha} q(\alpha, \psi),$$

avendo introdotto le funzioni

$$\begin{aligned} n(\alpha, \psi) &= \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \sin \tilde{\alpha} \sin \psi ((r - r_a) + R \cos \alpha + l \cos \alpha \sin \mu + \\ & - b \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} + d \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu}) + \\ & + \cos^2 \tilde{\alpha} (l \cos \alpha \cos \mu + b \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) + d \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \cos \psi), \\ p(\alpha, \psi) &= \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} ((r - r_a) + R \cos \alpha + l \cos \alpha \sin \mu - b \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu}) - d \cos^2 \tilde{\alpha} \cos^2 \tilde{\mu}, \\ q(\alpha, \psi) &= \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} ((r - r_a) \sin(\mu + \varepsilon) \sin \tilde{\alpha} + R \sin \psi + l \sin \mu \sin \psi + b \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi) + \\ & + \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} ((r - r_a) \cos(\mu + \varepsilon) \cos \psi \sin \tilde{\alpha} - d \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi). \end{aligned}$$

Vediamo dunque che, come $g(\alpha, \psi)$, anche la funzione $n(\alpha, \psi)$ risulta strettamente maggiore di zero quando i parametri geometrici della bicicletta sono scelti in intervalli di valori ragionevoli, pertanto possiamo dividere i due membri per $n(\alpha, \psi)$ ottenendo così

$$\dot{\mu} = -\dot{\psi} \frac{p(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} - \dot{\alpha} \frac{q(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)}. \quad (6.17)$$

A questo punto, sostituiamo tale espressione di $\dot{\mu}$ nel vincolo per $\dot{\theta}$, ricavando in questo modo

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \dot{\chi} (R + r \cos \alpha) \frac{\cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi}{g(\alpha, \psi)} + \\ & + \dot{\alpha} \left[\frac{q(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} \sin \alpha - (R + r \cos \alpha) \frac{q(\alpha, \psi) \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi}{n(\alpha, \psi) g(\alpha, \psi)} \right] + \\ & + \dot{\psi} \left[\frac{p(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} \sin \alpha + \frac{r(\alpha, \psi)}{g(\alpha, \psi)} + \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) - (R + r \cos \alpha) \frac{p(\alpha, \psi) \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi}{n(\alpha, \psi) g(\alpha, \psi)} \right]. \end{aligned}$$

Nondimeno, anche questa espressione risulta difficile da gestire, soprattutto quando dovremo sostituire il vincolo nella Lagrangiana. Pertanto, riscriviamo tale espressione nella forma

$$\dot{\theta} = \dot{\chi} \hat{m}(\alpha, \psi) + \dot{\alpha} \hat{n}(\alpha, \psi) + \dot{\psi} \hat{p}(\alpha, \psi), \quad (6.18)$$

con ovvio significato delle funzioni introdotte.

Passiamo poi al vincolo (6.16a). Anche in questo caso dobbiamo sostituire $\tilde{\theta}$ e $\cos \tilde{\theta}$, così come \dot{z} e \dot{w} , tramite le espressioni che abbiamo determinato in precedenza rispetto alle coordinate lagrangiane. In questo caso si ricava

$$\begin{aligned}
& (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \cos \alpha \cos \psi - (\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta) \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi + \\
& - (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi + R \dot{\alpha} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi + \\
& + R \dot{\theta} \sin^2 \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi - R \dot{\theta} \sin \alpha \cos \alpha \cos \psi + l \dot{\mu} \sin \alpha \sin \mu \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi + \\
& - l \dot{\mu} \cos \alpha \sin \mu \cos \psi + l \dot{\theta} \cos \mu \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi + l \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \mu \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi + \\
& + l \dot{\mu} \sin \alpha \cos \mu \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi + l \dot{\theta} \sin^2 \alpha \sin \mu \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi + \\
& - l \dot{\theta} \sin \alpha \cos \alpha \sin \mu \cos \psi + b \dot{\tilde{\mu}} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} + b \dot{\tilde{\theta}} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} \sin \tilde{\alpha} - d \dot{\tilde{\mu}} \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} + \\
& - d \dot{\tilde{\theta}} \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \sin \tilde{\alpha} + R_a \dot{\tilde{\theta}} \sin \tilde{\alpha} = (R_a + r_a \cos \tilde{\alpha}) \dot{\chi}_a \cos \tilde{\alpha}.
\end{aligned}$$

Quindi, sfruttando i vincoli (6.14) per eliminare \dot{x} e \dot{y} dall'espressione precedente, e mettendo in evidenza le velocità in gioco, otteniamo

$$\begin{aligned}
& \dot{\chi}(R + r \cos \alpha)(\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi) + \\
& + \dot{\theta}[(r - r_a) \sin \tilde{\alpha} + R \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi + l \cos \varepsilon \sin \psi] + \\
& + \dot{\mu} \left[\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} \frac{\sin \tilde{\alpha} \sin \psi}{\cos^2 \tilde{\alpha}} ((r - r_a) + R \cos \alpha + l \cos \alpha \sin \mu) + \right. \\
& \quad + l(\sin \alpha \sin \varepsilon \sin \psi - \cos \alpha \sin \mu \cos \psi) + \\
& \quad \left. + \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \tilde{\alpha}} (\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi) (b \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} - d \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu}) \right] + \\
& + \dot{\alpha} \frac{\cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi}{\cos^2 \tilde{\alpha}} [(r - r_a) + R \cos \alpha + l \cos \alpha \sin \mu - b \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} + \\
& \quad + d \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu} + r_a \cos^2 \tilde{\alpha}] + \\
& + \dot{\psi} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \frac{\sin \tilde{\alpha}}{\cos^2 \tilde{\alpha}} [(r - r_a) + R \cos \alpha + l \cos \alpha \sin \mu + \\
& \quad - b \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\mu} + d \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\mu}] = \\
& = \dot{\chi}_a (R_a + r_a \cos \tilde{\alpha}) \cos \tilde{\alpha},
\end{aligned}$$

la quale riscriviamo nella forma

$$\begin{aligned}
& \dot{\chi}(R + r \cos \alpha) \hat{a}(\alpha, \psi) + \dot{\theta} \hat{b}(\alpha, \psi) + \dot{\mu} \hat{c}(\alpha, \psi) + \dot{\alpha} \frac{\cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi}{\cos^2 \tilde{\alpha}} (R_a + r_a \cos \tilde{\alpha}) \cos \tilde{\alpha} + \\
& + \dot{\psi} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \frac{\sin \tilde{\alpha}}{\cos^2 \tilde{\alpha}} R_a \cos \tilde{\alpha} = \dot{\chi}_a (R_a + r_a \cos \tilde{\alpha}) \cos \tilde{\alpha},
\end{aligned}$$

con chiaro significato delle funzioni definite e per le quali abbiamo sfruttato la relazione (5.13). A questo punto, esplicitiamo $\dot{\mu}$ attraverso la (6.17), ottenendo

$$\begin{aligned}
& \dot{\chi}(R + r \cos \alpha) \hat{a}(\alpha, \psi) + \dot{\theta} \hat{b}(\alpha, \psi) + \\
& + \dot{\alpha} \left[\frac{\cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi}{\cos^2 \tilde{\alpha}} (R_a + r_a \cos \tilde{\alpha}) \cos \tilde{\alpha} - \frac{q(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} \hat{c}(\alpha, \psi) \right] + \\
& + \dot{\psi} \left[\cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \frac{\sin \tilde{\alpha}}{\cos^2 \tilde{\alpha}} R_a \cos \tilde{\alpha} - \frac{p(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} \hat{c}(\alpha, \psi) \right] = \\
& = \dot{\chi}_a (R_a + r_a \cos \tilde{\alpha}) \cos \tilde{\alpha}.
\end{aligned}$$

Infine, sostituendo l'espressione di $\dot{\theta}$ ottenuta dal vincolo (6.18), si ricava

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_a (R_a + r_a \cos \tilde{\alpha}) \cos \tilde{\alpha} &= \\ &= \dot{\chi} \left[(R + r \cos \alpha) \hat{a}(\alpha, \psi) + \hat{m}(\alpha, \psi) \hat{b}(\alpha, \psi) \right] + \\ &+ \dot{\alpha} \left[\frac{\cos(\mu + \varepsilon) \operatorname{sen} \psi}{\cos^2 \tilde{\alpha}} (R_a + r_a \cos \tilde{\alpha}) \cos \tilde{\alpha} - \frac{q(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} \hat{c}(\alpha, \psi) + \hat{n}(\alpha, \psi) \hat{b}(\alpha, \psi) \right] + \\ &+ \dot{\psi} \left[\cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \frac{\operatorname{sen} \tilde{\alpha}}{\cos^2 \tilde{\alpha}} R_a \cos \tilde{\alpha} - \frac{p(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} \hat{c}(\alpha, \psi) + \hat{p}(\alpha, \psi) \hat{b}(\alpha, \psi) \right]. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, per semplificare i calcoli quando andremo a sostituire il vincolo nella Lagrangiana, riscriviamo tale equazione vincolare nella forma

$$\dot{\chi}_a = \dot{\chi} \hat{g}(\alpha, \psi) + \dot{\alpha} \hat{h}(\alpha, \psi) + \dot{\psi} \hat{l}(\alpha, \psi), \quad (6.19)$$

dove le funzioni sono definite come i coefficienti delle velocità che compaiono nella precedente espressione estesa, divisi per $(R_a + r_a \cos \tilde{\alpha}) \cos \tilde{\alpha}$, termine chiaramente diverso da zero essendo sia R_a sia r_a grandezze positive.

Ora che abbiamo ricavato l'espressione di tutti i vincoli anolonomi rispetto alle velocità generalizzate, siamo in possesso di tutti gli elementi necessari per studiare la dinamica della bicicletta e ricavarne le equazioni di moto.

Capitolo 7

Dinamica della bicicletta

Una volta determinate le velocità dei corpi che costituiscono la bicicletta e le espressioni dei vincoli di non slittamento nei punti di contatto delle due ruote, possiamo ricavare le equazioni di moto del sistema per mezzo delle equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi anonomi introdotte nel capitolo 4. A tal fine, dovendo scrivere la Lagrangiana per la bicicletta, determiniamo inizialmente l'energia cinetica del sistema ed il potenziale associato alle forze esterne.

7.1 Energia cinetica

Volendo determinare l'espressione dell'energia cinetica totale T del sistema, osserviamo che questa è data dalla somma delle energie cinetiche dei quattro corpi che compongono la bicicletta, qualora siano tutte calcolate rispetto al sistema inerziale. Inoltre, possiamo fare riferimento al (secondo) *teorema di König*, per il quale l'energia cinetica di un corpo rigido, purché ci si riferisca al centro di massa, è data dalla somma della parte traslatoria con quella rotatoria. Pertanto si ottiene:

$$T_i = \frac{1}{2}m_i v^2(P) + \frac{1}{2}\langle \omega_i, \sigma_i(P)\omega_i \rangle, \quad (7.1)$$

avendo indicato con m_i la massa dall' i -esimo corpo, con P il centro di massa dello stesso, e con $\sigma_i(P)$ il suo tensore di inerzia espresso nel relativo sistema solidale.

7.1.1 Ruota posteriore

In primo luogo, ricaviamo l'energia cinetica T_1 della ruota posteriore. Sfruttando l'espressione (6.5) per la velocità del punto B , centro di massa della ruota posteriore, se ne calcola il quadrato ottenendo

$$v^2(B) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\alpha}^2 + R^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + \\ + 2R\dot{\alpha} \cos \alpha (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - 2R\dot{\theta} \sin \alpha (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta).$$

Questo risultato permette di determinare la parte traslatoria dell'energia cinetica.

