2 APRILE 2008

Esercizio 1 per 6 CFU

1) $$a_n = \sqrt{1+\ln\left(1+\frac{\beta}{n}\right)} - \exp\left(\frac{2}{n}\right) \qquad n \geq 1$$

β parametro reale

$\forall \beta \in \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$

D'altraparte

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$
$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

Dunque

$$\ln\left(1+\frac{\beta}{n}\right) = \frac{\beta}{n} - \frac{\beta^2}{2}\frac{1}{n^2} + o(n^{-2}) \qquad n \to \infty$$

$$\exp\left(\frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + o(n^{-2}) \qquad n \to \infty$$

Inoltre $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{\beta}{n}\right) = 0$ e

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

Quindi

$$\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{\beta}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{n} - \frac{\beta^2}{2n^2} + o(n^{-2})\right) - \frac{\cancel{1}}{8}\left(\frac{\beta}{n} - \frac{\beta^2}{2n^2} + o(n^{-2})\right)^2 + o(n^{-2}) =$$

$$= 1 + \frac{\beta}{2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(-\frac{\beta^2}{4} - \frac{\cancel{1}\beta^2}{8}\right) + o(n^{-2})$$

e, per sottrazione,

$$a_n = \left(\frac{\beta}{2} - 2\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{-3\beta^2}{8} - 2\right)\frac{1}{n^2} + o(n^{-2})$$

Dunque $b_n := n a_n = \frac{\beta}{2} - 2 + \frac{-3\beta^2-16}{8} \frac{1}{n} + o(n^{-1})$ 2

converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$

2) Per quanto visto al pto precedente abbiamo

$$n^\gamma a_n = \begin{cases} \frac{\beta-4}{2} n^{\gamma-1} + o(n^{\gamma-1}) & \beta \neq 4 \\ -8 n^{\gamma-2} + o(n^{\gamma-2}) & \beta = 4 \end{cases}$$

1° CASO $\beta \neq 4$ La successione $n^\gamma a_n$ ha definitivamente segno costante (positivo se $\beta > 4$, negativo se $\beta < 4$) e converge SSE la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-1} \text{ converge}$$

Infatti $\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma a_n = \frac{\beta-4}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\gamma-1} + o(n^{\gamma-1})\right)$

e $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\gamma-1} + o(n^{\gamma-1})}{n^{\gamma-1}} = 1$

e quindi posso applicare il criterio del confronto asintotico.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-1}$ è una serie armonica generalizzata e converge SSE $\gamma - 1 < -1$ cioè SSE $\gamma < 0$

2° CASO $\beta = 4$ La successione $n^\gamma a_n$ ha definitivamente segno costante, cioè negativo) e converge SSE la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-2}$ converge

Infatti $\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma a_n = -8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\gamma-2} + o(n^{\gamma-2})\right)$

e $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\gamma-2} + o(n^{\gamma-2})}{n^{\gamma-2}} = 1$

e quindi posso applicare di nuovo il criterio del confronto asintotico.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-2}$ è una serie armonica generalizzata e converge sse $\gamma-2<-1$ cioè $\gamma<1$

Quindi abbiamo $\begin{cases} \gamma<0 & \text{se } \beta \neq 4 \\ \gamma<1 & \text{se } \beta = 4 \end{cases}$

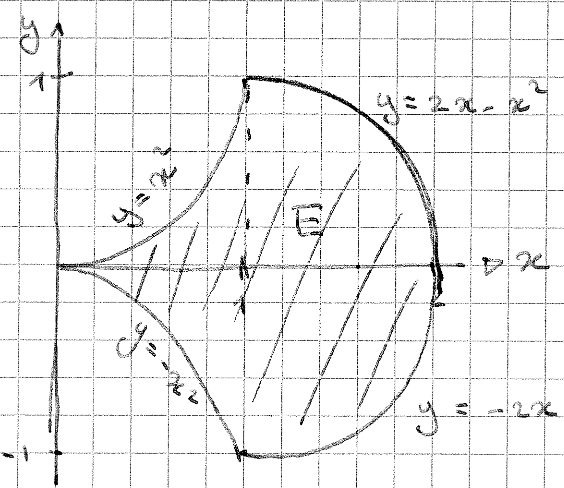
3) Scrivere l'enunciato del criterio del confronto asintotico

