Soluzioni della Prova d'esame n. 2 - 11 Gennaio 2006

Complementi di Analisi Matematica - a.a. 2005-2006

Esercizio 1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi e sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1}$$

la serie di potenze ad essa associata.

1. Sapendo che la serie (1) ha raggio di convergenza $R \in (0, +\infty)$, calcolare, al variare di k in $\mathbb{N}$, $k \geq 2$, il raggio di convergenza R_1 della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{kn} \,. \tag{2}$$

   Se R è il raggio di convergenza della serie (1), poiché $z^{kn} = (z^k)^n$, ne segue che affinché la serie (2) converga, deve essere

$$|z^k| = |z|^k < R$$

   mentre la serie non può convergere se

$$|z^k| = |z|^k > R$$

   quindi

$$R_1 = \sqrt[k]{R}.$$

2. Nella serie (1) si ponga $a_n = n(n+2)$.

   a) Determinare il raggio di convergenza della serie ottenuta.

   La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+2)z^n$ ha raggio di convergenza

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 1$$

b) Sia ora I l'intersezione dell'asse reale con l'insieme di convergenza. Usando opportunamente il teorema di integrazione e derivazione per serie e le proprietà algebriche delle serie di potenze, riconoscere la funzione somma della serie.

Poiché $n(n+2) = n(n+1) + n$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+2)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n =$$

$$= xD^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} + xD \sum_{n=0}^{+\infty} x^n =$$

$$= xD^2(\frac{1}{1-x} - 1) + xD(\frac{1}{1-x}) =$$

$$= xD(\frac{1}{(1-x)^2}) + xD(\frac{1}{1-x}) =$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{3x - x^2}{(1-x)^3}$$

Esercizio 2. Disegnare il grafico della funzione definita sull'intervallo $[-1, 3]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [-1, 1) \\ (2-x) & \text{se} \quad x \in [1, 3) \end{cases}$$

ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità (con periodo $T = 4$), indicare gli eventuali punti di discontinuità, quelli in cui è derivabile e rispondere ai seguenti quesiti.

1. Determinare la pulsazione associata al periodo $T = 4$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi/2$$

2. Determinare la componente continua, la componente fondamentale e la k-sima armonica di f e le loro ampiezze e fasi.

$$\text{Componente continua: } \widehat{f_0} =< f, 1 >= \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = 0$$

$$\widehat{f_k} =< f, \exp(ik\omega t) >= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x\, e^{-ik\omega x} dx + \frac{1}{4}\int_{1}^{3} (2-x)\, e^{-ik\omega x} dx$$

$$\int_{-1}^{1} x\, e^{-ik\omega x} dx = \left[\frac{e^{-ik\omega x}}{k^2\omega^2}(1 + ik\omega x)\right]_{-1}^{1} = \frac{2ik\omega\cos(k\omega) - 2i\sin(k\omega)}{k^2\omega^2}$$

$$\int_{1}^{3} (2-x)\, e^{-ik\omega x} dx = \left[\frac{e^{-ik\omega x}}{k^2\omega^2}(-1 + ik\omega(2-x))\right]_{1}^{3} = \frac{-2ik\omega\cos(k\omega) - 2i\sin(k\omega)}{k^2\omega^2}$$

$$\widehat{f_k} = -\frac{i\sin(k\omega)}{k^2\omega^2}$$

$$\text{Componente principale: } \widehat{f}_{-1}\, e^{-i\omega x} + \widehat{f}_1\, e^{i\omega x} = \frac{2}{\omega^2}\sin(\omega x) = \frac{8}{\pi^2}\sin(\pi x/2)$$

$$\text{ampiezza: } A = \frac{8}{\pi^2} \quad \text{fase: } \varphi = -\pi/2$$

$$\text{k-sima armonica: } \widehat{f}_{-k}\, e^{-ik\omega x} + \widehat{f}_k\, e^{ik\omega x} = \frac{8\sin(k\omega)}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x/2) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se k è pari} \\ \frac{8\sin(k\omega x)}{k^2\pi^2} & \text{se} \quad k = 4n+1 \\ -\frac{8\sin(k\omega x)}{k^2\pi^2} & \text{se} \quad k = 4n+3 \end{cases}$$

$$\text{ampiezza: } A = \frac{8}{k^2\pi^2} \quad \text{fase: } \varphi = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se} \quad k = 4n+1 \\ \pi/2 & \text{se} \quad k = 4n+3 \end{cases}$$

3. Scrivere la serie di Fourier di f.

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{\sin(k\pi/2)}{k^2}\sin(k\pi x/2) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n\geq 0}\frac{\sin((4n+1)\pi x/2)}{(4n+1)^2} - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n\geq 0}\frac{\sin((4n+3)\pi x/2)}{(4n+3)^2}$$

4. Scrivere l'identità di Parseval (o uguaglianza dell'energia) per f.

$$E =< f, f >= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} f(x)^2\, dx = \frac{1}{3} = \frac{36}{\pi^4}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^4}$$

5. Verificare direttamente che la serie del punto (3) converge uniformemente e quindi puntualmente. Verificare che la funzione f soddisfa ad uno dei criteri di convergenza uniforme per le serie di Fourier.

