DOMANDA 1, 9 CFU

1) Poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n} = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ utilizziamo gli sviluppi di MacLaurin

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$a_n = \frac{c}{n} - \frac{c^2}{2}\frac{1}{n^2} + o(n^{-2}) + \cancel{1} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{n} - \frac{1}{\cancel{8}}\frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{n^2} + o(n^{-2}) - \cancel{1}$$

$$= \frac{c+2}{n} + \left(-\frac{c^2}{2} - 2\right)\frac{1}{n^2} + o(n^{-2})$$

Quindi: 1 se $c \neq -2$ abbiamo $\frac{|a_n|}{\frac{1}{n}} \to c+2$

Perciò, per il Teorema del confronto asintotico, la serie $\sum |a_n|$ ha lo stesso carattere della ~~serie~~ serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ che diverge $\Rightarrow$ $\boxed{c \neq -2 \Rightarrow \sum |a_n| = +\infty}$

2 Se $c = -2$ abbiamo $a_n = \frac{-4}{n^2} + o(n^{-2})$ e dunque $\frac{|a_n|}{\frac{1}{n^2}} \to 4$

Quindi, ancora per il Teorema del confronto asintotico la serie $\sum |a_n|$ ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^2}$ che converge $\Rightarrow$

$\boxed{c = -2 \Rightarrow \sum |a_n| \text{ converge}}$

2) Criterio del confronto asintotico

Sia a_n una serie a termini definitivamente non negativi; sia b_n una serie a termini definitivamente positivi. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty)$, allora le serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere

DOMANDA 2, 9CFU

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-2)}{3^n} y^{2n}$$

È una serie di potenze del tipo $\sum a_k y^k$ con

$$a_k = \begin{cases} \frac{n(n-2)}{3^n} & \text{se } k=2n \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } k=2n+1 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pongo $t=y^2$, la serie può essere scritta come $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-2)}{3^n} t^n$. Questa è una serie di potenze del tipo $\sum b_n t^n$ con

$$b_n = \frac{n(n-2)}{3^n} \quad n \in \mathbb{N}$$

Definitivamente abbiamo $b_n \neq 0$ quindi posso calcolare il raggio di convergenza di questa nuova serie mediante il calcolo di $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$

Abbiamo

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{(n+1)(n-1)}{3^{\cancel{n}+1}} \frac{\cancel{3^n}}{n(n-2)}$$

Dunque $\exists \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{3}$

Dunque il raggio di convergenza della serie in t è $r=3$

Dobbiamo verificare se tale serie converge per $t=3$ (infatti $t=y^2 \geq 0$)

$t=3$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-2)}{\cancel{3^n}} \cancel{3^n}$ è una serie numerica in cui il termine n-esimo è $n(n-2)$. Perché $\lim_{n \to +\infty} n(n-2) \neq 0$ la serie non converge.

Dunque la serie in t converge sse $0 \leq t < 3$
Quindi la serie assegnata converge sse $y^2 < 3$
cioè sse $y \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Sia $f : y \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-2)}{3^n} y^{2n} \in \mathbb{R}$
la funzione somma della serie.

Abbiamo $f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-2)\left(\frac{y^2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-2)x^n \Big|_{x=\frac{y^2}{3}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-2)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n \quad \forall x \in (-1,1)$$

(Le due serie a secondo membro hanno infatti lo stesso raggio di convergenza della serie a primo membro). Dunque abbiamo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-2)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n =$$

$$= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} =$$

$$= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} x^n =$$ applico il Teorema di integrazione e derivazione per serie

$$= x^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} x^n\right) - x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)$$

$$= x^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right) - x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)$$

$$= x^2 \frac{-2}{(x-1)^3} - \frac{x}{(x-1)^2}$$

Quindi $f(y) = \frac{y^4}{9} \frac{-2}{\left(\frac{y^2}{3} - 1\right)^3} - \frac{y^2}{3} \frac{1}{\left(\frac{y^2}{3} - 1\right)^2}$

DOMANDA 4, 9CFU

1. Poiché $\alpha>0$ abbiamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^\alpha)}{xy^\alpha} = 1$

Dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^\alpha}{x^2+y^2}$$

Posto $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ abbiamo $\left|\frac{xy^\alpha}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^{1+\alpha}\cos\theta\,(\sin\theta)^\alpha}{r^2}\right|$

$= r^{\alpha-1}\,|\cos\theta|\,|\sin\theta|^\alpha \to 0$ SSE $\boxed{\alpha>1}$

$\Rightarrow f_\alpha$ è continua SSE $\alpha>1$

2. $$\frac{f_\alpha(h,0)-f_\alpha(0,0)}{h} = \frac{\sin(h\cdot 0)}{h^2}\cdot\frac{1}{h} = \frac{0}{h^3} = 0 \quad \forall h\neq 0$$