Per quanto invece riguarda la componente rotatoria, dobbiamo sfruttare la velocità angolare (6.4). L'espressione del tensore di inerzia rispetto a B nel sistema solidale risulta essere

$$\sigma_1(B) = \begin{pmatrix} I_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1xx} \end{pmatrix},$$

dove

$$I_{1xx} = \left(\frac{5}{8}r^2 + \frac{1}{2}R^2 \right) m_1 \quad I_{1yy} = \left(\frac{3}{4}r^2 + R^2 \right) m_1,$$

ne consegue che

$$\langle \vec{\omega}_{S_{B_r}}, \sigma_1(B) \vec{\omega}_{S_{B_r}} \rangle = I_{1xx}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha) + I_{1yy}(\dot{\chi} + \dot{\theta} \sin \alpha)^2.$$

In conclusione, la forma dell'energia cinetica per la ruota posteriore è data da

$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{1}{2} m_1 \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2 \dot{\alpha}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \right] + \\ & + m_1 R \left[\dot{\alpha} \cos \alpha (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - \dot{\theta} \sin \alpha (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \right] + \\ & + \frac{1}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha) I_{1xx} + \frac{1}{2} (\dot{\chi} - \dot{\theta} \sin \alpha)^2 I_{1yy}. \end{aligned}$$

7.1.2 Retrotreno

Passando al retrotreno, supponiamo che la massa m_2 tenga conto anche di quella del ciclista, mentre il tensore di inerzia, assumendo che il corpo presenta simmetria solo rispetto al piano $x_B z_B$, ha la forma

$$\sigma_2(G) = \begin{pmatrix} I_{2xx} & 0 & I_{2xz} \\ 0 & I_{2yy} & 0 \\ I_{2xz} & 0 & I_{2zz} \end{pmatrix}.$$

In questo caso, non conosciamo l'espressione degli elementi del tensore $\sigma_2(G)$, in quanto il telaio può avere una qualsiasi struttura fisica, purché simmetrica rispetto al piano $x_B z_B$ suddetto.

Calcoliamo dunque il quadrato della velocità del centro di massa. Impieghiamo l'espressione (6.7), osservando che il prodotto scalare deve essere fatto nella stessa base. Allora, il quadrato di ciascun addendo si può calcolare facilmente sommando il quadrato delle componenti del singolo vettore, mentre i prodotti misti si determinano moltiplicando scalarmente la coppia di vettori nella stessa base. In questo modo, si evita di dover esprimere i vettori rispetto ad un unico sistema di riferimento, chiaramente non ottimale per tutti, e quindi si risparmia il calcolo di elementi che comunque si semplificherebbero. In definitiva, svolgendo i conti, si arriva all'espressione

$$\begin{aligned} v^2(G) = & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2 \dot{\alpha}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + (h_2^2 + l_2^2) \dot{\mu}^2 + \\ & + (h_2^2 + l_2^2) \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^2 (l_2^2 \sin^2 \mu + h_2^2 \cos^2 \mu) + \\ & + \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha (l_2^2 \cos^2 \mu + h_2^2 \sin^2 \mu) + \\ & + 2[R \dot{\alpha} \cos \alpha (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - R \dot{\theta} \sin \alpha (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \\ & + (h_2^2 + l_2^2) \dot{\mu} \dot{\theta} \sin \alpha + (l_2^2 - h_2^2) \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha \sin \mu \cos \mu + \\ & + (\cos^2 \mu - \sin^2 \mu) l_2 h_2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha + l_2 h_2 \dot{\alpha}^2 \sin \mu \cos \mu + \\ & - h_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \sin \mu \cos \mu + \\ & + R(h_2 \cos \mu + l_2 \sin \mu) \dot{\theta} \dot{\mu} \sin \alpha + R(h_2 \cos \mu + l_2 \sin \mu) \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + \\ & + R(h_2 \cos \mu + l_2 \sin \mu) \dot{\alpha}^2 + R(l_2 \cos \mu - h_2 \sin \mu) \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha + \\ & - \dot{\mu} (h_2 \cos \mu + l_2 \sin \mu) (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \\ & + \dot{\mu} \sin \alpha (l_2 \cos \mu - h_2 \sin \mu) (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) + \\ & - \dot{\theta} \sin \alpha (h_2 \cos \mu + l_2 \sin \mu) (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \\ & + \dot{\theta} (l_2 \cos \mu - h_2 \sin \mu) (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) + \\ & + \dot{\alpha} \cos \alpha (l_2 \sin \mu + h_2 \cos \mu) (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta)], \end{aligned}$$

dalla quale si deriva la parte traslatoria dell'energia cinetica.

Per la componente rotatoria, invece, sfruttiamo l'espressione nel sistema solidale della velocità angolare (6.6), per cui si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \vec{\omega}_{S_B}, \sigma_2(G) \vec{\omega}_{S_B} \rangle &= I_{2xx}(-\dot{\alpha} \cos \mu + \dot{\theta} \cos \alpha \sin \mu)^2 + I_{2yy}(\dot{\mu} + \dot{\theta} \sin \alpha)^2 + \\ &+ I_{2zz}(\dot{\alpha} \sin \mu + \dot{\theta} \cos \alpha \cos \mu)^2 + \\ &+ 2I_{2xz}(\dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \sin \mu \cos \mu - \dot{\alpha}^2 \sin \mu \cos \mu - \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha \cos(2\mu)). \end{aligned}$$

In sostanza, l'espressione completa dell'energia cinetica per il retrotreno risulta essere

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m_2 [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2 \dot{\alpha}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + (h_2^2 + l_2^2) \dot{\mu}^2 + \\ &+ (h_2^2 + l_2^2) \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^2 (l_2^2 \sin^2 \mu + h_2^2 \cos^2 \mu) + \\ &+ \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha (l_2^2 \cos^2 \mu + h_2^2 \sin^2 \mu)] + \\ &+ m_2 [R \dot{\alpha} \cos \alpha (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - R \dot{\theta} \sin \alpha (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \\ &+ (h_2^2 + l_2^2) \dot{\mu} \dot{\theta} \sin \alpha + (l_2^2 - h_2^2) \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha \sin \mu \cos \mu + \\ &+ (\cos^2 \mu - \sin^2 \mu) l_2 h_2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha + l_2 h_2 \dot{\alpha}^2 \sin \mu \cos \mu + \\ &- h_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \sin \mu \cos \mu + \\ &+ R (h_2 \cos \mu + l_2 \sin \mu) \dot{\theta} \dot{\mu} \sin \alpha + R (h_2 \cos \mu + l_2 \sin \mu) \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + \\ &+ R (h_2 \cos \mu + l_2 \sin \mu) \dot{\alpha}^2 + R (l_2 \cos \mu - h_2 \sin \mu) \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha + \\ &- \dot{\mu} (h_2 \cos \mu + l_2 \sin \mu) (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \\ &+ \dot{\mu} \sin \alpha (l_2 \cos \mu - h_2 \sin \mu) (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) + \\ &- \dot{\theta} \sin \alpha (h_2 \cos \mu + l_2 \sin \mu) (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \\ &+ \dot{\theta} (l_2 \cos \mu - h_2 \sin \mu) (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) + \\ &+ \dot{\alpha} \cos \alpha (l_2 \sin \mu + h_2 \cos \mu) (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta)] + \\ &+ \frac{1}{2} I_{2xx} (-\dot{\alpha} \cos \mu + \dot{\theta} \cos \alpha \sin \mu)^2 + \frac{1}{2} I_{2yy} (\dot{\mu} + \dot{\theta} \sin \alpha)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} I_{2zz} (\dot{\alpha} \sin \mu + \dot{\theta} \cos \alpha \cos \mu)^2 + \\ &+ I_{2xz} (\dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \sin \mu \cos \mu - \dot{\alpha}^2 \sin \mu \cos \mu - \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha \cos(2\mu)). \end{aligned}$$

7.1.3 Avantreno

Indichiamo con m_3 la massa dello sterzo, pertanto possiamo calcolare la componente traslatoria dell'energia cinetica di tale corpo rigido quadrando l'espressione (6.11). In particolare, si ottiene

$$v^2(H) = v^2(C) + [\vec{\omega}_{S_D} \wedge (H - C)]^2 + 2\langle \vec{v}(C), \vec{\omega}_{S_D} \wedge (H - C) \rangle,$$

dove l'ultimo prodotto scalare viene calcolato nello stesso sistema di riferimento. Osserviamo quindi che il termine $v^2(C)$ può essere ottenuto da $v^2(G)$ ponendo $l_2 = l$ ed $h_2 = 0$. Il secondo termine a destra può invece essere determinato sfruttando la relazione

$$[\vec{\omega}_{S_D} \wedge (H - C)]^2 = \omega_{S_D}^2 (H - C)^2 - \langle \vec{\omega}_{S_D}, (H - C) \rangle^2.$$

Infine, per calcolare l'ultimo addendo conviene sfruttare opportunamente i sistemi di riferimento solidali, in modo analogo a quanto fatto per il retrotreno.

In sostanza, il quadrato della velocità del centro di massa risulta essere

$$\begin{aligned}
v^2(H) = & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + R^2\dot{\alpha}^2 + l^2\dot{\mu}^2 + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + l\dot{\alpha}^2 \sin^2 \mu + \\
& + l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \mu + h_3^2\dot{\alpha}^2 \cos^2(\mu + \varepsilon) + h_3^2\dot{\theta}^2(1 - \cos^2 \alpha \cos^2(\mu + \varepsilon)) + h_3^2\dot{\mu}^2 + \\
& + 2R[\dot{\alpha} \cos \alpha(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - \dot{\theta} \sin \alpha(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)] + \\
& + 2l[\dot{\mu} \sin \alpha \cos \mu(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - \dot{\mu} \sin \mu(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \\
& + \dot{\theta} \cos \mu(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - \dot{\theta} \sin \alpha \sin \mu(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \\
& + \dot{\alpha} \sin \mu \cos \alpha(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta)] + \\
& + 2h_3[\dot{\alpha} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon)(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) + \dot{\theta} \sin(\mu + \varepsilon)(\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta) + \\
& - \dot{\theta} \sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon)(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \dot{\mu} \sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon)(\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta) + \\
& - \dot{\mu} \cos(\mu + \varepsilon)(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)] + \\
& + 2[l^2\dot{\mu}\dot{\theta} \sin \alpha + l^2\dot{\alpha}\dot{\theta} \cos \alpha \sin \mu \cos \mu + Rl\dot{\theta}\dot{\mu} \sin \alpha + Rl\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \sin \mu + \\
& + Rl\dot{\alpha}^2 \sin \mu + Rl\dot{\alpha}\dot{\theta} \cos \alpha \cos \mu + h_3^2\dot{\theta}\dot{\mu} \sin \alpha - h_3^2\dot{\alpha}\dot{\theta} \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos(\mu + \varepsilon) + \\
& + lh_3(\dot{\alpha}^2 \sin \mu \cos(\mu + \varepsilon) - \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \sin \varepsilon - \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \mu + \\
& + \dot{\alpha}\dot{\theta} \cos \alpha \cos(2\mu + \varepsilon) - 2\dot{\mu}\dot{\theta} \sin \alpha \sin \varepsilon - \dot{\mu}^2 \sin \varepsilon) + \\
& + Rh_3(\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + \dot{\mu}\dot{\theta} \sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + \dot{\alpha}^2 \cos(\mu + \varepsilon) + \\
& - \dot{\alpha}\dot{\theta} \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon))].
\end{aligned}$$

Per quanto invece concerne la componente rotatoria dell'energia cinetica dello sterzo, consideriamo il tensore di inerzia della forma

$$\sigma_3(H) = \begin{pmatrix} I_{3xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{3yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3zz} \end{pmatrix},$$

in quanto abbiamo supposto che il centro di massa appartenga all'asse dello sterzo. Schematizziamo quindi l'avantreno come in figura 7.1, dove ciascuna asta ha sezione circolare costante s , con densità di massa δ , mentre le due manopole di lunghezza $d/2$ hanno densità di massa *doppia*, affinché il centro di massa appartenga all'asse dello sterzo. Inoltre, poiché la lunghezza d si suppone piccola, si possono trascurare i termini di inerzia dovuti alle due manopole e al segmento \overline{DE} . In questo modo, i tre elementi del tensore di inerzia si calcolano facilmente per mezzo del *teorema di Huygens-Steiner*. Allora abbiamo che

$$\begin{aligned}
I_{3xx} &= \left(\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{3}h^2 + e^2 - he \right) m_A + \left(\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{12}a^2 + e^2 \right) m_B, \\
I_{3yy} &= \left(\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{3}h^2 + e^2 - he \right) m_A + \left(\frac{1}{2}s^2 + e^2 \right) m_B, \\
I_{3zz} &= \left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4}h^2 + e^2 - he \right) m_A + \left(\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{12}a^2 + e^2 \right) m_B,
\end{aligned}$$

dove con $m_A = \delta\pi s^2 h$ ed $m_B = \delta\pi s^2 a$ si sono indicate le masse delle due aste considerate.

