1) α parametro reale

$$f(x) = \begin{cases} 4\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) & x<-3 \\ \max\{|x-1|, |x+1|\} & |x|\leq 3 \\ \left|\frac{x}{3}\right|^{\alpha} & x>3 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1) DOMINIO DI F: la funzione f ha al più due punti di discontinuità (-3 e 3) che comunque possono solo essere discontinuità di prima specie, quindi

$$\mathcal{D}(F) = \mathbb{R}$$

2) F è limitata se e solo se $\int_3^{+\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^{\alpha} dt$ converge cioè se e solo se $\boxed{\alpha < -1}$

3) F è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi NON ci sono asintoti verticali.

Per $x<-3$ abbiamo $F(x) = F(-3) + \int_{-3}^{x} 4\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)dt$

$$= F(-3) + 6\pi \sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$$

Quindi $\nexists \lim_{x\to -\infty} F(x)$

Per $x>3$ abbiamo $F(x) = F(3) + \int_3^x \left(\frac{t}{3}\right)^{\alpha} dt =$

$$= F(3) + \frac{1}{3^{\alpha}(\alpha+1)}\left(x^{\alpha+1} - 3^{\alpha+1}\right) \quad \text{se } \alpha \neq -1$$

Dunque ho (1) un asintoto orizzontale SSE $\alpha < -1$ ~~ed ha equa~~ Tale asintoto ha equazione

$$y = F(3) - \frac{3}{\alpha+1}$$

(2) un asintoto obliquo SSE $\alpha = 0$

In tal caso $\forall x > 3 \quad F(x) = F(3) + x - 3$

e dunque l'asintoto è proprio la retta di equazione $y = x + F(3) - 3$

(3) Non ho asintoto per $x \to +\infty$ se $\alpha \neq 0$, $\alpha > -1$

cioè non ho asintoto se $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

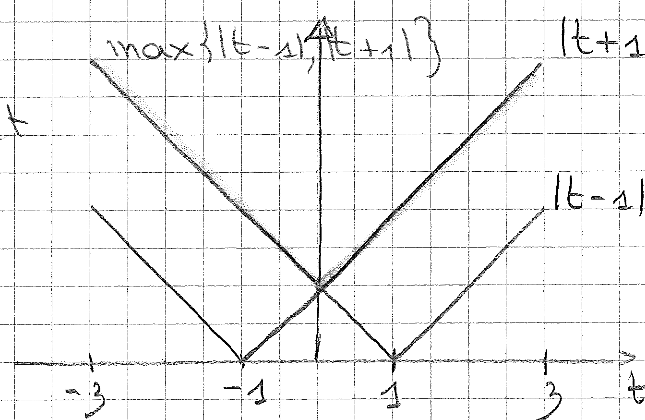
(4) Resta da vedere il caso particolare $\alpha = -1$ per il quale si ha

$$F(x) = F(3) + \int_3^x \frac{3}{t} dt = F(3) + 3 \ln(t) \Big|_{t=3}^{t=x}$$

$$F(x) = F(3) + 3\left(\ln(x) - \ln(3)\right)$$

che non ammette asintoto

Per i casi $\alpha = 0$ e $\alpha \leq -1$ l'asintoto è determinato completamente se calcoliamo $F(3)$



$$F(3) = \int_0^3 \max\{|t-1|, |t+1|\} dt$$

$$= \int_0^3 (t+1) dt = \frac{t^2}{2} + t \Big|_{t=0}^{t=3} =$$

$$= \frac{9}{2} + 3 = \frac{15}{2}$$

Dunque: $\alpha < -1$ ASINTOTO ORIZZONTALE

$$y = \frac{15}{2} - \frac{3}{\alpha + 1}$$

$\alpha = 0$ ASINTOTO OBLIQUO

$$y = x + \frac{9}{2}$$

4) F è una funzione integrale, dunque non ha punti di discontinuità: $F \in C^0(\mathbb{R})$

5) F è non derivabile in un punto $x \in \mathbb{R}$ SSE f è discontinua in quel punto.
Abbiamo già detto che gli eventuali punti di discontinuità di f possono essere solo $x=3$ e $x=-3$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 4\cos(-6\pi) = 4$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \max\{|-4|, |-2|\} = 4$$