Esercizio 2 per 6CFU / Esercizio 8 per 5CFU

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ |y| \leq \min\{x^2, 2x-x^2\}\}$

$x^2 \gtrless 2x - x^2 \qquad x^2 - x \gtrless 0 \qquad x(x-1) \gtrless 0$

Ma $x \geq 0 \Rightarrow x-1 \gtrless 0 \qquad x \gtrless 1$



Per simmetria l'ordinata del baricentro è zero

Calcolo l'ascissa del baricentro

$$x_B = \frac{1}{A(E)} \iint_E x \, dx\, dy$$

Pongo $F = E \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

$\Rightarrow A(E) = 2A(F) = 2 \cdot 1 = 2$

L'Area di F è 1 perché l'insieme

$\{(x,y)\in F : x \geq 1\}$ che le riempie aree di

$[0,1]^2 \setminus \{(x,y)\in F : x \leq 1\}$

$$x_B = \frac{1}{2}\iint_E x \, dxdy = \iint_F x \, dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} x\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2x-x^2} x\,dy =$$

$$= \int_0^1 xy \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx + \int_1^2 xy \Big|_{y=0}^{y=2x-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x^2 - x^3)dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=1} + \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{14}{3} - 4 =$$

$$= \frac{3+28-24}{6} = \frac{7}{6}$$

∂E è l'unione di 4 archi di parabola

γ_1 contenuto in $y = x^2$ $\qquad \gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t\in[0,1]$

γ_2 contenuto in $y = 2x - x^2$ $\qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - t^2 \end{cases} \quad t\in[1,2]$

γ_3 contenuto in $y = -2x + x^2$ $\qquad \gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t + t^2 \end{cases} \quad t\in[1,2]$

γ_4 contenuto in $y = -x^2$ $\qquad \gamma_4 : \begin{cases} x = t \\ y = -t^2 \end{cases} \quad t\in[0,1]$

Per ragioni di simmetria inoltre i 4 archi hanno tutti la stessa lunghezza $\Rightarrow$

$$L(\partial E) = 4L(\gamma_1) = 4\int_0^1 \sqrt{1+(2t)^2}\, dt =$$

$$2t = \sinh(u) \qquad t = \frac{1}{2}\sinh(u) \qquad dt = \frac{1}{2}\cosh(u)\, du$$

$$2t = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \qquad e^u - e^{-u} = 4t$$

$$e^{2u} - 4te^u - \cancel{1} = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = (2t)^2 + 1$$

$$e^u = 2t \pm \sqrt{4t^2+1} \qquad \text{Ma } e^u > 0 \Rightarrow e^u = 2t + \sqrt{4t^2+1}$$

$$u = \ln\left(2t + \sqrt{4t^2+1}\right)$$

$$t = 0 \iff u = \ln 1 = 0$$
$$t = 1 \iff u = \ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

$$L(\partial E) = 4\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \cosh(u) \cdot \frac{1}{2}\cosh(u)\, du =$$

$$= 2\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 du =$$

$$= \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \left(\frac{1}{2}e^{2u} + 1 + \frac{1}{2}e^{-2u}\right) du =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2u} + u - \frac{1}{4}e^{-2u} \Bigg|_{u=0}^{u=\ln(2+\sqrt{5})} =$$

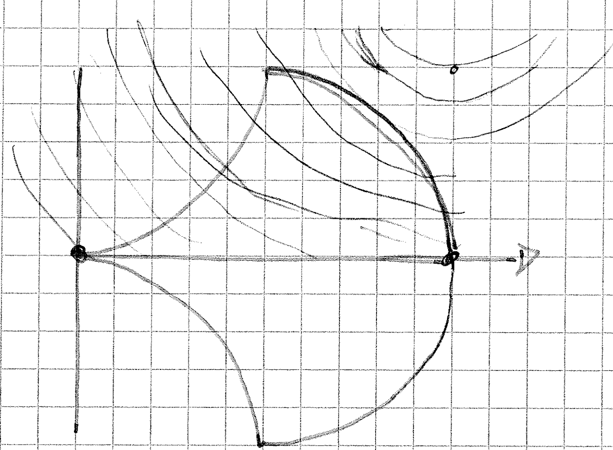
$$= \frac{1}{4}(2+\sqrt{5})^2 + \ln(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{4}\frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(2+\sqrt{5})^2 - \frac{(\sqrt{5}-2)^2}{(5-4)^2}\right\} + \ln(2+\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\cancel{2}+\sqrt{5}+\sqrt{5}-\cancel{2}\right)\left(2+\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{5}}+2\right)\right\} + \ln(2+\sqrt{5})$$