   Poiche' la serie armonica generalizzata $\sum_{k\geq 1} 1/k^2$ *converge, allora la serie del punto (3) converge totalmente e quindi uniformemente e quindi puntualmente.*

   La funzione f é continua, C^∞ in $\mathbb{R} - \{-1+2k : k \in \mathbb{Z}\}$ e f' ha limite destro uguale a ± 1 e limite sinistro uguale a $\pm$ per $x \to -1+2k$.

Esercizio 3. 1. Le curve caratteristiche per l'EDP

$$xu_x(x,y) + u_y(x,y) = 0\,, \qquad x > 0\,,\ y \in \mathbb{R} \tag{3}$$

sono le curve integrali dell'equazione (elementare)

$$y' = \frac{1}{x}\,, \qquad x > 0\,,$$

cioè i grafici delle funzioni $y(x) = \log x + C$, con $C \in \mathbb{R}$.
Poiché le soluzioni di (3) sono costanti lungo le caratteristiche, si ha che $u(x, \log x + C)$ non dipende da x, e ad esempio

$$u(x, \log x + C) = u(1, C)\,, \quad \text{con } C = y - \log x\,.$$

Pertanto $u(x, y) = u(1, y - \log x)$, e le soluzioni (classiche) di (3) sono della forma

$$u(x, y) = f(y - \log x)\,, \tag{4}$$

con f funzione arbitraria (di classe $C^1(\mathbb{R})$).

2. Imponendo la condizione ausiliaria $u(x, 0) = x^2$, si deduce da (4) che

$$f(-\log x) = x^2\,, \quad x > 0\,,$$

e ponendo $w = -\log x$ (cioè $x = e^{-w}$), si vede che $f(w) = e^{-2w}$. Tornando alla (4) si ottiene infine

$$u(x, y) = e^{-2(y - \log x)} = x^2 e^{-2y}\,. \tag{5}$$

(*Verifica*: La funzione $u(x, y) = x^2 e^{-2y}$ soddisfa $u(x, 0) = x^2$, è di classe $C^1((0, \infty) \times \mathbb{R})$ (di fatto, su $\mathbb{R}^2$), con

$$u_x(x, y) = 2xe^{-2y}\,, \quad u_y(x, y) = -2x^2 e^{-2y}\,.$$

Pertanto $xu_x(x, y) + u_y(x, y) = 0$ e u è la soluzione cercata).

Esercizio 4. 1. Sia u una soluzione classica di

$$u_{tt} + 2du_t - u_{xx} + d^2 u = 0\,, \quad x, t \in \mathbb{R}\,, \tag{6}$$

e sia $v(x, t) := e^{dt} u(x, t)$. Dunque $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, e si ha

$$\begin{aligned} v_x &= e^{dt} u_x\,, \quad v_{xx} = e^{dt} u_{xx}\,; \quad v_t = dv + e^{dt} u_t\,; \\ v_{tt} &= dv_t + de^{dt} u_t + e^{dt} u_{tt} = d(dv + e^{dt} u_t) + de^{dt} u_t + e^{dt} u_{tt} \\ &= e^{dt}\big(d^2 u + 2du_t + u_{tt}\big)\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$v_{tt} - v_{xx} = e^{dt}\big(u_{tt} + 2du_t + d^2 u - u_{xx}\big) \equiv e^{dt} \cdot 0 = 0\,,$$

che è ciò che si voleva verificare. Inoltre, dalle condizioni inziali

$$u(x, 0) = f(x)\,, \quad u_t(x, 0) = g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R} \tag{7}$$

segue che

$$\begin{aligned} &v(x, 0) = u(x, 0) = f(x)\,, \\ &v_t(x, 0) = dv(x, 0) + e^{d \cdot 0} u_t(x, 0) = df(x) + g(x)\,. \end{aligned}$$

2. Nel punto (a) abbiamo visto che v soddisfa $v_{tt} - v_{xx} = 0$ in $\mathbb{R}^2$, e che inoltre $v(x,0) = f(x)$, $v_t(x,0) = df(x)+g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dalla formula di d'Alembert segue che

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\big[f(x+t) + f(x-t)\big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \big[df(y) + g(y)\big]\, dy\,,$$

e pertanto la soluzione del problema ai valori iniziali (6)-(7) è data da

$$u(x,t) = \frac{e^{-dt}}{2}\Big\{f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \big[df(y) + g(y)\big]\, dy\Big\} \tag{8}$$

per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

3. Dall'espressione di $u(x,t)$ in (8) segue immediatamente la stima seguente:

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \tfrac{e^{-dt}}{2}\Big\{2||f||_{L^\infty(\mathbb{R})} + |d|||f||_{L^1(\mathbb{R})} + ||g||_{L^1(\mathbb{R})}\Big\} \\ &\leq (|d|+1)\Big\{||f||_{L^\infty(\mathbb{R})} + |d|||f||_{L^1(\mathbb{R})} + ||g||_{L^1(\mathbb{R})}\Big\}\, e^{-dt}\,, \end{aligned}$$

come richiesto.