A questo punto, vediamo che l'espressione della velocità angolare (6.8) risulta abbastanza complicata, di conseguenza la forma esplicita dell'energia cinetica rotatoria è piuttosto estesa. Pertanto, scriviamo questa componente dell'energia cinetica senza esplicitare il prodotto, sfruttando poi le opportune regole quando si tratterà di calcolare le derivate parziali per ottenere le equazioni di moto.

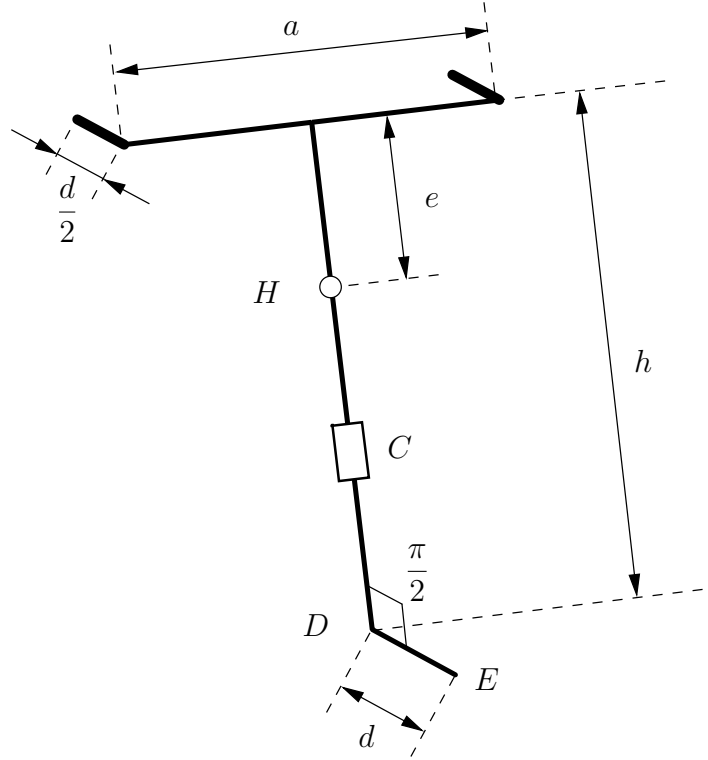


Figura 7.1: Schematizzazione dello sterzo.

In sostanza, l'energia cinetica per l'avantreno può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned}
T_3 = & \frac{1}{2} m_3 [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + R^2 \dot{\alpha}^2 + l^2 \dot{\mu}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + \\
& + l \dot{\alpha}^2 \sin^2 \mu + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \mu + h_3^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2(\mu + \varepsilon) + \\
& + h_3^2 \dot{\theta}^2 (1 - \cos^2 \alpha \cos^2(\mu + \varepsilon)) + h_3^2 \dot{\mu}^2] + \\
& + m_3 R [\dot{\alpha} \cos \alpha (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - \dot{\theta} \sin \alpha (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)] + \\
& + m_3 l [\dot{\mu} \sin \alpha \cos \mu (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - \dot{\mu} \sin \mu (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \\
& + \dot{\theta} \cos \mu (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - \dot{\theta} \sin \alpha \sin \mu (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \\
& + \dot{\alpha} \sin \mu \cos \alpha (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta)] + \\
& + m_3 h_3 [\dot{\alpha} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) + \dot{\theta} \sin(\mu + \varepsilon) (\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta) + \\
& - \dot{\theta} \sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \dot{\mu} \sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon) (\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta) + \\
& - \dot{\mu} \cos(\mu + \varepsilon) (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)] + \\
& + m_3 [l^2 \dot{\mu} \dot{\theta} \sin \alpha + l^2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha \sin \mu \cos \mu + R l \dot{\theta} \dot{\mu} \sin \alpha + R l \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \sin \mu + \\
& + R l \dot{\alpha}^2 \sin \mu + R l \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha \cos \mu + h_3^2 \dot{\theta} \dot{\mu} \sin \alpha - h_3^2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos(\mu + \varepsilon) + \\
& + l h_3 (\dot{\alpha}^2 \sin \mu \cos(\mu + \varepsilon) - \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \sin \varepsilon - \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \mu + \\
& + \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha \cos(2\mu + \varepsilon) - 2 \dot{\mu} \dot{\theta} \sin \alpha \sin \varepsilon - \dot{\mu}^2 \sin \varepsilon) + \\
& + R h_3 (\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + \dot{\mu} \dot{\theta} \sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + \dot{\alpha}^2 \cos(\mu + \varepsilon) + \\
& - \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon))] + \\
& + \frac{1}{2} \sigma_3(H) \omega_{SD}^2.
\end{aligned}$$

7.1.4 Ruota anteriore

Per la ruota anteriore, indichiamo con m_4 la massa della stessa, mentre, essendo la ruota un toro, il tensore di inerzia risulta chiaramente

$$\sigma_4(E) = \begin{pmatrix} I_{4xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{4yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{4xx} \end{pmatrix},$$

dove

$$I_{4xx} = \left(\frac{5}{8}r_a^2 + \frac{1}{2}R_a^2 \right) m_4 \quad I_{4yy} = \left(\frac{3}{4}r_a^2 + R_a^2 \right) m_4.$$

Quindi, al fine di ricavare l'energia cinetica per questo corpo rigido, utilizziamo l'analogia che sussiste con la ruota posteriore. In particolare, sfruttando gli angoli ausiliari e le velocità dei punti z e w , possiamo facilmente esprimere tale energia cinetica nella forma

$$\begin{aligned} T_4 = & \frac{1}{2}m_4 \left[\dot{z}^2 + \dot{w}^2 + R_a^2 \dot{\tilde{\alpha}}^2 + R_a^2 \dot{\tilde{\theta}}^2 \sin^2 \tilde{\alpha} \right] + \\ & + m_4 R_a \left[\dot{\tilde{\alpha}} \cos \tilde{\alpha} (-\dot{z} \sin \tilde{\theta} + \dot{w} \cos \tilde{\theta}) - \dot{\tilde{\theta}} \sin \tilde{\alpha} (\dot{z} \cos \tilde{\theta} + \dot{w} \sin \tilde{\theta}) \right] + \\ & + \frac{1}{2}(\dot{\tilde{\alpha}}^2 + \dot{\tilde{\theta}}^2 \cos^2 \tilde{\alpha}) I_{4xx} + \frac{1}{2}(\dot{\chi}_a - \dot{\tilde{\theta}} \sin \tilde{\alpha})^2 I_{4yy}. \end{aligned}$$

Osservazione 7.1. A proposito dell'espressione dell'energia cinetica T_4 , può nascere il dubbio se considerare o meno $\dot{\tilde{\mu}}$ nella componente traslatoria, ovvero scrivere l'ultimo addendo nella forma

$$\frac{1}{2}(\dot{\chi}_a - \dot{\tilde{\theta}} \sin \tilde{\alpha})^2 I_{4yy}.$$

Si può notare che l'espressione non è corretta, in quanto il giunto rotoidale E non trasmette la rotazione $\tilde{\mu}$ alla ruota. Tuttavia, è anche evidente che tale rotazione produce degli effetti sulla rotazione propria della ruota. Questi effetti sono però presi in considerazione attraverso i vincoli anolonomi, in quanto proprio la richiesta che non vi sia slittamento della ruota fa nascere la relazione tra $\dot{\tilde{\mu}}$ e $\dot{\chi}_a$. Infatti, supponiamo che la ruota anteriore ed il piano della strada siano levigati in modo che non vi sia attrito tra i due corpi. Allora, la ruota può sdrucciolare sul piano del terreno e se variamo l'angolo $\tilde{\mu}$, questa non presenta nessuna rotazione propria, ma semplicemente slitta sul piano della strada.

7.1.5 Energia cinetica totale

Una volta ricavata l'energia cinetica per i quattro corpi rigidi che costituiscono la bicicletta, calcoliamo l'energia cinetica totale sommando i contributi parziali ottenuti in precedenza, ovvero

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (7.2)$$

Chiaramente, l'espressione risulta estesa e difficile da gestire per derivare poi le equazioni di moto. Vediamo quindi come possiamo scriverla in una forma migliore.

In primo luogo consideriamo la componente rotatoria dell'energia cinetica. Introduciamo allora un vettore $\vec{\omega}_T \in \mathbb{R}^{12}$, le cui componenti sono le velocità angolari di ciascun corpo rigido, espresse nel sistema di riferimento solidale al corpo stesso. In sostanza, risulta

$$\vec{\omega}_T = \begin{pmatrix} \vec{\omega}_{SBr} \\ \vec{\omega}_{SB'r} \\ \vec{\omega}_{SD} \\ \vec{\omega}_{SEr} \end{pmatrix},$$

dove le velocità angolari sono quelle ricavate nel capitolo precedente. D'altra parte, possiamo anche definire un tensore caratterizzato dalla matrice a blocchi $\sigma_T \in M(12, \mathbb{R})$, i cui blocchi extradiagonali sono nulli, mentre quelli sulla diagonale corrispondono ai tensori d'inerzia dei singoli corpi rigidi, tutti espressi nel relativo sistema solidale. Pertanto risulta che

$$\sigma_T = \begin{pmatrix} \sigma_1(B) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(G) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3(H) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4(E) \end{pmatrix}.$$

Da un punto di vista fisico questi due elementi ora introdotti non hanno alcun significato, tuttavia permettono di esprimere l'energia cinetica rotatoria della bicicletta attraverso l'espressione concisa

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}_T, \sigma_T \vec{\omega}_T \rangle$$

