Analisi Matematica II con Elementi di Probabilità e Statistica

Laura Poggiolini e Marco Spadini

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Civile
a.a. 2008–09

1 Programma del corso

Oltre ai testi di riferimento [4] o [3] si segnalano i seguenti testi di esercizi: [6, 7], [9, 10] e [5]. Altri esercizi si trovano sui testi [1, 2]. Per la probabilità, oltre al testo di riferimento si segnala il volume [8]

Si ricorda inoltre che parte degli argomenti non sono stati spiegati secondo il testo ma secondo le note che si trovano in rete a partire dalla pagina
`http://www.dma.unifi.it/~poggiolini/didattica/analisi_ii_prob_stat.php`
e dalla pagina di marco....

1.1 Analisi Matematica II

Serie di potenze. Insieme di convergenza, raggio di convergenza, struttura dell'insieme di convergenza. Metodi di calcolo del raggio di convergenza (dimostrazione per il caso della radice k–esima, senza dimostrazione per il caso del rapporto). L'insieme di convergenza delle serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} x^k\,.$$

La serie delle derivate e la serie delle primitive. Teorema di Abel (senza dimostrazione), teorema di integrazione e derivazione per serie (senza dimostrazione). Applicazioni del teorema di integrazione per serie: $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$.

Applicazioni del teorema di derivazione e integrazione per serie: $\exp(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\arcsin(x)$. Serie di Taylor, serie di MacLaurin, funzioni C^∞ e funzioni C^ω. Condizioni di analiticità. Analiticità delle funzioni $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$.

Elementi di topologia di $\mathbb{R}^n$. Norma euclidea in $\mathbb{R}^n$ e prodotto scalare. Struttura topologica di $\mathbb{R}^n$: Insiemi aperti e insiemi chiusi, proprietà. Successioni in $\mathbb{R}^n$, convergenza e teorema di Bolzano-Weierstraß (deduzione dal caso scalare). Sottosuccessioni e relazioni con la convergenza. Punti interni, aderenti e di accumulazione. Frontiera di un insieme. Chiusura di un insieme. Intorni. Funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: nozione di continuità. Il punto all'infinito e i suoi intorni.

Calculus per funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Nozione di limite per funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Limiti che coinvolgono l'infinito usando la nozione di intorno di ∞. Restrizioni di funzioni e limiti delle restrizioni. Caso di $\mathbb{R}^2$, riduzione in forma polare; limiti uniformi. Limiti e continuità, costruzione di funzioni continue da funzioni continue elementari; continuità della funzione $(x, y) \mapsto x$. Insiemi compatti e insiemi connessi. Curve, combinazione convessa di due punti. Massimi e minimi di una funzione a valori in $\mathbb{R}$. Immagine continua di un compatto e di un connesso (senza dimostrazione). Teorema di estensione alla chiusura del dominio di una funzione continua limitata (senza dimostrazione).

Successioni e limiti, il teorema di collegamento. Chusi e successioni convergenti. Nozione di derivabilità di una funzione da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Derivate parziali. La derivabilità non implica la continuità. Funzioni di classe C^1 su un aperto. Differenziabilità. Formula per il differenziale. Il gradiente. Teorema di Fermat. Ricerca dell'immagine di una funzione a valori in $\mathbb{R}$. Riconoscimento degli insiemi chiusi come retroimmagini di chiusi. Derivate direzionale. Formula per la derivata direzionale per funzioni differenziabili. Significato geometrico del gradiente. Le nozioni di derivabilità e differenziabilità per funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$. Funzioni di classe C^1. Matrice jacobiana. Derivabilità di funzioni composte. La regola della catena. Il caso particolare $f \circ g$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Derivata di funzione composta il caso particolare $f \circ g$ con $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Estremi della restrizione di una funzione al sostegno di una curva regolare: ortogonalità del gradiente alla curva. Derivate e approssimazione: polinomio di Taylor al primo ordine. Significato geometrico: il piano tangente al grafico. Derivate di ordine superiore al primo, matrice hessiana funzioni C^2 (e C^r, $r = 0, \ldots, \infty$). Teorema di Schwartz. Differenziale secondo, definizione e rappresentazione mediante la matrice hessiana. Differenziali di ordine superiore.