$= 2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})$

Se tracciamo le linee di livello della funzione f osserviamo come esse intersecano o meno l'insieme E



$c \in \mathbb{R} \quad (x-2)^2 - |y| = c \qquad |y| = (x-2)^2 - c$

Anche le linee di livello, così come l'insieme E, sono simmetriche rispetto all'asse x.

Basta guardare cosa succede nel semipiano $y \geq 0$

$y \geq 0 \Rightarrow y = (x-2)^2 - c$

Parabola con vertice in $(2, -c)$ e concavità rivolta verso l'alto

Osserviamo che il massimo di $f|_E$ è raggiunto nel pto $(0,0)$ e vale $f(0,0) = 4$

Il minimo è raggiunto su γ_2 (e sul pto simmetrico in γ_3)

$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - t^2 \end{cases} \quad t \in [1, 2]$

$f \circ \gamma_2(t) = (t-2)^2 - (2t - t^2) = t^2 - 4t + 4 - 2t + t^2$

$g := f \circ \gamma_2 : t \in [1,2] \to 2t^2 - 6t + 4 \in \mathbb{R}$

$g(1) = 2(1 - 3 + 2) = 0$

$g(2) = 2(4 - 6 + 2) = 0$

$g'(t) = 2(2t - 3) = 0$ sse $t = \frac{3}{2}$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2\right) =$$

$$= \frac{9}{2} - 9 + 4 = \frac{9}{2} - 5 = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma_2\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} - \frac{9}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$\max_E f = 4 \qquad \operatorname{argmax}_E f = \{(0,0)\}$

$\min_E f = -\frac{1}{2} \qquad \operatorname{argmin}_E f = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)\right\}$

Per il Teorema di Guldino, il volume del solido indicato è

$V = 2\pi \, y_{B_F} \cdot A(F)$ dove y_{B_F} è l'ordinata del baricentro di F

quindi $V = 2\pi \iint_F y \, dx\, dy =$

$$= 2\pi \left(\int_0^1 dx \int_0^{x^2} y\, dy + \int_1^2 dx \int_0^{2x - x^2} y\, dy \right) =$$

$$= 2\pi \left(\int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx + \int_1^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2x-x^2} dx \right) =$$

$$= \pi \left(\int_0^1 x^4 dx + \int_1^2 (2x - x^2)^2 dx \right)$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_1^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx \right)$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} \right)$$

$$= \pi \left(\cancel{\frac{1}{5}} + \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - \frac{4}{3} + 1 - \cancel{\frac{1}{5}} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{28}{3} + \frac{32}{5} - 15 \right) =$$

$$= \pi \, \frac{140 + 96 - 225}{15} = \pi \, \frac{11}{15}$$

Esercizio 3 per 6 CFU

$f(x,y) = 1 - |xy|$

È una funzione definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

È sicuramente derivabile e differenziabile fuori dagli assi cartesiani

Studio la derivabilità in un pto $(x_0, 0)$ appartenente all'asse delle ascisse

1) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, 0) - f(x_0, 0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1 - 0) - (1 - 0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Quindi $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0$

2) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, 0+h) - f(x_0, 0)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1 - |x_0 h| - (1-0)}{h} = \lim_{h \to 0} |x_0| \frac{|h|}{h}$

Questo limite esiste SSE $x_0 = 0$

Dunque l'unico pto dell'asse x in cui f è derivabile è l'origine

In modo del tutto analogo avremo che l'unico pto dell'asse y in cui f è derivabile è l'origine.