Passando poi alla parte traslatoria, conviene distinguere i termini dovuti alla ruota posteriore, al retrotreno e allo sterzo da quello dato dalla ruota anteriore. Infatti, per quest'ultimo abbiamo già un'espressione relativamente semplice ottenuta attraverso l'impiego degli angoli ausiliari. Nei primi tre termini, invece, si possono riscontrare degli elementi simili, per cui possiamo scrivere la componente traslatoria dell'energia cinetica totale come

$$\begin{aligned} T_{\text{trasl}} = & \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\alpha}^2 + R^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha] + \\ & + \frac{1}{2}[m_2(h_2^2 + l_2^2) + m_3l^2](\dot{\mu}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha) + \frac{1}{2}(m_2l_2^2 + m_3l^2)\dot{\alpha}^2 \sin^2 \mu + \\ & + \frac{1}{2}m_2h_2^2\dot{\alpha}^2 \cos^2 \mu + \frac{1}{2}(m_2l_2^2 + m_3l^2)\dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \mu + \frac{1}{2}m_2h_2^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \mu + \\ & + m_3h_3^2[\dot{\alpha}^2 \cos^2(\mu + \varepsilon) + \dot{\theta}^2(1 - \cos^2 \alpha \cos^2(\mu + \varepsilon)) + \dot{\mu}^2] + \\ & + R(m_1 + m_2 + m_3)[\dot{\alpha} \cos \alpha(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) - \dot{\theta} \sin \alpha(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)] + \\ & + (m_2l_2 + m_3l)[(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta)(\dot{\mu} \sin \alpha \cos \mu + \dot{\theta} \cos \mu + \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \mu) + \\ & - (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)(\dot{\mu} \sin \mu + \dot{\theta} \sin \alpha \sin \mu)] + \\ & + m_2h_2[(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta)(\dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\mu} \sin \alpha \sin \mu - \dot{\theta} \sin \mu) + \\ & - (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)(\dot{\mu} \cos \mu + \dot{\theta} \sin \alpha \cos \mu)] + \\ & + [m_2(l_2^2 + h_2^2) + m_3l^2 + m_3h_3^2 - 2m_3lh_3 \sin \varepsilon]\dot{\theta}\dot{\mu} \sin \alpha + \\ & + [m_2(l_2^2 - h_2^2) + m_3l^2]\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \mu \cos \mu + \\ & + m_2l_2h_2[(\cos^2 \mu - \sin^2 \mu)\dot{\alpha}\dot{\theta} \cos \alpha + \dot{\alpha}^2 \sin \mu \cos \mu - \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \sin \mu \cos \mu] + \\ & + (m_2Rl_2 + m_3Rl)(\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \sin \mu + \dot{\theta}\dot{\mu} \sin \alpha \sin \mu + \dot{\alpha}^2 \sin \mu + \dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \mu) + \\ & - m_3h_3^2\dot{\alpha}\dot{\theta} \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos(\mu + \varepsilon) + \\ & + m_3lh_3[\dot{\alpha}^2 \sin \mu \cos(\mu + \varepsilon) - \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \sin \varepsilon - \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \mu + \\ & + \dot{\alpha}\dot{\theta} \cos \alpha \cos(2\mu + \varepsilon) - \dot{\mu}^2 \sin \varepsilon] + \\ & + m_3Rh_3[\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + \dot{\mu}\dot{\theta} \sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + \dot{\alpha}^2 \cos(\mu + \varepsilon) + \\ & - \dot{\alpha}\dot{\theta} \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon)] + T_{4\text{trasl}}. \end{aligned}$$

Sia quindi $M = m_1 + m_2 + m_3$, ed introduciamo inoltre le seguenti costanti:

$$\begin{aligned} A &= m_2(l_2^2 + h_2^2) + m_3l^2, & D &= A + m_3h_3^2 - 2m_3lh_3 \sin \varepsilon, \\ B &= m_2l_2^2 + m_2l^2, & E &= B - m_2h_2^2, \\ C &= m_2l_2 + m_3l, & F &= RC \end{aligned}$$

Possiamo dunque scrivere la componente traslatoria dell'energia cinetica raccogliendo i termini che moltiplicano le stesse velocità, così ricavando

$$\begin{aligned}
T_{\text{trasl}} &= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \\
&+ \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2[MR^2 + B \text{sen}^2 \mu + m_2 h_2^2 \cos^2 \mu + m_3 h_3^2 \cos^2(\mu + \varepsilon) + \\
&+ 2m_2 l_2 h_2 \text{sen} \mu \cos \mu + 2F \text{sen} \mu + 2m_3 l h_3 \text{sen} \mu \cos(\mu + \varepsilon) + \\
&+ 2m_3 R h_3 \cos(\mu + \varepsilon)] + \\
&+ \frac{1}{2}\dot{\theta}^2[MR^2 \text{sen}^2 \alpha + A \text{sen}^2 \alpha + B \cos^2 \alpha \cos^2 \mu + m_2 h_2^2 \cos^2 \alpha \text{sen}^2 \mu + \\
&+ m_3 h_3^2(1 - \cos^2 \alpha \cos^2(\mu + \varepsilon)) - 2m_2 l_2 h_2 \cos^2 \alpha \text{sen} \mu \cos \mu + \\
&+ 2m_3 R h_3 \text{sen}^2 \alpha \cos(\mu + \varepsilon)] + \\
&+ \frac{1}{2}\dot{\mu}^2[A + m_3 h_3^2 - 2m_3 l h_3 \text{sen} \varepsilon] + \\
&+ \dot{\alpha}[(-\dot{x} \text{sen} \theta + \dot{y} \cos \theta)(RM \cos \alpha + C \cos \alpha \text{sen} \mu + m_2 h_2 \cos \alpha)] + \\
&+ \dot{\theta}[(-\dot{x} \text{sen} \theta + \dot{y} \cos \theta)(C \cos \mu - m_2 h_2 \text{sen} \mu) + \\
&- (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \text{sen} \theta)(RM \text{sen} \alpha + C \text{sen} \alpha \text{sen} \mu + m_2 h_2 \text{sen} \alpha \cos \mu)] + \\
&+ \dot{\mu}[(-\dot{x} \text{sen} \theta + \dot{y} \cos \theta)(C \text{sen} \alpha \cos \mu - m_2 h_2 \text{sen} \alpha \text{sen} \mu) + \\
&- (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \text{sen} \theta)(C \text{sen} \mu + m_2 h_2 \cos \mu)] + \\
&+ \dot{\theta}\dot{\alpha}[E \cos \alpha \text{sen} \mu \cos \mu + m_2 h_2 l_2 \cos(2\mu) \cos \alpha + F \cos \alpha \cos \mu + \\
&- m_3 h_3^2 \cos \alpha \text{sen}(\mu + \varepsilon) \cos(\mu + \varepsilon) + m_3 l h_3 \cos \alpha \cos(2\mu + \varepsilon) + \\
&- m_2 R h_3 \cos \alpha \text{sen}(\mu + \varepsilon)] + \\
&+ \dot{\theta}\dot{\mu}[D \text{sen} \alpha + F \text{sen} \alpha \text{sen} \mu + m_3 R h_3 \text{sen} \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + T_{4\text{trasl}} = \\
&= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 a(\alpha, \psi) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 b(\alpha, \psi) + \frac{1}{2}\dot{\mu}^2 G + \\
&+ \dot{\alpha}(-\dot{x} \text{sen} \theta + \dot{y} \cos \theta) c(\alpha, \psi) + \\
&+ \dot{\theta}[(-\dot{x} \text{sen} \theta + \dot{y} \cos \theta) d(\alpha, \psi) - (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \text{sen} \theta) e(\alpha, \psi)] + \\
&+ \dot{\mu}[(-\dot{x} \text{sen} \theta + \dot{y} \cos \theta) f(\alpha, \psi) - (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \text{sen} \theta) h(\alpha, \psi)] + \\
&+ \dot{\theta}\dot{\alpha} l(\alpha, \psi) + \dot{\theta}\dot{\mu} m(\alpha, \psi) + T_{4\text{trasl}},
\end{aligned}$$

con ovvio significato delle funzioni che abbiamo introdotto. A questo punto, non rimane altro che sostituire l'espressione di $\dot{\mu}$ ricavata dalla (6.17), ottenendo in conclusione

$$\begin{aligned}
T_{\text{trasl}} &= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \left[a(\alpha, \psi) + G \frac{q^2(\alpha, \psi)}{n^2(\alpha, \psi)} \right] + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 b(\alpha, \psi) + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 G \frac{p^2(\alpha, \psi)}{n^2(\alpha, \psi)} + \\
&+ \dot{\alpha} \left[(-\dot{x} \text{sen} \theta + \dot{y} \cos \theta) \left(c(\alpha, \psi) - \frac{q(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} f(\alpha, \psi) \right) + \right. \\
&+ \left. (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \text{sen} \theta) \frac{q(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} h(\alpha, \psi) \right] + G \dot{\alpha} \dot{\psi} \frac{p(\alpha, \psi) q(\alpha, \psi)}{n^2(\alpha, \psi)} + \\
&+ \dot{\psi} \frac{p(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} [(\dot{x} \text{sen} \theta - \dot{y} \cos \theta) f(\alpha, \psi) - (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \text{sen} \theta) h(\alpha, \psi)] + \\
&+ \dot{\theta} [(-\dot{x} \text{sen} \theta + \dot{y} \cos \theta) d(\alpha, \psi) - (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \text{sen} \theta) e(\alpha, \psi)] + \\
&+ \dot{\theta}\dot{\alpha} \left[l(\alpha, \psi) - \frac{q(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} m(\alpha, \psi) \right] - \dot{\theta}\dot{\psi} \frac{p(\alpha, \psi)}{n(\alpha, \psi)} m(\alpha, \psi) + T_{4\text{trasl}}.
\end{aligned}$$

L'espressione dell'energia cinetica così scritta risulta più facile da gestire anche da un punto di vista numerico.

7.2 Potenziali classici e generalizzati

Passiamo adesso a determinare i potenziali associati alle forze esterne che si presume agiscano sulla bicicletta. In particolare, si suppone che, oltre alle forze conservative dovute al peso dei quattro corpi rigidi, siano presenti anche delle forze dissipative, poiché altrimenti, quanto alla conservazione dell'energia per i sistemi anolonomi,¹ il sistema oscillerebbe, mantenendo inalterato il proprio stato energetico.

In primo luogo scriviamo l'espressione del potenziale associato alle forze conservative. Come è ben noto, questo risulta essere

$$U = -m_1gz_1 - m_2gz_2 - m_3gz_3 - m_4gz_4, \quad (7.3)$$

dove z_i , $i = 1, 2, 3, 4$, indica l'altezza del centro di massa dell' i -esimo corpo rigido. Per esprimere tali quote, si sfruttano le matrici di rotazione introdotte nel capitolo 5, per cui risulta

$$\begin{aligned} z_1 &= r + R \cos \alpha, \\ z_2 &= r + R \cos \alpha + l_2 \cos \alpha \sin \mu + h_2 \cos \alpha \cos \mu, \\ z_3 &= r + R \cos \alpha + l \cos \alpha \sin \mu + h_3 \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon), \\ z_4 &= r_a + R_a \cos \tilde{\alpha}, \end{aligned}$$

dove possiamo ricavare $R_a \cos \tilde{\alpha}$ dalla relazione (5.13).

Le forze dissipative che si considerano, invece, sono quelle che entrano in gioco quando lo sterzo viene ruotato attorno al proprio asse. L'attrito che nasce nel giunto rotoidale C disperde quindi energia. Per tener conto di tale perdita di energia, si introduce allora la *funzione di dissipazione di Rayleigh*

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \nu \dot{\psi}^2,$$

la quale è appunto un potenziale generalizzato e dove ν rappresenta il coefficiente di attrito viscoso. Infine, si ipotizza che le forze verticali siano costanti, e che quindi si possano trascurare gli aspetti legati alle sospensioni.²

7.3 Lagrangiana e Lagrangiana vincolata

Ultimo passo da compiere prima di ricavare le equazioni di moto è determinare la Lagrangiana per la bicicletta. Quella classica può essere ottenuta sommando all'energia cinetica il potenziale associato alle forze conservative, ovvero risulta

$$L = T + U,$$

dove T ed U sono date rispettivamente delle espressioni (7.2) e (7.3). Tuttavia, sostituendo tali termini nel funzionale, si ottiene un'espressione della Lagrangiana piuttosto complicata.