Polinomio di Taylor al primo e secondo ordine; approssimazioni. Forme bilineari e forme quadratiche: f.q. definite e semidefinite positive e negative, indefinite. Studio della natura locale dei punti critici di funzioni da $\mathbb{R}^n$ (in particolare $\mathbb{R}^2$) a valori in $\mathbb{R}$: condizioni necessarie sufficienti per massimi e minimi (dimostrazione) e selle (senza dimostrazione).

Determinazione degli estremi relativi alla frontiera del dominio: metodo "di sostituzione", proprietà del gradiente e metodo "geometrico". Moltiplicatori di Lagrange. Determinazione degli estremi nel caso in cui vi siano punti di non differenziabilità. Derivata del prodotto scalare di due funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; il versore tangente a una curva e il versore normale. Riferimento mobile. Un'estensione del Teorema di Lagrange, esempi. Integrali dipendenti da un parametro: loro continuità e derivabilità (senza dimostrazione).

Curve e integrali curvilinei. Le curve, curve semplici, chiuse, regolari, regolari a tratti e di Jordan. Integrale di una funzione a valori vettoriali. La nozione di lunghezza esempi di curve non rettificabili. Le curve C^1 sono rettificabili. Curve equivalenti. Curve C^1 equivalenti hanno la stessa lunghezza (dimostrazione). Lunghezza di un grafico.

Espressioni differenziali, operazioni sulle espressioni differenziali. Integrazione di espressioni differenziali lungo una curva parametrizzata. L'espressione "ds", integrali di prima specie; significato fisico: massa, centro di massa e momenti di inerzia di un filo anche non omogeneo. Indipendenza dalla parametrizzazione. Forme differenziali e loro integrazione. Corrispondenza tra forme e campi vettoriali. Forme esatte e forme chiuse, condizione necessaria perche una forma sia esatta è che sia chiusa (dimostrazione); esempio di una forma chiusa ma non esatta. Campi vettoriali e lavoro. Campi conservativi e forme esatte. Dipendenza dalla parametrizzazione. Teorema fondamentale del calcolo per le forme esatte e sua applicazione alle condizioni necessarie per l'esattezza di una forma mediante gli integrali curvilinei. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esattezza di una forma mediante gli integrali; calcolo di una primitiva. Nozione di insieme semplicemente connesso.

Insiemi convessi e stellati: sono semplicemente connessi. Condizione sufficiente affinché una forma sia esatta. Esempio di una forma esatta con dominio non semplicemente connesso. Integrali su curve diverse. Omotopie relative di curve. Enunciato del teorema di omotopia e sue conseguenze. Indice di avvolgimento intorno all'origine. Metodi alternativi di calcolo di una primitiva. Dimostrazione del teorema di invarianza per omotopie (nel caso di omotopie C^2).

Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali ordinarie (EDO), generalità: forma generale di una EDO di ordine n, Definizione di soluzione di una EDO di ordine n. EDO di ordine n in forma normale, EDO lineari (omogenee e non). EDO lineari come operatori lineari tra spazi vettoriali. Struttura dell'insieme delle soluzioni di una EDO lineare di ordine n.
Problema di Cauchy per EDO normali del primo ordine. EDO lineari delprimo ordine a coefficienti continui. Soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy associato
Applicazioni: sviluppo in serie della funzione esponenziale tramite la risoluzione di un problema di Cauchy.
Teorema di Cauchy per EDO del primo ordine in forma normale. Teorema di esistenza globale. Non intersezione dei grafici di due soluzioni di una stessa EDO. Soluzione generale di EDO del primo ordine a variabili separabili che soddisfano le ipotesi del teorema di Cauchy.
L'equazione logistica $y' = y - y^2$.

Integrali multipli e applicazioni. Integrali doppi su rettangoli, definizione e proprietà fondamentali, linearità e monotonia. Insiemi trascurabili. Teorema di integrabilità. Calcolo degli integrali doppi: teorema di Fubini-Tonelli. Integrali su domini limitati generali, definizione e proprietà fondamentali.

