$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & x<0 \\ x^{\alpha}(x+1) & x>0 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^{\alpha}(x+1) = \begin{cases} 0 & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ +\infty & \alpha<0 \end{cases}$$

Dunque f è estendibile con continuità a tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha>0$. In questo caso si estende con continuità ponendo $f(0)=0$.

2) Dalla discussione del pto precedente abbiamo che esiste l'asintoto verticale $x=0$ se e solo se $\alpha<0$. Non vi sono ulteriori asintoti verticali.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Dunque per $x\to -\infty$ abbiamo l'asintoto orizzontale $y=1$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^{\alpha}(x+1) = \begin{cases} +\infty & \alpha>-1 \\ 1 & \alpha=-1 \\ 0 & \alpha<-1 \end{cases}$$

Dunque per $x\to +\infty$ abbiamo

asintoto orizzontale $y=1$ per $\alpha=-1$

" " $y=0$ per $\alpha<-1$

Discutiamo, per $\alpha>-1$ l'esistenza di un asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1}(x+1)$$ esiste finito se e solo se $\alpha-1=-1$ (cioè se e solo se $\alpha=0$) ed in tal caso vale 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^{0}(x+1)-x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}+1-\cancel{x}\right) = 1$$

Dunque ho un asintoto obliquo (per $x\to+\infty$) se e solo se $\alpha=0$ ed in tal caso l'asintoto è la retta di equazione $\boxed{y=x+1}$

3) Per $x<0$ $\quad f'(x) = \frac{-1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ dunque non esistono punti di estremo relativo in $(-\infty,0)$

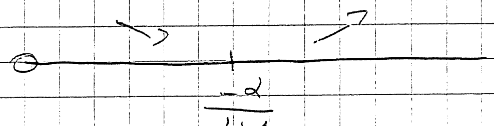
Per $x>0$ $\quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}(x+1) + x^{\alpha} =$

$= x^{\alpha-1}\left((\alpha+1)x+\alpha\right)$

Dunque: Se $\alpha\le-1$ $\quad f'(x)<0 \quad \forall x>0$

se $\alpha\ge0$ $\quad f'(x)>0 \quad \forall x>0$

Se $\alpha\in(-1,0)$ $\quad f'(x)\gtrless 0$ SSE $x\gtrless\frac{-\alpha}{\alpha+1}$



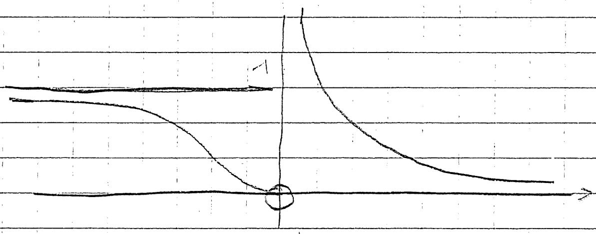
Ho un minimo relativo in $\bar{x}_\alpha = \frac{-\alpha}{\alpha+1}$

$$f(\bar{x}_\alpha) = \left(\frac{-\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}\left(\frac{-\alpha}{\alpha+1}+1\right) = \left(\frac{-\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}\frac{1}{\alpha+1} = \frac{(-\alpha)^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} > 1$$