Poiché la risoluzione del problema viene chiaramente svolta attraverso metodi numerici, facciamo calcolare l'espressione completa dalla Lagrangiana direttamente al programma di calcolo che si impiega, nel nostro caso Wolfram Mathematica. Pertanto, nei conti che riportiamo di seguito, ci

¹Si vedano a riguardo le ipotesi introdotte nel capitolo 4.

²Se volessimo tener conto anche delle sospensioni, sarebbe necessario introdurre il potenziale elastico associato a ciascuna delle molle ed un potenziale dissipativo per modellizzare lo smorzamento.

interessa soprattutto sapere da quali coordinate generalizzate dipenda il nostro funzionale. In base ai conti svolti, si vede che

$$L = L(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, \dot{\psi}, \dot{\chi}, \dot{\chi}_a, \theta, \alpha, \psi).$$

Osserviamo quindi che la Lagrangiana non dipende dalle coordinate del punto di contatto della ruota posteriore, ma solo dalle sue velocità. Questo segue dall'ipotesi che il piano della strada sia omogeneo ed isotropo.³ Analogamente, compaiono solo le derivate degli angoli χ e χ_a poiché le ruote presentano chiaramente simmetria circolare.

A questo punto dobbiamo sostituire i vincoli anolonomi nella Lagrangiana per ottenere quella vincolata. In generale, sappiamo che tali vincoli si possono scrivere nella forma

$$\dot{s}^a = -A_\alpha^a \dot{r}^\alpha, \quad a = 1, \dots, p,$$

dove \dot{s} rappresenta la velocità delle fibre, mentre \dot{r} quella della base. La matrice A_α^a , invece, caratterizza la connessione di Ehresmann nella base di coordinate scelte. In particolare, per come abbiamo scritto i vincoli nel capitolo 6, il vettore s risulta essere

$$s = (x, y, \chi_a, \theta)^T,$$

mentre il vettore r è dato da

$$r = (\alpha, \psi, \chi)^T.$$

Infine, in base ai vincoli (6.14), (6.18) e (6.19), la matrice che caratterizza la connessione di Ehresmann in coordinate risulta della forma

$$A = \begin{pmatrix} r \sin \theta & 0 & -(R + r \cos \alpha) \cos \theta \\ -r \cos \theta & 0 & -(R + r \cos \alpha) \sin \theta \\ -\hat{h}(\alpha, \psi) & -\hat{l}(\alpha, \psi) & -\hat{g}(\alpha, \psi) \\ -\hat{n}(\alpha, \psi) & -\hat{p}(\alpha, \psi) & -\hat{m}(\alpha, \psi) \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Allora, la *Lagrangiana vincolata* si ottiene sostituendo, al posto delle velocità \dot{s} , la loro espressione in rispetto a \dot{r} attraverso la connessione. Considerando sempre le espressioni in forma simbolica, possiamo scrivere

$$L_c = L_c(\dot{\alpha}, \dot{\psi}, \dot{\chi}, \alpha, \psi),$$

dove adesso tale funzionale dipende esclusivamente dalle coordinate e dalle velocità della base. Questo comporta delle semplificazioni quando andremo a ricavare le equazioni di moto. Infine, per ottenere l'espressione esplicita di questa Lagrangiana possiamo ricorrere ad un qualunque programma di calcolo simbolico.

7.4 Equazioni di moto

Rimangono adesso da determinare le equazioni di moto. Dalla teoria, sappiamo che per i sistemi anolonomi queste sono date da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L_c}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^a \frac{\partial L_c}{\partial s^a} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^b} B_{\alpha\beta}^b \dot{r}^\beta, \quad (7.5)$$

dove

$$B_{\alpha\beta}^b = \left(\frac{\partial A_\alpha^b}{\partial r^\beta} - \frac{\partial A_\beta^b}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^a \frac{\partial A_\beta^b}{\partial s^a} - A_\beta^a \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial s^a} \right) \quad (7.6)$$

³In realtà, si potrebbe anche rimuovere la dipendenza da θ attraverso un'opportuna trasformazione delle coordinate, sfruttando così appieno la simmetria che presenta il sistema.

rappresenta la curvatura espressa in coordinate.

Dobbiamo quindi determinare per prima cosa le componenti della curvatura (7.6). A tal fine, scriviamo esplicitamente gli elementi della connessione (7.4), ovvero abbiamo

$$\begin{aligned} A_1^1 &= r \sin \theta, & A_2^1 &= 0, & A_3^1 &= -(R + r \cos \alpha) \cos \theta, \\ A_1^2 &= -r \cos \theta, & A_2^2 &= 0, & A_3^2 &= -(R + r \cos \alpha) \sin \theta, \\ A_1^3 &= -\widehat{h}(\alpha, \psi), & A_2^3 &= -\widehat{l}(\alpha, \psi), & A_3^3 &= -\widehat{g}(\alpha, \psi), \\ A_1^4 &= -\widehat{n}(\alpha, \psi), & A_2^4 &= -\widehat{p}(\alpha, \psi), & A_3^4 &= -\widehat{m}(\alpha, \psi). \end{aligned}$$

Inoltre, ricordiamo che

$$r^1 = \alpha, \quad r^2 = \psi, \quad r^3 = \chi,$$

mentre

$$s^1 = x, \quad s^2 = y, \quad s^3 = \chi_a, \quad s^4 = \theta.$$

Abbiamo quindi da calcolare gli elementi $B_{\alpha\beta}^b$, con $b = 1, 2, 3, 4$, mentre $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. In base all'osservazione 4.4 a pagina 46, è pari a 12 il numero di elementi indipendenti che si devono determinare. Svolgendo dunque i conti, si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} B_{11}^1 &= B_{22}^1 = B_{33}^1 = 0, \\ B_{12}^1 &= -B_{21}^1 = \widehat{p}(\alpha, \psi) r \cos \theta, \\ B_{13}^1 &= -B_{31}^1 = -r \sin \alpha \cos \theta - \widehat{n}(\alpha, \psi)(R + r \cos \alpha) \sin \theta + \widehat{m}(\alpha, \psi) r \cos \theta, \\ B_{23}^1 &= -B_{32}^1 = -\widehat{p}(\alpha, \psi)(R + r \cos \alpha) \sin \theta, \\ B_{11}^2 &= B_{22}^2 = B_{33}^2 = 0, \\ B_{12}^2 &= -B_{21}^2 = \widehat{p}(\alpha, \psi) r \sin \theta, \\ B_{13}^2 &= -B_{31}^2 = -r \sin \alpha \sin \theta + \widehat{n}(\alpha, \psi)(R + r \cos \alpha) \cos \theta + \widehat{m}(\alpha, \psi) r \sin \theta, \\ B_{23}^2 &= -B_{32}^2 = \widehat{p}(\alpha, \psi)(R + r \cos \alpha) \cos \theta, \\ B_{11}^3 &= B_{22}^3 = B_{33}^3 = 0, \\ B_{12}^3 &= -B_{21}^3 = -\frac{\partial \widehat{h}(\alpha, \psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial \widehat{l}(\alpha, \psi)}{\partial \alpha}, \\ B_{13}^3 &= -B_{31}^3 = \frac{\partial \widehat{g}(\alpha, \psi)}{\partial \alpha}, \\ B_{23}^3 &= -B_{32}^3 = \frac{\partial \widehat{g}(\alpha, \psi)}{\partial \psi}, \\ B_{11}^4 &= B_{22}^4 = B_{33}^4 = 0, \\ B_{12}^4 &= -B_{21}^4 = -\frac{\partial \widehat{n}(\alpha, \psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial \widehat{p}(\alpha, \psi)}{\partial \alpha}, \\ B_{13}^4 &= -B_{31}^4 = \frac{\partial \widehat{m}(\alpha, \psi)}{\partial \alpha}, \\ B_{23}^4 &= -B_{32}^4 = \frac{\partial \widehat{m}(\alpha, \psi)}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

Ora siamo in grado di poter scrivere le equazioni di moto per la bicicletta. In particolare, in base alla (7.5), abbiamo per l'angolo di rollio

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L_c}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} (B_{12}^1 \dot{\psi} + B_{13}^1 \dot{\chi}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} (B_{12}^2 \dot{\psi} + B_{13}^2 \dot{\chi}) + \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_a} (B_{12}^3 \dot{\psi} + B_{13}^3 \dot{\chi}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} (B_{12}^4 \dot{\psi} + B_{13}^4 \dot{\chi}), \end{aligned}$$

per l'angolo di sterzo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L_c}{\partial \psi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\psi}} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(B_{21}^1 \dot{\alpha} + B_{23}^1 \dot{\chi}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(B_{21}^2 \dot{\alpha} + B_{23}^2 \dot{\chi}) + \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_a}(B_{21}^3 \dot{\alpha} + B_{23}^3 \dot{\chi}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(B_{21}^4 \dot{\alpha} + B_{23}^4 \dot{\chi}), \end{aligned}$$

ed infine, per l'angolo di rotazione propria della ruota posteriore,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{\chi}} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(B_{31}^1 \dot{\alpha} + B_{32}^1 \dot{\psi}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(B_{31}^2 \dot{\alpha} + B_{32}^2 \dot{\psi}) + \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_a}(B_{31}^3 \dot{\alpha} + B_{32}^3 \dot{\psi}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(B_{31}^4 \dot{\alpha} + B_{32}^4 \dot{\psi}). \end{aligned}$$

Esplicitando poi queste equazioni, si vede che nei membri a destra compaiono ancora le velocità \dot{s} , pertanto è necessario sostituire nuovamente i vincoli anolonomi affinché si ricavino tre equazioni differenziali per le tre coordinate scelte come gradi di libertà.

