6
a.a. 2007-08

6.1. Prima prova intercorso, prima data

Primo Esercizio

Esercizio 6.1.1. Al variare del parametro reale α si consideri la successione

$$a_n := \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \alpha\left(1 - \cos\left(\frac{3}{n}\right)\right)$$

1. Provare che $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$
converge. Enunciare il/i criterio/i impiegato/i.

2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha
$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$$

3. In corrispondenza di tale valore di α determinare l'insieme dei $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\beta |a_n|$$
converge.

Secondo esercizio

Esercizio 6.1.2. Sia $Oxyz$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 0,\ (x-3)^2 + z^2 \leq 4,\ x \geq 4\right\}.$$

1. Disegnare E e ∂E sul piano $y = 0$.
2. Descrivere ∂E in forma parametrica
3. Supponiamo che E rappresenti una lamina piana su cui è distribuito un materiale avente densità superficiale $\rho = 1 + |z|$. Calcolare la massa della lamina.
4. Si consideri l'insieme D generato da E con una rotazione completa attorno all'asse z.
5. Descrivere D in un opportuno sistema di coordinate cilindriche
6. Calcolare il Volume di D
7. Calcolare l'Area di ∂D.

Terzo esercizio

Esercizio 6.1.3. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = |x| \ln(1 + y)$$

1. Determinare il dominio di f in $\mathbb{R}^2$ e disegnarlo
2. Determinare l'insieme dei punti in cui f non è derivabile
3. Determinare l'insieme dei punti in cui f è derivabile ma non differenziabile

6.2. Prima prova intercorso, seconda data

Primo Esercizio

Esercizio 6.2.1. Al variare del parametro reale c si consideri la successione

$$an := \ln\left(1 + \frac{c}{n}\right) + \sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1 \quad n \geq 1$$

1. Determinare per quale/i valore/i di c la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$
converge.
2. Enunciare il/i criterio/i impiegato/i.

Secondo esercizio

Esercizio 6.2.2. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-2)}{3^n} y^{2n}$$

1. Determinare l'insieme di convergenza della serie
2. Esplicitare la funzione somma della serie.

Terzo esercizio

Esercizio 6.2.3. Sia $Oxyz$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; : y = 0, \; |z| \leq 1 - (x-2)^2 \right\}.$$

1. Disegnare E e ∂E sul piano $y = 0$.
2. Descrivere ∂E tramite una o più curve parametriche regolari
3. Supponiamo che E rappresenti una lamina piana su cui è distribuito un materiale avente densità superficiale $\rho = x^2$ Calcolare la massa della lamina.
4. Si consideri l'insieme D generato da E con una rotazione completa attorno all'asse z: descrivere D in un opportuno sistema di coordinate cilindriche
5. Calcolare il Volume di D
6. Calcolare l'Area di ∂D

Quarto esercizio

Esercizio 6.2.4. Al variare del parametro reale positivo α si consideri la funzione

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x\,|y|^\alpha\right)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Studiare la continuità di f in $(0, 0)$
2. Studiare la derivabilità di f in $(0, 0)$
3. Studiare la differenziabilità di f in $(0, 0)$

6.3. Primo appello

Primo Esercizio

Esercizio 6.3.1. Al variare del parametro reale β si consideri la successione

$$a_n = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)} - \exp\left(\frac{2}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

1. Determinare per quali valori di β la successione $b_n := na_n$ converge
2. In corrispondenza di tale/i valore/i determinare per quali valori di γ la serie numerica
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\gamma} a_n$$
converge
3. Enunciare il/i criterio/i impiegato/i

Secondo esercizio

Esercizio 6.3.2. Sia Oxy un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ |y| \leq \min\{x^2, 2x - x^2\}\right\}$$

1. Disegnare E e ∂E
2. Determinare il baricentro di E
3. Scrivere ∂E in forma parametrica e calcolarne la lunghezza
4. Determinare gli estremi assoluti in E della funzione $f(x, y) = (x-2)^2 - |y|$
5. Sia $F = E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\}$. Calcolare il volume del solido che si ottiene da F con una rotazione completa attorno all'asse x

Terzo esercizio

Esercizio 6.3.3. Si consideri la funzione di due variabili reali $f(x, y) = 1 - |xy|$.

1. In quali punti f è derivabile?
2. In quali punti f è differenziabile?
3. Determinare gli estremi assoluti di f nel cerchio centrato nell'origine e raggio 1.

Quarto esercizio

Esercizio 6.3.4. Determinare l'insieme di convergenza I della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{n+1}.$$

Determinare la funzione somma della serie

$$f\colon x \in I \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{n+1} \in \mathbb{R}.$$

6.4. Secondo appello

Primo Esercizio

Esercizio 6.4.1. Al variare del parametro reale β si consideri la successione

$$a_n = \cos\left(\ln\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\right) - \sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad n \geq 1.$$

1. Determinare per quali valori di β la successione $b_n := n^3 a_n$ converge
2. In corrispondenza di tale/i valore/i determinare per quali valori di γ la serie numerica
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\gamma a_n$$
converge
3. Enunciare il/i criterio/i impiegato/i

Secondo Esercizio

Esercizio 6.4.2. Sia $Or\varphi$ un sistema di coordinate polari nel piano. Sia γ la curva di equazione polare

$$r = 2\cos(2\varphi), \qquad \varphi \in \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

1. Tracciare il sostegno di γ;
2. dire se si tratta di una curva regolare;
3. *esplicitare* la lunghezza di γ;
4. Sia E la regione di piano delimitata da γ
   a) calcolare l'area di E;

b) determinare le coordinate del baricentro di E;
c) determinare il volume del solido generato da E con una rotazione completa attorno alla retta del piano perpendicolare all'asse polare;

5. dopo aver introdotto sul medesimo piano un opportuno sistema di coordinate cartesiane Oxy, scrivere l'equazione della retta tangente al sostegno di γ nel punto di coordinate polari $\left(r\left(\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{6}\right)$.

Terzo Esercizio

Esercizio 6.4.3. Si consideri la funzione di due variabili reali $f(x, y) = \sqrt{|x^2 + xy|}$.

1. In quali punti f è derivabile?

2. In quali punti f è differenziabile?

3. Determinare gli estremi assoluti di f nel cerchio centrato nell'origine e raggio 1.

Quarto Esercizio

Esercizio 6.4.4. Determinare l'insieme di convergenza I della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)} x^{2n}.$$

Determinare la funzione somma della serie

$$f : x \in I \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)} x^{2n} \in \mathbb{R}.$$