1 Prova scritta del 26 Gennaio 2011

Primo esercizio

Esercizio 1.1. Al variare del parametro reale α, si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita a tratti da

$$f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{x}{2}\right|^{\alpha} & x < -2, \\ \min\{|x-1|, |x+1|\} & |x| \leq 2, \\ \sin\left(\dfrac{x\pi}{4}\right) & x > 2 \end{cases}$$

e sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Si determinino:

1. il dominio di F;
2. tutti e soli i valori del parametro α per cui F è limitata;
3. gli eventuali asintoti di F;
4. gli eventuali punti di discontinuità di F;
5. gli eventuali punti di non derivabilità di F;
6. gli eventuali punti di estremo relativo di F;
7. gli eventuali punti di flesso di F;
8. il massimo ed il minimo assoluti di $F|_{[-2,2]}$;
9. l'immagine di F e di $F|_{[-2,2]}$.

Infine si tracci il grafico di F.

Esercizio 1.2. Al variare del parametro reale α, si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita a tratti da

$$f(x) = \begin{cases} 4\cos\left(\dfrac{2x\pi}{3}\right) & x < -3, \\ \max\{|x-1|, |x+1|\} & |x| \leq 3, \\ \left|\dfrac{x}{3}\right|^{\alpha} & x > 3 \end{cases}$$

e sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Si determinino:

1. il dominio di F;
2. tutti e soli i valori del parametro α per cui F è limitata;
3. gli eventuali asintoti di F;
4. gli eventuali punti di discontinuità di F;
5. gli eventuali punti di non derivabilità di F;
6. gli eventuali punti di estremo relativo di F;
7. gli eventuali punti di flesso di F;
8. il massimo ed il minimo assoluti di $F|_{[-3,3]}$;
9. l'immagine di F e di $F|_{[-3,3]}$.

Infine si tracci il grafico di F.

Secondo esercizio

Esercizio 1.3. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x \left(\mathrm{e}^t \ln(1+t)\right)^2 \,\mathrm{d}t}{\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t \ln(1+t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

Esercizio 1.4. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x \left(\mathrm{e}^t \sqrt[3]{1+t^2}\right)^2 \,\mathrm{d}t}{\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t \sqrt[3]{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

Terzo esercizio

Esercizio 1.5. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 4x(t) = 4\mathrm{e}^{2t}.$$

1. Determinare tutte e sole le soluzioni dell'equazione;
2. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale il cui grafico è tangente alla retta $x = 0$;
3. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione omogenea associata il cui grafico è tangente alla retta $x = 0$?

Esercizio 1.6. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 4x(t) = 2\mathrm{e}^{-2t}.$$

1. Determinare tutte e sole le soluzioni dell'equazione;
2. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale il cui grafico è tangente alla retta $x = 0$;
3. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione omogenea associata il cui grafico è tangente alla retta $x = 0$?

2 Prova scritta del 9 Febbraio 2011

Primo esercizio

Esercizio 2.1. Al variare del parametro reale α, si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) & x < 0, \\ \dfrac{x^\alpha}{x+1} & x > 0 \end{cases}$$

e si discutano:

1. la possibilità di estendere f con continuità su tutto $\mathbb{R}$;
2. l'esistenza di asintoti;
3. gli estremi relativi e i punti di estremo relativo;
4. l'estremo superiore ed inferiore di f e si dica se sono massimo e minimo di f;
5. l'immagine di f;
6. il dominio della funzione integrale

$$F(x) := \int_1^x \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{dove} \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

7. infine si tracci il grafico di f.

Esercizio 2.2. Al variare del parametro reale α, si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) & x < 0, \\ x^{\alpha}(x+1) & x > 0 \end{cases}$$

e si discutano:

1. la possibilità di estendere f con continuità su tutto $\mathbb{R}$;
2. l'esistenza di asintoti;
3. gli estremi relativi e i punti di estremo relativo;
4. l'estremo superiore ed inferiore di f e si dica se sono massimo e minimo di f;
5. l'immagine di f;
6. il dominio della funzione integrale

$$F(x) := \int_1^x \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{dove} \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

7. infine si tracci il grafico di f.

Secondo esercizio

Esercizio 2.3. Al variare del parametro reale positivo β calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(|x|^{\beta}\right)}{1 - \cos(x) - \dfrac{\beta}{2}x^2}$$

Esercizio 2.4. Al variare del parametro reale positivo β calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(|x|^{\beta}\right) - \dfrac{3}{2}\beta\,|x|^{\frac{2}{3}}}{1 - \cos(x)}$$

Terzo esercizio

Esercizio 2.5. Sia

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ |x| \leq 1, \ |x + y| \leq 1\right\}.$$

e sia $f \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y - x^2 \in \mathbb{R}$.

Determinare, se esistono, gli estremi assoluti di $f|_D$.

Esercizio 2.6. Sia

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ |y| \leq 1, \ |x| - |y| \leq 1\right\}.$$

e sia $f \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - y^2 \in \mathbb{R}$.

Determinare, se esistono, gli estremi assoluti di $f|_D$.