Nell'ottica di voler risolvere le equazioni numericamente, ci interessa quindi determinare le derivate parziali della Lagrangiana vincolata rispetto ad α e ψ . Infatti, sappiamo che tale Lagrangiana è funzione sia dell'angolo di rollio sia dell'angolo di sterzo, ma questa dipendenza entra in gioco anche attraverso l'angolo di beccheggio μ , del quale non conosciamo un'espressione in forma chiusa. Allora possiamo scrivere

$$\frac{\partial L_c}{\partial \alpha} = \frac{\partial L_c}{\partial \alpha} + \frac{\partial L_c}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}$$

e

$$\frac{\partial L_c}{\partial \psi} = \frac{\partial L_c}{\partial \psi} + \frac{\partial L_c}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \psi}.$$

Pertanto, vogliamo calcolare la derivata parziale di μ rispetto all'angolo di rollio e all'angolo di sterzo. A tal fine, sfruttiamo sempre la relazione (5.13), e cominciamo derivando ambo i membri rispetto ad α ; in questo modo si ha

$$\begin{aligned} &-R \sin \alpha - l \sin \alpha \sin \mu + l \cos \alpha \cos \mu \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} + b \sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) + \\ &+ b \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} - d(\sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \psi - \cos \alpha \sin \psi) + \\ &+ d \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \psi \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} - R_a \frac{\partial \cos \tilde{\alpha}}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Osserviamo quindi che

$$\frac{\partial \cos \tilde{\alpha}}{\partial \alpha} = -\frac{\sin \tilde{\alpha}}{\cos \tilde{\alpha}} \left(\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi \sin(\mu + \varepsilon) + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi \right),$$

quindi, sostituendo tale espressione e poi raccogliendo i termini che moltiplicano la derivata, si ricava

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} [\cos \tilde{\alpha} (l \cos \alpha \cos \mu + b \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) + \\ &\quad + d \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \psi) + R_a \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi \sin \tilde{\alpha}] = \\ &= R \sin \alpha \cos \tilde{\alpha} + l \sin \alpha \sin \mu \cos \tilde{\alpha} - b \sin \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \tilde{\alpha} + \\ &\quad + d(\sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \psi + \cos \alpha \sin \psi) \cos \tilde{\alpha} + \\ &\quad - R_a (\cos \alpha \cos \psi + \sin \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi) \sin \tilde{\alpha}, \end{aligned}$$

espressione che possiamo scrivere nella forma

$$\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = \frac{\widehat{q}(\alpha, \psi)}{\widehat{s}(\alpha, \psi)},$$

con chiaro significato delle funzioni introdotte. Analogamente, derivando rispetto a ψ ambo i membri dell'espressione (5.13), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \psi} & [\cos \tilde{\alpha} (l \cos \alpha \cos \mu + b \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) + \\ & + d \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \cos \psi) + R_a \cos \alpha \cos(\mu + \varepsilon) \sin \psi \sin \tilde{\alpha}] = \\ & = d(\cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \sin \psi + \sin \alpha \cos \psi) \cos \tilde{\alpha} + \\ & + R_a(\sin \alpha \sin \psi - \cos \alpha \sin(\mu + \varepsilon) \cos \psi) \sin \tilde{\alpha}, \end{aligned}$$

per cui risulta

$$\frac{\partial \mu}{\partial \psi} = \frac{\widehat{r}(\alpha, \psi)}{\widehat{s}(\alpha, \psi)},$$

avendo opportunamente definito le funzioni sopra scritte. Osserviamo inoltre che entrambe le derivate parziali risultano moltiplicate per la stessa funzione $\widehat{s}(\alpha, \psi)$.

Una volta ricavate queste relazioni, possiamo andare a risolvere numericamente il problema, determinando le equazioni di moto per la bicicletta.

7.4.1 Implementazione numerica

Una volta visto come ricavare le equazioni di moto, si procede all'implementazione di un programma per la risoluzione numerica del problema. Ciò è stato effettuato con il programma Wolfram Mathematica, senza però ottenere risultati concreti. Infatti, quelle che ci troviamo a risolvere sono delle Equazioni Algebrico-Differenziali: oltre alle solite equazioni differenziali, abbiamo anche un'equazione algebrica, essenziale per determinare l'angolo di beccheggio. Il problema così posto risulta di notevole difficoltà, e la potenza di calcolo necessaria per risolverlo è elevata.

Le due strade che si possono seguire per arrivare ad un qualche risultato sono principalmente le seguenti:

1. linearizzare le equazioni di moto intorno alla configurazione banale, in modo da ottenere delle equazioni più semplici che però hanno significato solo quando la bicicletta descrive un moto pressapoco rettilineo;
2. aumentare la potenza di calcolo e ricorrere a programmi di risoluzione numerica progettati propriamente per risolvere questo tipo di problemi.

Capitolo 8

Introduzione del controllo

Le tecniche che possono essere impiegate per il controllo di un sistema meccanico sono diverse. Prescindendo dal particolare tipo di sistema, ricordiamo che mentre le caratteristiche del moto sono di solito specificate nello spazio operativo, le azioni di controllo vengono esplicitate in maniera diretta nello spazio delle configurazioni mediante le forze generalizzate che agiscono sul sistema. Questa caratteristica porta a distinguere due modalità di controllo, una appunto nello *spazio delle configurazioni* e l'altra nello *spazio operativo*. In entrambe le soluzioni, la struttura di controllo risulta sempre essere un anello chiuso di retroazioni (si capisce rappresentando lo schema di controllo in un diagramma a blocchi), in modo che possano essere sfruttate le garanzie di robustezza per sopperire alle incertezze di modellazione ed alla presenza di effetti dovuti ad ingressi non manipolabili. A livello di considerazioni di carattere generale notiamo quanto segue.

La soluzione del *controllo nello spazio delle configurazioni* articola un problema complesso in due problemi più: il primo è relativo all'inversione cinematica del sistema per la traduzione delle specifiche del moto, generate nello spazio operativo, in grandezze di riferimento espresse nello spazio delle configurazioni; il secondo riguarda la realizzazione di un sistema di controllo nello spazio delle configurazioni che deve garantire l'inseguimento dei riferimenti da parte delle grandezze controllate.

La soluzione del *controllo nello spazio operativo* segue un approccio di tipo globale che richiede una maggiore complessità algoritmica; ad esempio, in questo caso l'inversione cinematica viene assunta interna all'anello chiuso. I vantaggi che si presentano in questo caso sono legati alla manipolazione diretta delle grandezze dello spazio operativo, le quali, tuttavia, sono talvolta misurate indirettamente.

In seguito faremo riferimento al controllo sliding mode (*sliding mode control* oppure controllo a struttura variabile), il quale è una tecnica di controllo non lineare con notevoli proprietà di robustezza.

8.1 Controllo Sliding Mode di sistemi ad un solo ingresso

Esaminiamo in primo luogo questo sistema di controllo con riferimento ad un sistema non lineare del secondo ordine ad un solo ingresso con incertezza di modellazione. In seguito studieremo il caso a più variabili. Consideriamo quindi un sistema non lineare del tipo

$$x^{(n)} = f(x) + b(x)u$$

dove $x = [x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}]$ è il vettore di stato del sistema, il quale sarà comunque lineare rispetto all'unico ingresso u . Sia inoltre $f(x)$ una funzione approssimata con un'incertezza limitata da una funzione $\hat{f}(x)$, ovvero $\|f(x) - \hat{f}(x)\| \leq F(x) < \infty$, con $F(x)$ nota, e sia $b(x)$ una funzione di segno noto. Supponiamo quindi sia assegnata una traiettoria per il sistema nello spazio di stato.

Allora l'obiettivo di questo sistema di controllo è quello di portare e mantenere il sistema sulla traiettoria desiderata, ovvero si deve verificare:

$$\begin{aligned}x &= x_d(t) \\ \dot{x} &= \dot{x}_d(t) \\ \ddot{x} &= \ddot{x}_d(t) \\ &\dots = \dots \\ x^{(n-1)} &= x_d^{(n-1)}(t) \\ x^{(n)} &= x_d^{(n)}(t)\end{aligned}$$

Consideriamo allora la variabile $\tilde{x} = x - x_d$, la quale risulta pari all'errore $e = x_d - x$ cambiato di segno; allora la *superficie di sliding* $S(t) \in \mathbb{R}^n$ è una superficie tempo-variante definita dall'equazione

$$s = 0$$

dove s è una variabile scalare, chiamata *sliding variable*, definita come

$$s := \left(\lambda + \frac{d}{dt} \right)^{n-1} \tilde{x}$$

dove λ è una costante stabilita dal progettista, che determina la posizione dei poli sul piano complesso. In pratica, il parametro λ determina la velocità con cui il sistema si porta nello stato $\tilde{x} = 0$. Si osserva inoltre che la dinamica dell'errore sulla superficie di sliding risulta lineare tempo-invariante. Pertanto l'appartenenza dello stato alla superficie di sliding risulta un punto cruciale del controllo SMC, i cui obiettivi possono essere riassunti nei seguenti due punti:

- i. portare lo stato del sistema sulla superficie di sliding nel minor tempo possibile;
- ii. mantenere lo stato del sistema sulla superficie di sliding.

Alla luce di ciò, possiamo dire che la tecnica del controllo SMC consiste nell'applicare un controllo in retroazione composto dalle due parti seguenti:

1. una prima parte del segnale di controllo, basata sul modello disponibile del sistema, tale che sia permessa la permanenza dello stato sulla superficie di sliding in caso di conoscenza esatta del modello;
2. una seconda parte che fornisca una certa robustezza rispetto alle incertezze del modello e al rumore di misura, la quale riporti il sistema sulla superficie di sliding, qualora questa sia abbandonata.

La richiesta che il sistema raggiunga e rimanga sulla superficie di sliding può essere soddisfatta quando viene verificata la cosiddetta *condizione di sliding*, la quale si può scrivere come

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} s^2 \right) \leq -\eta |s| \quad (8.1)$$

dove η è una costante strettamente positiva. In sostanza, si richiede che la derivata della distanza del sistema dalla superficie di sliding sia (molto) minore di zero. Allora risulta chiaro che η determina la rapidità con cui il vettore di stato tende a convergere verso la superficie di sliding. Vediamo che l'equazione (8.1) può essere manipolata nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} s^2 \right) = \dot{s} s \leq -\eta |s| \implies \dot{s} \operatorname{sign}(s) \leq -\eta \implies \dot{s} \leq \eta$$

ovvero la derivata temporale di s ha sempre segno opposto ad s e risulta in modulo maggiore di un certo numero η . Dunque, \dot{s} è tale da attrarre lo stato verso la superficie $S(t)$ a prescindere dalla porzione di spazio in cui si trova il sistema, se in quella caratterizzata da $s < 0$ oppure l'altra con $s > 0$.

Per quanto riguarda il tempo di raggiungimento della superficie di sliding da parte del sistema, indichiamo con t_f l'istante in cui il sistema raggiunge la superficie $S(t)$. Quindi integrando la condizione di sliding tra un istante iniziale e l'istante t_f , ricordando che $s(t_f) = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \dot{s} &\leq -\eta \int_{t_0}^{t_f} dt \implies [s]_{t_0}^{t_f} \leq -\eta(t_f - t_0) \\ \implies |s(t_f)| - |s(t_0)| &\leq -\eta(t_f - t_0) \implies \Delta t = (t_f - t_0) \leq \frac{|s(t_0)|}{\eta} \end{aligned}$$

quindi il tempo necessario risulta finito.

Di seguito considereremo il caso in cui $n = 2$, pertanto la variabile di sliding diventa

$$s = \lambda \tilde{x} + \dot{\tilde{x}}$$

e dunque la dinamica dell'errore è governata dall'equazione differenziale

$$\lambda \tilde{x} + \dot{\tilde{x}} = 0$$

8.1.1 Ipotesi sull'incertezza

Come abbiamo detto in precedenza, quando andiamo a controllare un sistema meccanico reale, si hanno sempre delle incertezze nella valutazione di $f(x)$ e $b(x)$, dovute ad imprecisioni dei sistemi di misura oppure ad approssimazioni introdotte volontariamente nel modello.