4) 5) e 7) L'immagine di $f|_{(0,+\infty)}$ è $(0,1)$

$\alpha < -1$

$f'(x) < 0 \ \forall x > 0$



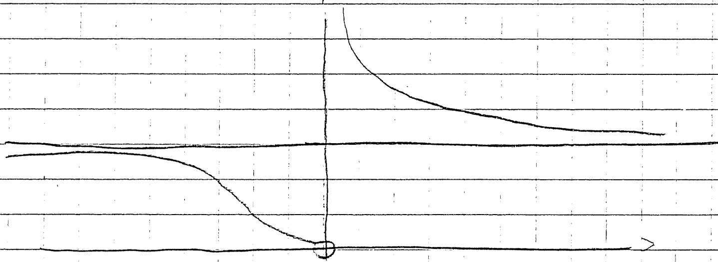
$Im(f) = (0, +\infty)$

$\inf f = 0$ non è min

$\sup f = +\infty$ non è max

$\alpha = -1$

$f'(x) < 0 \ \forall x > 0$



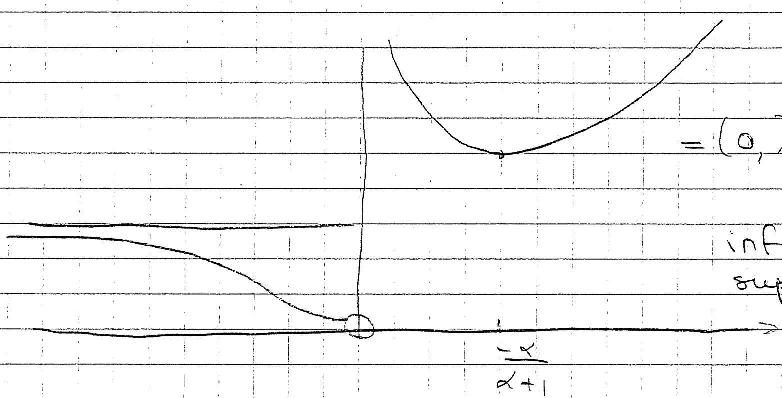
$Im(f) =$

$= (0,1) \cup (1, +\infty)$

$\inf f = 0$ non è min

$\sup f = +\infty$ non è max

$\alpha \in (-1, 0)$



$Im(f) =$

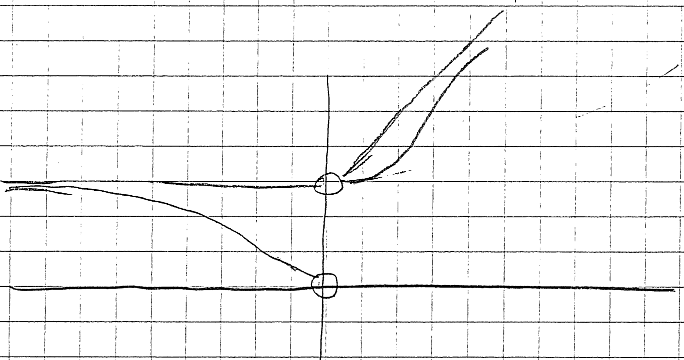
$= (0,1) \cup \left[\frac{(-\alpha)^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}, +\infty\right)$

$\inf f = 0$ non è min

$\sup f = +\infty$ non è max

$\alpha = 0$

$f'(x) > 0 \ \forall x > 0$



$Im(f) =$

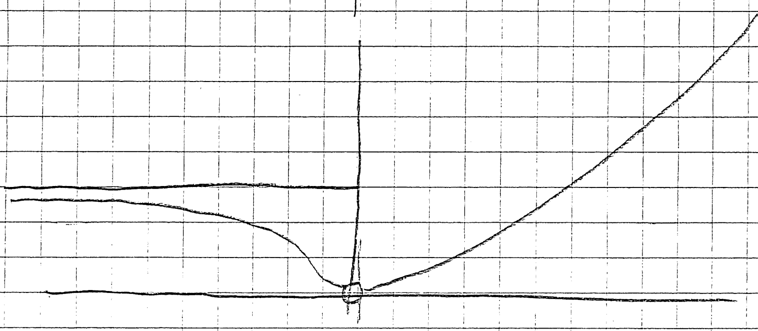
$= (0,1) \cup (1, +\infty)$

$\inf f = 0$ non è min

$\sup f = +\infty$ non è max

$\alpha > 0$

$f'(x) > 0 \ \forall x > 0$



$Im(f) =$

$(0, +\infty)$

$\inf f = 0$ non è min

$\sup f = +\infty$ non è max

6) Il dominio di $F(x)$ è $(0,+\infty)$ se $\alpha \leq -1$

$\mathbb{R}$ se $\alpha > -1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(|x|^{\beta}) - \frac{3}{2}\beta|x|^{2/3}}{1-\cos(x)}$$

$$1-\cos(x) = 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right) = \frac{x^2}{2}+O(x^4) \quad x \sim 0$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5) \quad t \sim 0$$

