Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Firenze

Ingegneria per la Tutela dell'Ambiente e del Territorio (Laurea Specialistica)

Ingegneria Civile (Laurea Specialistica)

Complementi di Analisi Matematica – A.A. 2005–2006

Prova d'esame n. 2 – 11 Gennaio 2006

Attenzione: si chiede di affrontare i problemi 1., 2., ed (almeno) uno tra il 3. e il 4, e comunque di rispondere almeno ai quesiti 1bi., 2c, 3a (per il 3.), 4a (per il 4.), rispettivamente.

1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi e sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1}$$

la serie di potenze ad essa associata.

(a) Sapendo che la serie (1) ha raggio di convergenza $R \in (0, +\infty)$, calcolare, al variare di k in $\mathbb{N}$, $k \geq 2$, il raggio di convergenza R_1 della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{kn} \,. \tag{2}$$

(b) Nella serie (1) si ponga $a_n = n(n+2)$.

i. Determinare il raggio di convergenza della serie ottenuta.

ii. Sia ora I l'intersezione dell'asse reale con l'insieme di convergenza. Usando opportunamente il teorema di integrazione e derivazione per serie e le proprietà algebriche delle serie di potenze, riconoscere la funzione somma della serie.

2. Disegnare il grafico della funzione definita sull'intervallo $[-1, 3]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [-1, 1) \\ (2-x) & \text{se} \quad x \in [1, 3) \end{cases}$$

ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità (con periodo $T = 4$), indicare gli eventuali punti di discontinuità, quelli in cui è derivabile e rispondere ai seguenti quesiti.

(a) Determinare la pulsazione associata al periodo $T = 4$.

(b) Determinare la componente continua, la componente fondamentale e la k-sima armonica di f e le loro ampiezze e fasi.

(c) Scrivere la serie di Fourier di f.

(d) Scrivere l'identità di Parseval (o uguaglianza dell'energia) per f.

(e) Verificare direttamente che la serie del punto (3) converge uniformemente e quindi puntualmente. Verificare che la funzione f soddisfa ad uno dei criteri di convergenza uniforme per le serie di Fourier.

3. Data l'equazione a derivate parziali

$$xu_x(x,y) + u_y(x,y) = 0 \qquad x > 0\,,\ y \in \mathbb{R}\,,$$

si chiede di

(a) determinare le curve caratteristiche (disegnandone qualcuna) e quindi la soluzione generale dell'equazione;

(b) risolvere il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} xu_x(x,y) + u_y(x,y) = 0 & x > 0\,,\ y \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = x^2 & x > 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

(*Consiglio*: verificare che la funzione $u(x,y)$ trovata sia effettivamente la soluzione del problema (3)).

4. Si consideri l'equazione

$$u_{tt} + 2du_t - u_{xx} + d^2u = 0\,, \quad x,t \in \mathbb{R}\,, \tag{4}$$

con condizioni iniziali

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad u_t(x,0) = g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

(a) Sia $v(x,t) = e^{dt}u(x,t)$. Verificare che se u è una soluzione classica di (4), allora v soddisfa $v_{tt} - v_{xx} = 0$. Dedurre da (5) le condizioni iniziali per v.

(b) Risolvere l'equazione per v utilizzando la formula di d'Alembert, e calcolare $u(x,t) = e^{-dt}\,v(x,t)$, cioè la soluzione del problema (4)-(5).

(c) Provare che se

$$\sup_{\mathbb{R}} |f|\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,\mathrm{d}x$$

sono finiti, allora $|u(x,t)| \le C\,e^{-dt}$, dove C è una costante determinata dai dati iniziali f, g.

N.B. Motivare tutte le risposte!