Per poter in seguito studiare il controllo sliding mode in presenza di incertezze, supponiamo che vengano rispettate certe condizioni, ovvero che tali incertezze assumano valori solo entro un certo range. In particolare, assumiamo che

$$|f - \hat{f}| < F(x) < \infty$$

dove $F(x)$ è una funzione nota. Per quanto riguarda il guadagno b , si suppone che l'incertezza sia di tipo moltiplicativo, ovvero:

$$\xi_1 \leq 1 - \frac{b(x)}{\hat{b}(x)} \leq \xi_2.$$

Allora possiamo ad esempio prendere $b_m \leq b \leq b_M$, e dunque, scegliendo \hat{b} come la media geometrica dei due valori estremi, cioè $\hat{b} = \sqrt{b_m b_M}$, si ricava

$$\frac{b_m}{\hat{b}} = \frac{b_m}{\sqrt{b_m b_M}} = \sqrt{\frac{b_m}{b_M}} = \frac{1}{\beta} < 1$$

mentre

$$\frac{b_M}{\hat{b}} = \frac{b_M}{\sqrt{b_m b_M}} = \sqrt{\frac{b_M}{b_m}} = \beta > 1$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
1 - \frac{b_M}{\widehat{b}} &\leq 1 - \frac{b}{\widehat{b}} \leq 1 - \frac{b_m}{\widehat{b}} \\
\implies 1 - \beta &\leq 1 - \frac{b}{\widehat{b}} \leq 1 - \frac{1}{\beta} \\
\implies 1 - \beta &\leq 1 - \frac{b}{\widehat{b}} \leq 1 - \frac{\beta - 1}{\beta} \\
\implies \left|1 - \frac{b}{\widehat{b}}\right| &\leq \beta - 1
\end{aligned}$$

8.1.2 Progetto della legge di controllo

Per progettare la legge di controllo in modo da soddisfare la condizione di sliding, tenendo presente di come si suddivide il controllo SMC conviene considerare il controllo nella forma

$$u = \widehat{u} + u_{\text{disc}}$$

dove \widehat{u} è la parte basata sul modello, mentre u_{disc} , ovvero discontinua, apporta la robustezza necessaria nel modello affinché si livellino tutte le incertezze. Qualora queste incertezze non fossero presenti nel sistema, la parte discontinua ha comunque il compito di portare il sistema sulla superficie di sliding. Vediamo quindi come determinare queste due componenti del controllo.

La parte del controllo basata sul modello, detta anche *model-based*, deve essere tale che il sistema rimanga sulla superficie di sliding nel caso in cui non ci siano incertezze, ovvero quando $\widehat{b} = b$ e $\widehat{f} = f$. La permanenza dello stato sulla superficie di sliding può essere espressa dall'equazione $\dot{s} = 0$, che nel caso $n = 2$ diventa

$$\dot{s} = \ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} = 0.$$

Quindi, sostituendo questa espressione in quella della dinamica del sistema, che per il caso particolare di un sistema del secondo ordine risulta:

$$\ddot{x} = f(x) + b(x)u$$

si ottiene

$$\ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} = f(x) + b(x)u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} = 0$$

Allora, la parte del segnale di controllo model-based \widehat{u} si costruisce in modo che l'equazione precedente sia verificata in caso di conoscenza esatta del modello del sistema, ovvero scegliendo

$$\widehat{u} = \frac{1}{\widehat{b}(x)} \left(-\widehat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \right) \quad (8.2)$$

Si noti, tuttavia, che il controllo (8.2) non è sufficiente a portare il sistema sulla superficie di sliding quando, anche se conoscendo perfettamente il modello del sistema, questo si trova in una posizione differente. Allora, si deve aggiungere una parte discontinua che svolga questo compito.

La *parte discontinua* del controllo è necessaria a portare il sistema verso la superficie di sliding, qualora questo si trovasse in posizione differente oppure si allontanasse dalla superficie $S(t)$. Si vede che conviene avere una parte discontinua della forma:

$$u_{\text{disc}} := -\frac{k}{\widehat{b}(x)} \text{sign}(s)$$

dove k è una costante da determinare in modo che sia soddisfatta la condizione di sliding.

Il segnale di controllo risulta pari alla somma del termine model-based (8.2) e di quello discontinuo, quindi per le scelte fatte risulta

$$u = \frac{1}{\widehat{b}(x)} \left(-\widehat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - k \operatorname{sign}(s) \right) \quad (8.3)$$

Affinché la condizione di sliding sia verificata, è necessario dimensionare opportunamente il *guadagno* k , in base all'incertezza che abbiamo o meno sul modello. Vediamo quindi come si verificano tali condizioni nei due casi seguenti.

8.1.3 Verifica delle condizioni di sliding

Consideriamo per primo il caso in cui *non* siano presenti incertezze sul modello: il parametro k deve essere dimensionato solo per consentire il raggiungimento della superficie di sliding. Allora, sostituendo la (8.3) nella relazione (8.1) si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{s}s &= \left(\ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) s = \left(\ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) s = \\ &= \left[f(x) + b(x)u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right] s = \\ &= \left[f(x) + \frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} \left(-\widehat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - k \operatorname{sign}(s) \right) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right] s = \\ &= \left[f(x) - \widehat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - k \operatorname{sign}(s) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right] s = \\ &= -k \operatorname{sign}(s) = -k|s| \end{aligned}$$

Allora la condizione di sliding viene verificata quando

$$-k|s| \leq -\eta|s| \implies k \geq \eta$$

Vediamo adesso il caso in cui siano presenti *incertezze* sia su f che su b . Per determinare il parametro k , adesso si procede nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \dot{s}s &= \left(\ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) s = \left(\ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) s = \\ &= \left[f(x) + b(x)u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right] s = \\ &= \left[f(x) + \frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} \left(-\widehat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - k \operatorname{sign}(s) \right) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right] s = \\ &= \left[f(x) - \widehat{f}(x) + \widehat{f}(x) + \frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} \left(-\widehat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - k \operatorname{sign}(s) \right) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right] s = \\ &= \left[\left(f(x) - \widehat{f}(x) \right) + \left(1 - \frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} \right) \left(\widehat{f}(x) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) - \frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} k \operatorname{sign}(s) \right] s = \\ &= \left(f(x) - \widehat{f}(x) \right) s + \left(1 - \frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} \right) \left(\widehat{f}(x) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) s - \frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} k|s| \end{aligned}$$

Pertanto, la condizione di sliding è soddisfatta quando

$$\begin{aligned} &\left(f(x) - \widehat{f}(x) \right) s + \left(1 - \frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} \right) \left(\widehat{f}(x) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) s - \frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} k|s| \leq -\eta|s| \\ \implies &\frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} k|s| \geq \eta|s| + \left(f(x) - \widehat{f}(x) \right) s + \left(1 - \frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} \right) \left(\widehat{f}(x) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) s \end{aligned}$$

e considerando il caso più sfavorevole in cui $\frac{b(x)}{\widehat{b}(x)} = \frac{1}{\beta}$, ovvero in cui tale rapporto è minimo, si ricava:

$$k \geq \beta [\eta + F(x)] + (\beta - 1) |\widehat{f}(x) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{x}|$$

Osservazione 8.1 (Il problema del chattering). In questo tipo di controllo sono sempre presenti dei problemi legati alla parte discontinua. Infatti, una volta raggiunta la superficie di sliding, la parte discontinua richiede agli attuatori una continua ed istantanea commutazione tra $\pm \frac{k}{b}$. Questo fenomeno, denominato *chattering*, sottopone gli attuatori ad un regime solitamente non tollerabile. Infatti, il ritardo degli attuatori sull'evoluzione dello stato comporta la permanenza del sistema nelle vicinanze della superficie di sliding, senza che questa venga mai raggiunta.

La soluzione al problema di chattering si trova richiedendo che il sistema non rimanga precisamente sulla superficie, ma in un intorno di essa. Allora si definisce una zona, detta *boudary layer*, impiegando la *funzione saturazione* invece della funzione segno nella definizione del parametro k . Queste soluzioni sono scelte opportunamente dal progettista per evitare problemi di vibrazioni ad alta frequenza.

8.2 Controllo sliding mode di sistemi a più ingressi

Supponiamo adesso di avere un sistema in forma canonica di controllo la cui configurazione sia definita da un vettore di m coordinate $q = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$, ed esista un vettore di m ingressi $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$. Un sistema di questo tipo si dice comunemente *quadrato*. Allora, ipotizziamo che lo stato del sistema sia descrivibile per mezzo di un vettore di stato x in cui siano presenti tutte le coordinate q_i del sistema e le derivate di ciascuna fino all'ordine $n_i - 1$, ovvero

$$x = [q_1, \dot{q}_1, \dots, q_1^{(n_1-1)}, q_2, \dot{q}_2, \dots, q_2^{(n_2-1)}, \dots, q_m, \dot{q}_m, \dots, q_m^{(n_m-1)}]^T$$

Definiamo quindi un vettore in cui compaiono le derivate n_i -esime di ciascuna q_i come

$$q^{(n)} = [q_1^{(n_1)}, q_2^{(n_2)}, \dots, q_m^{(n_m)}]^T,$$

allora il sistema è governato dalle equazioni

$$\dot{q}^{(n)} = f(x) + B(x)u$$

dove $q^{(n)}, f(x) \in \mathbb{R}^m$, mentre $B(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Allora si deve definire una superficie di sliding e cercare di dimensionare u affinché questa superficie venga raggiunta dal sistema e non venga abbandonata successivamente. A tal fine, si devono introdurre delle ipotesi sull'incertezza che può essere presente nel modello del sistema. Tuttavia, conviene prima studiare il caso in cui non siano presenti queste incertezze.

Dunque, come abbiamo fatto in precedenza, definiamo per ogni coordinata del sistema una variabile di sliding, ovvero si ha

$$s_i := \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{(n_i-1)} \tilde{q}_i$$

dove $\tilde{q}_i = q_i - q_{di}$ rappresenta l'errore tra $q_i(t)$ ed il suo valore desiderato $q_{di}(t)$, mentre $\lambda > 0$ è un parametro che definisce la velocità di convergenza a zero dell'errore.

Esempio 8.1. Se consideriamo un manipolatore con m gradi di libertà, allora vediamo che $n_1 = n_2 = \dots = n_m = 2$ e quindi, per ogni $i = 1, 2, \dots, m$, la variabile di sliding corrispondente risulta

$$s_i = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{(2-1)} \tilde{q}_i = \dot{\tilde{q}}_i + \lambda \tilde{q}_i$$

Come si può immaginare, la *superficie di sliding* viene definita imponendo che ogni variabile di sliding sia uguale a zero. In sintesi, se definiamo il vettore delle variabili di sliding come

$$s = [s_1, s_2, \dots, s_i]^T$$

allora la superficie di sliding si definisce per mezzo dell'equazione

$$s = 0$$

Come nel caso di un singolo ingresso, anche ora, su questa superficie, l'evoluzione dei vettori $\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, \dots, \tilde{q}_1^{(n_i-1)}$ risulta lineare tempo-invariante (LTI).

8.2.1 Progettazione del controllo

Come abbiamo visto in precedenza, il controllo sarà composto da una parte basata sul modello ed una parte discontinua, la quale apporti la robustezza necessaria al controllo, annullando l'effetto di eventuali incertezze e conducendo il sistema verso la superficie di sliding, verificando poi che rimanga sulla stessa. Allora si ha

$$u = \hat{u} + u_{\text{disc}}$$

dove \hat{u} permette al sistema di rimanere sulla superficie di sliding solo nel caso in cui il modello sia esatto e si trovi inizialmente su tale superficie.