Poiché $\beta > 0$ quando $x \to 0$ ho anche $|x|^{\beta} \to 0$

dunque posso scrivere

$$\sin(|x|^{\beta}) = |x|^{\beta} - \frac{|x|^{3\beta}}{6} + O(|x|^{5\beta}) \Rightarrow$$

$$\frac{\sin(|x|^{\beta}) - \frac{3}{2}\beta|x|^{2/3}}{1-\cos(x)} = \frac{-\frac{3}{2}\beta|x|^{2/3} + |x|^{\beta} - \frac{|x|^{3\beta}}{6} + O(|x|^{5\beta})}{\frac{x^2}{2}+O(x^4)}$$

1) $\beta > \frac{2}{3}$: divido numeratore e denominatore per $|x|^{2/3}$

$$\frac{-\frac{3}{2}\beta + |x|^{\beta-\frac{2}{3}} + O(|x|^{3\beta-\frac{2}{3}})}{\frac{1}{2}|x|^{2-\frac{2}{3}} + O(|x|^{4-\frac{2}{3}})}$$

diverge a $-\infty$ quando $x \to 0$

2) $\beta = \frac{2}{3}$ $\quad \dfrac{\cancel{-\frac{3}{2}\frac{2}{3}|x|^{2/3}} + \cancel{|x|^{2/3}} - \frac{|x|^2}{6} + o\left(|x|^{10/3}\right)}{\frac{x^2}{2} + o(x^4)}$

$$= \frac{-\frac{1}{6} + o\left(|x|^{4/3}\right)}{\frac{1}{2} + o(x^2)}$$ converge a $-\frac{1}{3}$ quando $x \to 0$

3) $\beta < \frac{2}{3}$ divido numeratore e denominatore per $|x|^\beta$

$$\frac{1 - \frac{3}{2}\beta|x|^{\frac{2}{3}-\beta} + o\left(|x|^{2\beta}\right)}{\frac{|x|^{2-\beta}}{2} + o\left(|x|^{4-\beta}\right)}$$

$\beta < \frac{2}{3} \Rightarrow 2-\beta > 0 \Rightarrow$ il rapporto diverge a $+\infty$ quando $x \to 0$