L'unico pto in cui devo studiare la differenziabilità è dunque l'origine.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$\frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right), (h,k) \rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{1 - |hk| - (1-0) - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

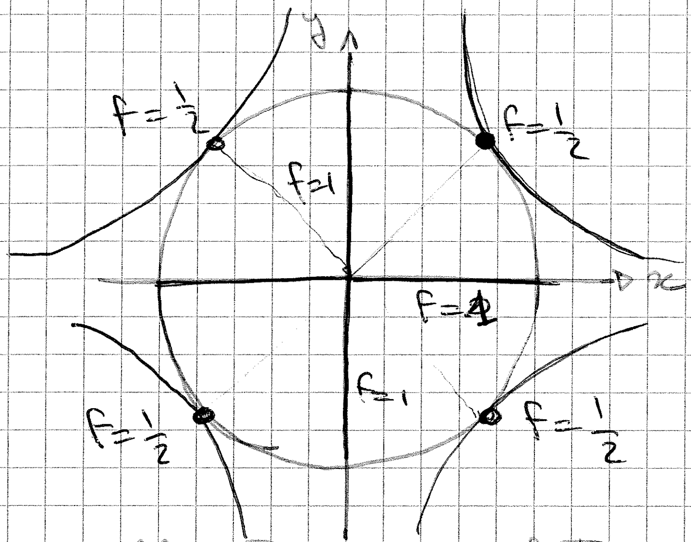
~~Passiamo~~ Devo vedere se $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Passo in coordinate polari:

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2 |\cos\varphi \sin\varphi|}{r} \leq r \to 0$$

quindi f è differenziabile nell'origine.



$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Gli estremi assoluti si determinano facilmente tramite lo studio delle linee di livello

Poiché f è pari rispetto a ciascuna delle sue variabili e il dominio è simmetrico rispetto a ciascuno degli assi, basta vedere cosa succede nel 1° quadrante

$x \geq 0, y \geq 0 \qquad 1 - xy = c \qquad xy = 1 - c$

$1 - c < 0 \Rightarrow L_c \cap \{x \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset$
cioè $c > 1$

$1 - c = 0$ cioè $c = 1 \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow$ direzione positiva dell'asse x e direzione positiva dell'asse y

$1 - c > 0$ cioè $c < 1$. ho un ramo di iperbole equilatera.
Le iperboli si allontanano dagli assi al decrescere di c. Ottengo il minimo quando l'iperbole equilatera è tangente alla circonferenza.
Per motivi di simmetria la tangenza è nel pto di coordinate polari $(1, \frac{\pi}{4})$ cioè nel pto di coordinate cartesiane $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Dunque $\max_C f = 1$, $\min_C f = \frac{1}{2}$

Esercizio 4 per 6CFU | Esercizio 7 per 5CFU

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n+1} x^{2n}$$

Posto $y = x^2 \geq 0$ ottengo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n+1} y^n$ in cui

$a_n = \frac{n^2}{n+1} \neq 0 \quad \forall n$

Calcolo $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n^2} = 1$

Quindi la serie in y ha raggio di convergenza 1

Se $y = 1$ ottengo $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n+1}$ che non soddisfa ~~il~~ ~~criterio~~ condizione necessaria per la convergenza

Ho convergenza SSE $y < 1$ cioè SSE $x^2 < 1$

cioè SSE $x \in (-1, 1)$

Dunque $I = (-1, 1)$

Per calcolare la somma della serie considero ancora la serie in y:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n+1} y^n \qquad y \in (-1, 1)$$

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2+n-n}{n+1} = n - \frac{n+1-1}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1}$$

Le serie $\sum_{n=0}^{\infty} n y^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot y^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^n$

hanno tutte raggio di convergenza 1, quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} n y^n - \sum_{n=0}^{\infty} y^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1} \quad \forall y \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n y^n = \sum_{n=1}^{\infty} n y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1} =$$

$$= y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dy} y^n = y \frac{d}{dy} \sum_{n=1}^{\infty} y^n = y \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{1-y} - 1 \right) =$$

$$= \frac{y}{(1-y)^2} \qquad \forall y \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} \qquad \forall y \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1} = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y t^n \, dt =$$

$$= \frac{1}{y} \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} t^n \, dt = \frac{1}{y} \int_0^y \frac{1}{1-t} \, dt = \frac{-\ln(1-y)}{y}$$

Quindi $f(x) = \left. \frac{y}{(1-y)^2} - \frac{1}{1-y} - \frac{\ln(1-y)}{y} \right|_{y=x^2} \quad \forall x \in (-1,1)$

cioè

$$f : x \in (-1,1) \longmapsto \frac{x^2}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{1-x^2} - \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \in \mathbb{R}$$