Cominciamo quindi a determinare la componente del controllo *model-based*. Per prima cosa esplicitiamo l'espressione della i -esima variabile di sliding:

$$\begin{aligned} s_i &= \tilde{q}_i^{(n_i-1)} + \lambda^{(n_i-2)} \tilde{q}^{(n_i-2)} + \dots + \lambda^{(n_i-2)} \dot{\tilde{q}}_i + \lambda^{(n_i-1)} \tilde{q}_i = \\ &= q^{(n_i-1)} - \underbrace{q_{di}^{(n_i-1)} + \lambda^{(n_i-2)} \tilde{q}^{(n_i-2)} + \dots + \lambda^{(n_i-2)} \dot{\tilde{q}}_i + \lambda^{(n_i-1)} \tilde{q}_i}_{-q_{ri}^{(n_i-1)}} = \\ &= q_i^{(n_i-1)} - q_{ri}^{(n_i-1)} \end{aligned}$$

dove abbiamo definito la variabile

$$q_{ri}^{(n_i-1)} := q_{di}^{(n_i-1)} + \lambda^{(n_i-2)} \tilde{q}^{(n_i-2)} + \dots + \lambda^{(n_i-2)} \dot{\tilde{q}}_i + \lambda^{(n_i-1)} \tilde{q}_i.$$

Allora, affinché il sistema permanga sulla superficie di sliding una volta che l'abbia raggiunta, per la i -esima variabile di sliding s_i si deve verificare la condizione:

$$\dot{s}_i = q^{(n_i)} - q_{ri}^{(n_i)} = 0$$

dove chiaramente $q_{ri}^{(n_i)} = \frac{d}{dt} q_{ri}^{(n_i-1)}$. A questo punto, conviene definire un vettore

$$q_r^{(n)} := \left(q_{r1}^{(n_1)}, q_{r2}^{(n_2)}, \dots, q_{rm}^{(n_m)} \right)^T$$

ed esprimere la condizione di permanenza sulla superficie di sliding nella forma vettoriale

$$\begin{aligned} \dot{s} &= q^{(n)} - q_r^{(n)} = 0 \\ \implies f(x) + B(x)u - q_r^{(n)} &= 0 \end{aligned} \tag{8.4}$$

pertanto, risolvendo quest'ultima espressione rispetto ad u , si ricava l'espressione del controllo

$$u = B^{-1} \left(q_r^{(n)} - f \right)$$

il quale permette, in assenza di incertezze, di mantenere il sistema sulla superficie di sliding. In presenza di incertezze, questa espressione può essere espressa come

$$\hat{u} = \hat{B}^{-1} \left(q_r^{(n)} - \hat{f} \right)$$

Passando quindi alla *parte discontinua* del controllo, questa può essere progettata, in analogia con quanto studiato in precedenza, come

$$u_{\text{disc}} = -\hat{B}^{-1} K \text{sign}(s)$$

dove $K = \text{diag}\{k_i\}$ è una matrice diagonale di guadagni non negativi, mentre adesso $\text{sign}(s)$ è un vettore di funzioni segno. Dunque, complessivamente il controllo è pari a

$$u = \hat{u} + u_{\text{disc}} = \hat{B}^{-1} \left(q_r^{(n)} - \hat{f} - K \text{sign}(s) \right)$$

A questo punto non resta che dimensionare i guadagni k_i perché vengano verificate le condizioni di sliding in ogni configurazione del sistema, ovvero

$$\dot{s}_i s_i \leq -\eta |s_i| \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Tuttavia, prima di procedere, risulta necessario definire i modelli di incertezza che si possono avere su f e B . Per quanto riguarda la f , si suppone che

$$|f_i - \hat{f}_i| \leq F_i(x)$$

in analogia con quanto fatto in precedenza. Inoltre, ipotizziamo che sia B sia la sua stima \hat{B} possano essere invertite. Quindi supponiamo che

$$B(x) = (I + \Delta(x)) \hat{B}(x)$$

dove $\Delta(x)$ è una matrice di incertezza tale che

$$|\Delta_{ij}| \leq D_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, m$$

con D_{ij} matrice di elementi non negativi. Enunciamo dunque il seguente teorema.

Teorema 8.1 (di Frobenius-Perron). *Una matrice positiva A , $a_{ij} > 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R} \forall ij$, ha un autovalore reale e positivo ρ di molteplicità 1, e l'autovettore ad esso associato risulta essere il raggio spettrale della matrice, ovvero ogni altro autovalore di A risulta in modulo minore a $|\rho_1|$.*

Una generalizzazione di questo teorema può essere fatta asserendo che data una matrice A positiva, allora esiste un autovalore ρ , detto autovalore di Frobenius-Perron, tale che, dato un numero $\rho > \rho_1$ ed un vettore z positivo, il sistema lineare

$$\left(I - \frac{A}{\rho} \right) y = z$$

ha come soluzione un vettore y di numeri positivi.

Pertanto, al fine di contenere il livello di incertezza della stima di $B(x)$, si ipotizza che l'autovalore di Frobenius-Perron ρ_1 della matrice D sia strettamente minore dell'unità, ovvero $\rho < 1$.

8.2.2 Verifica delle condizioni di sliding

Per determinare i guadagni k_i necessaria alla verifica delle condizioni di sliding, lavoriamo con la derivata del vettore s , ottenendo

$$\begin{aligned}\dot{s} &= q^{(n)} - q_r^{(n)} = f + Bu - q_r^{(n)} = \\ &= f + (I + \Delta) \widehat{B} \widehat{B}^{-1} (q_r^{(n)} - \widehat{f} - K \text{sign}(s)) - q_r^{(n)} = \\ &= f - \widehat{f} + q_r^{(n)} - q_r^{(n)} - K \text{sign}(s) + \Delta q_r^{(n)} - \Delta \widehat{f} - \Delta K \text{sign}(s) = \\ &= (f - \widehat{f}) + \Delta (q_r^{(n)} - \widehat{f}) - \Delta K \text{sign}(s) - K \text{sign}(s)\end{aligned}$$

quindi, di questa espressione vettoriale possiamo considerare la componente i -esima, per cui

$$\dot{s}_i = (f_i - \widehat{f}_i) + \delta_{ij} (q_{rj}^{(n_j)} - \widehat{f}_j) - \delta_{ij} k_j \text{sign}(s_j) - k_i \text{sign}(s_i)$$

La condizione di sliding richiede quindi che $\dot{s}_i s_i \leq -\eta |s_i|$, allora si ricava

$$\begin{aligned}& [(f_i - whf_i) + \delta_{ij} (q_{rj}^{(n_j)} - \widehat{f}_j) - \delta_{ij} k_j \text{sign}(s_j)] s_i - k_i |s_i| \leq -\eta |s_i| \\ \implies & k_i |s_i| \geq \eta |s_i| + [(f_i - whf_i) + \delta_{ij} (q_{rj}^{(n_j)} - \widehat{f}_j) - \delta_{ij} k_j \text{sign}(s_j)] s_i\end{aligned}$$

e dunque, considerando il caso più sfavorevole si ha:

$$\begin{aligned}k_i &\geq \eta + |f_i - \widehat{f}_i| + d_{ij} |q_{rj}^{(n_j)} - \widehat{f}_j| + d_{ij} k_j \\ \implies & k_i - d_{ij} k_j \geq \eta + |f_i - \widehat{f}_i| + d_{ij} |q_{rj}^{(n_j)} - \widehat{f}_j|\end{aligned}$$

Questa espressione scalare può infine essere scritta in forma vettoriale, definendo un vettore z , con $z_i = \eta + |f_i - \widehat{f}_i| + d_{ij} |q_{rj}^{(n_j)} - \widehat{f}_j|$, ovvero

$$(I - D)k = z$$

dove z risulta positivo per definizione, D è una matrice con autovalore di Frobenius-Perron strettamente minore di 1, e quindi k , detto *vettore dei guadagni*, è un vettore positivo soluzione del sistema lineare.

8.3 Controllo della bicicletta

Il controllo della bicicletta può essere progettato in accordo con la teoria esposta in precedenza. In base alla scelta fatta a proposito dei gradi di libertà del sistema, andremo a controllare l'angolo di rollio, quello di sterzo e la rotazione propria della ruota posteriore. In particolare, le equazioni di moto sono state ricavate alla fine del capitolo 7, pertanto è sufficiente costruire un controllo che sia adatto al problema.

Tuttavia, poiché tali equazioni di moto non sono scritte in forma esplicita, anche il controllo risulterà essere espresso per mezzo di funzioni non lineari. Il problema è pertanto risolubile solo attraverso metodi numerici, che permettano di controllare opportunamente le equazioni di moto. Le altre coordinate generalizzate sono poi ricavate in base ai valori assunti da quelle libere durante il moto.

Osserviamo che il problema del controllo della bicicletta nasce prevalentemente in connessione con la sua stabilizzazione. Infatti, abbiamo più volte osservato che il sistema è staticamente instabile, e durante il moto è necessario controllarlo affinché risulti stabile.

Dalle equazioni del moto libero questo aspetto può non essere molto chiaro, ma ciò deriva dal fatto che il sistema anolonomo considerato conserva la propria energia durante il moto. A meno che non vi sia presente una qualche forza dissipativa, come l'attrito viscoso introdotto nel precedente capitolo tramite il potenziale generalizzato di Rayleigh, il sistema appare comunque stabile e continua il suo avanzamento in modo indefinito.

Bibliografia

- [1] V. I. Arnold. *Metodi Matematici della Meccanica Classica*. Editori Riuniti, Roma, 2004, ed. or. 1979.
- [2] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, e A. I. Neishtadt. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006, ed. or. 2002.
- [3] L. Bates e J. Sniatycki. Nonholonomic reduction. *Rep. Math. Phys.*, 32(1):99–115, 1993.
- [4] A. Bertin, M. Poli, e A. Vitale. *Fondamenti di Meccanica*. Progetto Leonardo, Bologna, 1997, ed. or. 1996.
- [5] A. M. Bloch, J. Baillieul, P. Crouch, e J. E. Marsden. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [6] A. M. Bloch, P. S. Krishnaprasad, J. E. Marsden, e R. M. Murray. Nonholonomic Mechanical Systems with Symmetry. *Arch. Rat. Mech. An.*, 136:21–99, 1996.
- [7] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. New York Academic Press, 1975.
- [8] G. Borgioli e G. Frosali. Appunti di Meccanica Analitica. http://poincare.dma.unifi.it/~frosali/didattic/commec/dispense/cmr_1b.pdf.
- [9] C. Bourlet. Étude Théorique sur la Bicyclette. *Bulletin de la S. M. F.*, XXVII:47–67, 76–96, 1899.
- [10] V. Cossalter. *Cinematica e Dinamica della Motocicletta*. Edizioni Progetto Padova, 1997.
- [11] G. Gentili, F. Podestà, e E. Vesentini. *Lezioni di Geometria Differenziale*. Bollati-Boringhieri, 1995.
- [12] H. R. Hertz. *Der Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*. Barth, Leipzig, 1894.
- [13] W. S. Koon. Reduction, Reconstruction and Optimal Control for Nonholonomic Mechanical System with Symmetry. Doctor in philosophy in mahematics, University of California, Berkeley, 1997.
- [14] W. S. Koon e J. E. Marsden. Optimal Control for Holonomic and Nonholonomic Mechanical Systems with Symmetry. *SIAM J. Control and Optim*, 35:901–929, 1997.
- [15] W. S. Koon e J. E. Marsden. The Hamiltonian and Lagrangian Approches to the Dynamics of Nonholonomic Systems. *Rep. Math. Phys.*, 40:21–62, 1997.

-
- [16] C. M. Marle. Kinematic and Geometric Constraints, Servomechanism and Control of Mechanical Systems. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 54:353–364, 1996.
- [17] C. M. Marle. Various Approaches to Conservative and Nonconservative Nonholonomic Systems. *Reports on Mathematical Physics*, 42:211–229, 1998.
- [18] J. P. Meijaard e A. L. Schwab. Linearized Equations for an Extended Bicycle Model. *III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, pp. 1–18, 2006.
- [19] J. I. Neimark e N. A. Fufaev. *Dynamics of Nonholonomic Systems*. America Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1972, ed. or. 1967.
- [20] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, 1971.
- [21] F. J. W. Whipple. The Stability of the Motion of a Bicycle. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, XXX:312–384, 1899.