Quindi $\exists \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) = 0$ $\boxed{\forall\alpha>0}$

$$\frac{f_\alpha(0,k)-f_\alpha(0,k)}{k} = \frac{\sin(0\cdot k^\alpha)}{k^2}\cdot\frac{1}{k} = \frac{0}{k^3} = 0 \quad \forall k\neq 0$$

Quindi $\exists \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0) = 0$ $\boxed{\forall\alpha>0}$

3. $$\frac{f_\alpha(x,y) - \left(f_\alpha(0,0) + \langle\nabla f_\alpha(0,0),(x-0,y-0)\rangle\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

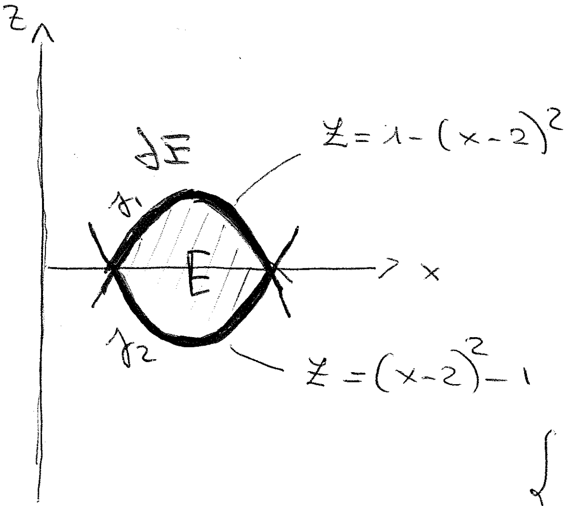
$$= \frac{\sin(xy^\alpha)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$ Posto $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ abbiamo

$$\left|\frac{\sin(xy^\alpha)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right| = \left|\frac{\sin(xy^\alpha)}{xy^\alpha}\right| \cdot \frac{r^{1+\alpha}|\cos\theta||\sin\theta|^\alpha}{r^3}$$

$\to 0$ SSE $1+\alpha>3$ SSE $\boxed{\alpha>2}$

DOMANDA 3, 9CFU / DOMANDA 3, 5CFU

①



②

$\partial E = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$\gamma_1 \begin{cases} x = t \\ z = 1-(t-2)^2 \end{cases} \quad t \in [1,3]$$

$$\gamma_2 \begin{cases} x = t \\ z = (t-2)^2 - 1 \end{cases} \quad t \in [1,3]$$

③

$$M = \iint_E x^2 \, dx\, dz = 2\int_1^3 \left(\int_0^{1-(x-2)^2} x^2 \, dz \right) dx =$$

$$= 2\int_1^3 x^2 z \Big|_{z=0}^{z=1-(x-2)^2} dx = 2\int_1^3 \left(x^2 - x^2(x-2)^2 \right) dx$$

$$= 2\int_1^3 \left(x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 \right) dx = 2\int_1^3 \left(-x^4 + 4x^3 - 3x^2 \right) dx$$

$$= 2\left(\frac{-x^5}{5} + x^4 - x^3 \right) \Bigg|_{x=1}^{x=3} =$$

$$= 2\left(\frac{-243}{5} + 81 - 27 + \frac{1}{5} \cancel{-1} \cancel{+1} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{-242}{5} + 54 \right) = 2\,\frac{270-242}{5} = \frac{56}{5}$$

Posto $\Phi : (r, \theta, t) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longmapsto$

$(r\cos\theta, r\sin\theta, t) \in \mathbb{R}^3$

abbiamo $D = \Phi(F)$ dove

$$F = \{ (r, \theta, t) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \; : \; |t| \leq 1 - (r-2)^2 \}$$

6 Posso calcolare il Volume di D mediante il Teorema di Guldino

$V = 2\pi \, x_B \, \text{Area}(E)$ dove B è il baricentro di E

Per motivi di simmetria è $B = (2,0,0)$, dunque

$V = 4\pi \, \text{Area}(E)$

$$\text{Area}(E) = 2 \int_1^3 \left(\int_0^{1-(x-2)^2} 1 \, dz \right) dx =$$

$$= 4 \int_1^2 \left(1 - (x-2)^2 \right) dx = 4 \left(x - \frac{1}{3}(x-2)^3 \right) \Big|_{x=1}^{x=2}$$

$$= 4 \left(2 - 1 - \frac{1}{3} \right) = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