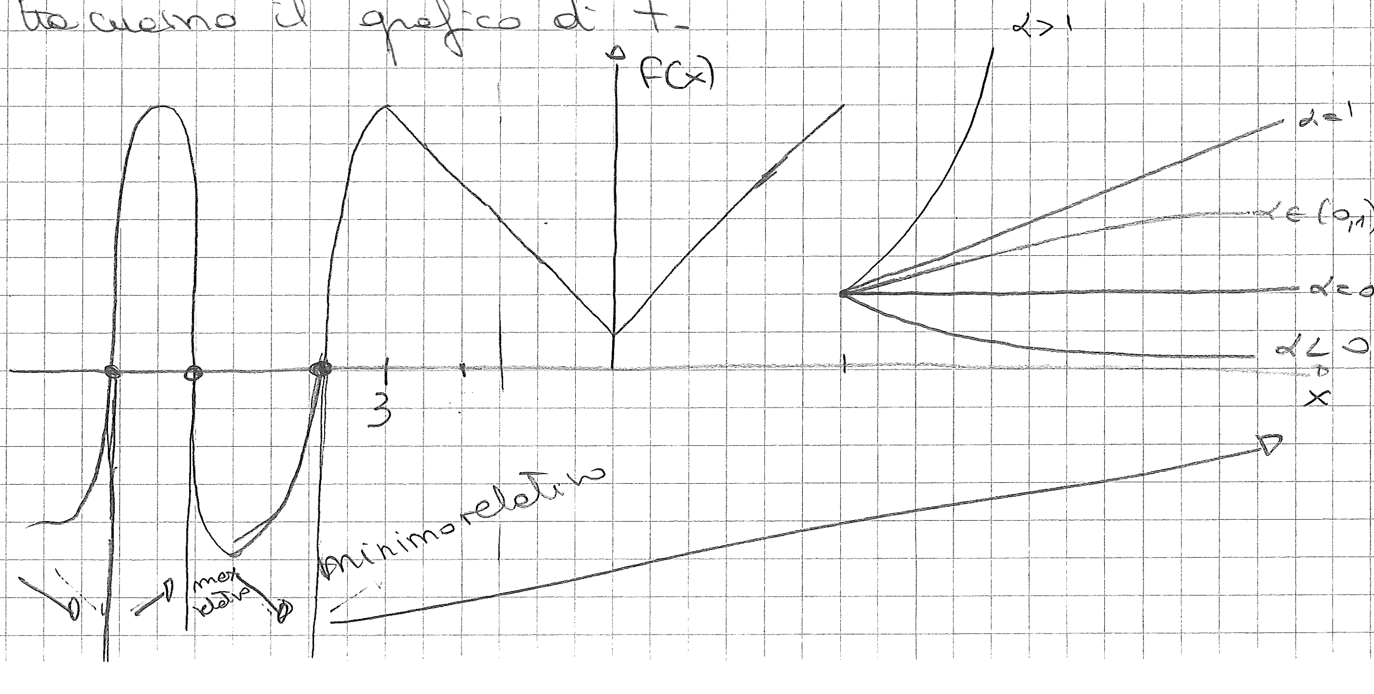
$\Rightarrow$ F è derivabile in $x = -3$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \max\{|2|, |4|\} = 4$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$$

$\Rightarrow$ F NON è derivabile in $x = 3$ e questo è l'unico punto in cui F è non derivabile

6) Per determinare i punti di estremo relativo di F, tracciamo il grafico di f.



Dunque $F'(x) = f(x)$ ~~esso~~ si annulla cambiando di segno solo nei punti ~~[illegible]~~ $\begin{cases} x < -3 \\ \frac{2}{3}\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + k\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}k \end{cases}$$

In particolare i punti del tipo $\begin{cases} x < -3 \\ \frac{2}{3}\pi x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

sono punti di massimo relativo,

mentre i punti del tipo $\begin{cases} x < -3 \\ \frac{2}{3}\pi x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \end{cases}$

sono punti di minimo relativo

7) I punti di flesso di F sono gli x t.c. $F''(x) = 0$

$$F''(x) = f'(x) = \begin{cases} -\frac{8\pi}{3}\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) & x < -3 \\ -1 & -3 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 3 \\ \frac{1}{3^\alpha}\alpha x^{\alpha - 1} & x > 3 \end{cases}$$

I punti di flesso sono tutti e soli gli

$$\begin{cases} x < -3 \\ \frac{2\pi x}{3} = l\pi \quad l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

cioè $\begin{cases} x < -3 \\ x = \frac{3}{2}l \quad l \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\quad \boxed{x = \frac{3}{2}l \quad l \in \mathbb{Z}, \; l \leq -3}$