Riassumendo il limite vale

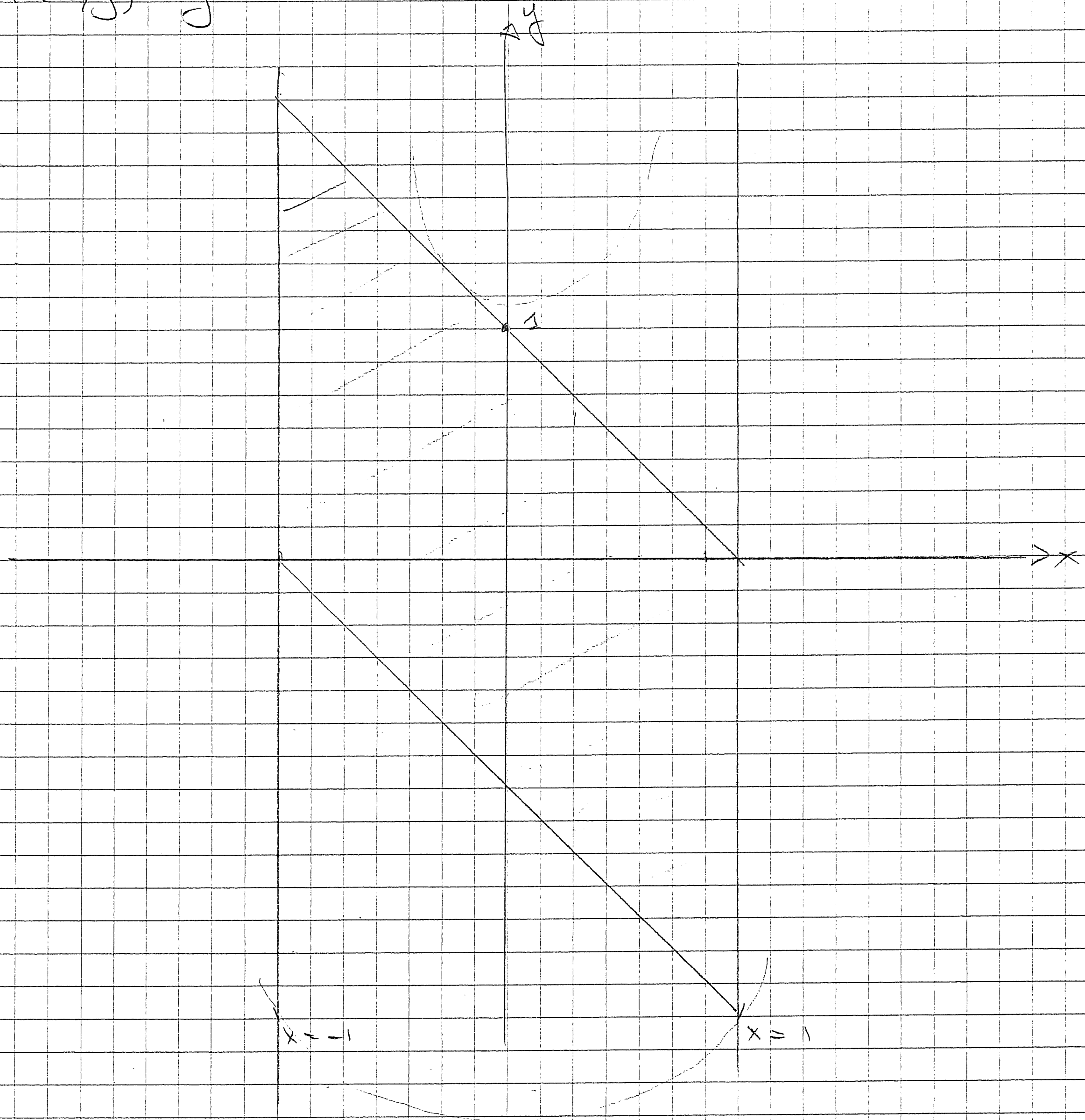
$-\infty$ se $\beta > \frac{2}{3}$

$-\frac{1}{3}$ se $\beta = \frac{2}{3}$

$+\infty$ se $\beta < \frac{2}{3}$

3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, |x+y| \le 1\}$

$f(x,y) = y - x^2$



$\begin{cases} |x| \le 1 \\ |x+y| \le 1 \end{cases}$ significa $\begin{cases} -1 \le x \le 1 & -1 \le x \le 1 \\ -1 \le x+y \le 1 & -1-x \le y \le 1-x \end{cases}$

Linee di livello di f: $y - x^2 = C_1$ $\quad y = x^2 + C_1$

parabole di vertice $(0, C_1)$ con concavità rivolta verso l'alto

Minimo: si ottiene con la parabola passante per $(1,-2)$

$y = x^2 + C$ passa per $(1,-2) \iff -2 = 1 + C \iff C = -3$

$\Rightarrow$ il minimo di $f|_D$ è -3 ed è assunto nel pto $(1,-2)$

Il massimo assoluto di $f|_D$ si ottiene imponendo la tangenza tra la parabola $y = x^2 + C$ ed il segmento $y = 1 - x$, $x \in [-1,1]$

$$\begin{cases} y = x^2 + C \\ y = 1 - x \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x^2 + C = 1 - x \\ &x^2 + x + C - 1 = 0 \\ &\Delta = 0 \iff 1 - 4(C-1) = 0 \end{aligned}$$

$\iff C = \frac{5}{4}$

$C = \frac{5}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Dunque $\max f|_D = \frac{5}{4}$ ed è assunto nel pto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$