Dunque $V = 4\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}\pi$

7 Posso calcolare l'Area di ∂D mediante il Teorema di Guldino:

$A = 2\pi \, x_B \, L(\partial E) = 4\pi \, L(\partial E)$

$$L(\partial E) = 2 L(\gamma_1) = 2 \int_1^3 \| (1, -2(t-2)) \| \, dt =$$

$$= 4 \int_1^2 \sqrt{1 + 4(t-2)^2} \, dt$$

Posto $\sinh(u) = 2(t-2)$, cioè $t = 2 + \frac{1}{2}\sinh(u)$

abbiamo

$$\sqrt{1+4(t-2)^2} = \cosh(u)$$
$$2(t-2) = \sinh(u)$$

$$\Rightarrow e^u = 2(t-2) + \sqrt{1+4(t-2)^2}$$

$$u = \ln\left(2(t-2) + \sqrt{1+4(t-2)^2}\right)$$

$$dt = \frac{1}{2}\cosh(u)\,du$$

$$t = 1 \iff u = \ln(-2+\sqrt{5})$$
$$t = 2 \iff u = 0$$

$$\Rightarrow L(\partial E) = 4\int_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{0} \cosh(u)\,\frac{1}{2}\cosh(u)\,du = 2\int_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{0} \frac{(e^u+e^{-u})^2}{4}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{0} \left(e^{2u} + e^{-2u} + 2\right)du =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2u} - \frac{1}{4}e^{-2u} + 2u \Big|_{u=\ln(\sqrt{5}-2)}^{u=0} =$$

$$= -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-2)^2 + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-2)^{-2} - 2\ln(\sqrt{5}-2) =$$

$$= -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-2)^2 + \frac{1}{4}\frac{(\sqrt{5}+2)^2}{(5-4)^2} - 2\ln(\sqrt{5}-2) =$$

$$= +\frac{1}{4}\left(\cancel{-5}\cancel{-4}+4\sqrt{5} + \cancel{5} + \cancel{4} + 4\sqrt{5}\right) - 2\ln(\sqrt{5}-2)$$

$= \sqrt{5} - 2\ln(\sqrt{5}-2)$. Quindi $A(\partial E) = 4\pi\left(\sqrt{5} - 2\ln(\sqrt{5}-2)\right)$

DOMANDA 1, 5CFU

1 È una eq. differenziale lineare ~~ordinaria~~ del primo ordine non omogenea.

I coefficienti dell'equazione sono Tg(t) e sin(t)
La funzione seno è continua su tutto $\mathbb{R}$ mentre la funzione Tangente è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Quindi $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Considero l'eq. omogenea associata

$$x' = x\,tg(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = x\,Tg(t) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt$$

$$\ln Kx = -\ln(\cos(t)) = \ln\frac{1}{\cos(t)} \qquad \left(\text{n.b } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Downarrow \cos(t) > 0\right)$$

$$x(t) = C_1 \frac{1}{\cos(t)}$$

Uso il metodo della variazione delle costanti

$$x(t) = \frac{C(t)}{\cos(t)}$$

$$x'(t) = \frac{C'(t)}{\cos(t)} + C(t)\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}$$

$$x'(t) = x(t)\,Tg(t) + \sin(t) \qquad \text{SSE}$$

$$\frac{C'(t)}{\cos(t)} + \cancel{C(t)\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}} = \cancel{\frac{C(t)}{\cos(t)}Tg(t)} + \sin(t) \qquad \text{SSE}$$

$$C'(t) = \sin(t)\cos(t) \implies C(t) = C_1 + \frac{1}{2}\sin^2(t)$$

Le soluzioni dell'equazione definite in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sono tutte e sole della forma

$$x(t) = \frac{C}{\cos(t)} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$$

Impongo la condizione iniziale

$$1 = \frac{C}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{\cancel{2}}} \qquad 1 = 2C + \frac{3}{4} \qquad 2C = \frac{1}{4}$$

$C = \frac{1}{8}$ $\Rightarrow$ la soluzione del pb di Cauchy è

$$x : t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longmapsto \frac{1}{8\cos(t)} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} \in \mathbb{R}$$

DOMANDA 2, 5CFU

Per le definizioni si vede il Testo.

1. Continuità $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Poiché $xy \to 0$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$ $= 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, se esistono

Valuto tale rapporto sulle rette $y = mx$

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Il limite su ogni retta è diverso e dunque il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{NON ESISTE}$$

2. $$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\frac{\sin(h,0)}{h^2} - 0}{h} = \frac{0}{h^3} = 0 \quad \forall h \neq 0$$

Dunque $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \frac{\frac{\sin(0k)}{k^2} - 0}{k} = \frac{0}{k^3} = 0 \quad \forall k \neq 0$$

Dunque $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

3. Se la funzione fosse differenziabile, allora sarebbe anche continua, ma abbiamo visto che non lo è $\Rightarrow$ non è differenziabile.