8) Abbiamo visto che la derivata prima di F in $(-3,3)$ è sempre positiva

Dunque $\max F\big|_{[-3,3]} = F(3) = \frac{15}{2}$

$\min F\big|_{[-3,3]} = F(-3)$

Poiché $f\big|_{[-3,3]}$ è pari, allora $F\big|_{[-3,3]}$ è dispari,

quindi $\min F\big|_{[-3,3]} = F(-3) = -\frac{15}{2}$

2)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \left(e^t \sqrt[3]{1+t^2}\right)^2 dt}{\left(\int_0^x e^t \sqrt[3]{1+t^2}\, dt\right)^2}$$

E' una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$
Applico il Teorema de l'Hopital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^x \sqrt[3]{1+x^2}\right)^{\cancel{2}}}{2\left(\int_0^x e^t \sqrt[3]{1+t^2}\, dt\right) \cancel{e^x \sqrt[3]{1+x^2}}}$$

E' ancora una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$,
applico di nuovo il Teorema de l'Hopital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(\sqrt[3]{1+x^2} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{-2/3}\, 2x\right)}{2\, \cancel{e^x} \sqrt[3]{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{2}{3}\frac{x}{1+x^2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

3)

1) Le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole le funzioni della forma

$$x(t) = e^{-2t}\left(A + Bt + t^2\right) \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

2) Detto t_0 l'eventuale punto di tangenza con la retta $x=0$, devo avere

$$\begin{cases} x(t_0) = 0 \\ \dot{x}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero}$$

$$\begin{cases} e^{-2t_0}\left(A + Bt_0 + t_0^2\right) = 0 \\ e^{-2t_0}\left(-2A - 2Bt_0 - 2t_0^2 + B + 2t_0\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + Bt_0 + t_0^2 = 0 \\ -2A + B(1-2t_0) - 2t_0^2 + 2t_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + Bt_0 = -t_0^2 \\ -2A + B(1-2t_0) = 2t_0^2 - 2t_0 \end{cases}$$

da cui ricavo $\quad A = t_0^2, \; B = -2t_0$

Dunque $\quad x(t) = e^{-2t}(t-t_0)^2$

3) Detto t_0 l'eventuale punto di tangenza devo avere

$$\begin{cases} x_0(t_0) = 0 \\ \dot{x}_0(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero}$$

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 4x(t) = 2e^{-2t}$$

E' una eq. differenziale lineare non omogenea
Considero l'omogenea associata

$$\ddot{x}(t) + 4\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0$$

Polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$

$\lambda = -2$ radice doppia

Le soluzioni dell'eq omogenea associata sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$x_0(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} = e^{-2t}(A+Bt)$$
$$A, B \in \mathbb{R}$$

Cerco una soluzione particolare dell'eq. completa nella forma $\bar{x}(t) = C t^2 e^{-2t}$

$$\dot{\bar{x}}(t) = 2Cte^{-2t} - 2Ct^2e^{-2t}$$
$$= 2Ce^{-2t}(t - t^2)$$
$$\ddot{\bar{x}}(t) = 2Ce^{-2t}(1-2t) - 4Ce^{-2t}(t-t^2)$$
$$= 2Ce^{-2t}(1 - 2t - 2t + 4t^2)$$
$$= 2Ce^{-2t}(1 - 4t + 4t^2)$$

$$2C\cancel{e^{-2t}}(1 - \cancel{4t} + \cancel{4t^2}) + 8C\cancel{e^{-2t}}(\cancel{t} - \cancel{t^2}) +$$
$$+ \cancel{4Ct^2}\cancel{e^{-2t}} = 2\cancel{e^{-2t}}$$

$2C = 2$ $\quad C = 1$ $\quad \bar{x}(t) = t^2e^{-2t}$

$$\begin{cases} e^{-2t_0}(A + Bt_0) = 0 \\ e^{-2t_0}(B - 2A - 2Bt_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + Bt_0 = 0 \\ -2A + B(1 - 2t_0) = 0 \end{cases}$$

da cui ricavo $A = B = 0$. Quindi:

L'unica soluzione della eq. omogenea associata che è tangente alla retta $x = 0$ è la soluzione identicamente nulla $x_0(t) \equiv 0$, il cui grafico è la retta stessa