Misura di insiemi limitati. Insiemi misurabili non. Integrali su domini limitati generali, formule di riduzione, teoremi della media. Esempi. Centro di massa di una lamina piana con densità variabile. Metodi di calcolo, simmetrie, osservazioni generali su monotonia, additività risp. dominio di integrazione. Formula di cambiamento di variabili, significato geometrico dello jacobiano, coordinate polari. Calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Formule di Gauss-Green (dimostrazione nel caso di insiemi semplici risp. agli assi). Orientazione della frontiera di un insieme. Formule di calcolo dell'area. Divergenza di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$ e Teorema della divergenza nel piano.

Integrali tripli: definizione e proprietà principali. Teorema di Fubini e formule di riduzione, integrazione per fette e fili. Cambiamento di variabile negli integrali tripli. Coordinate cilindriche.

Integrali di superficie e applicazioni. Volume, massa e centro di massa e momento di inerzia di solidi (anche con densità non costante). Coordinate sferiche. Superfici parametrizzate. Integrali di superficie: definizione e prime proprietà. Area, massa etc. di superfici parametrizzate. Superfici a placche (brevi cenni) e flussi. I teoremi della divergenza e di Stokes.

Gli operatori differenziali divergenza, gradiente, rotore e laplaciano; loro relazioni e significato (cenni). Ricostruzione di un campo vettoriale solenoidale a partire dal suo rotore (brevi cenni).

1.2 Elementi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

Statistica descrittiva, caratteri qualitativi, quantitativi discreti, quantitativi continui. Campione, modalità, effettivo (o frequenza assoluta), frequenza relativa. Istogrammi, moda, valori modali. Parametri descrittivi dei caratteri numerici: media (aritmetica), varianza e loro proprietà. Percentili, quartili, range e intervallo interquartile. Retta di regressione, covarianza e coefficiente di correlazione. Disuguaglianza di Chebyshev.
Disposizioni, permutazioni, combinazioni.

Fenomeni deterministici e fenomeni aleatori. Eventi ed insiemi associati. Leggi di DeMorgan (senza dim.). σ–algebre e loro proprietà. Definizione assiomatica della probabilità. Proprietà elementari delle probabilità.
Spazi equiprobabili. Probabilità condizionata. Legge ipergeometrica. Partizione coerente. Formula di Bayes, formula delle probabilità totali. Eventi indipendenti. Variabili aleatorie. Funzione di ripartizione. V.a. discrete e v.a. continue. Densità discrete. Densità binomiale. Legge di Bernoulli. Densità ipergeometrica. Densità geometrica e densità geometrica modificata, proprietà della mancanza di memoria. Densità di Poisson.

Modelli continui. Densità uniforme su un intervallo. Densità gaussiana. Densità esponenziale, proprietà della mancanza di memoria.

V.a. vettoriali. Funzione di ripartizione congiunta. V.a. vettoriali discrete: densità di probabilità congiunta. Densità marginali. Ricostruzione delle densità marginali a partire dalla densità congiunta. Controesempio: non è possibile ricostruire la densità congiunta note le densità marginali. Densità multinomiale. V.a. congiuntamente continue. Densità congiunta e densità marginali.

V.a. indipendenti.

Caratterizzazione dell'indipendenza per v.a. discrete e per v.a. continue mediante le funzioni densità. Composizioni con v.a. discrete. Densità della somma di due v.a. discrete. Somma di v.a. di Bernoulli indipendenti. Somma di v.a. di Poisson indipendenti. Distribuzioni condizionali di v.a. discrete. Composizione di v.a. continue con funzioni: funzione di ripartizione. Esempi: funzione di ripartizione e densità di X^2 e $aX + b$. speranza matematica di una v.a. discreta e di una v.a. continua. Esempi: speranza matematica del lancio di un dado non truccato e di una v.a. distribuzione uniforme. Proprietà: speranza matematica della composizione (dimostrazione solo nel caso discreto).

Speranza matematica: linearità (dimostrazione solo nel caso discreto), prodotto di due v.a. indipendenti (dimostrazione solo nel caso discreto), monotonia (dimostrazione solo nel caso discreto). Esempi: speranza matematica di v.a. di Bernoulli, binomiali, ipergeometriche, di Poisson, geometrica e geometrica modificata, uniformi, esponenziali e normali. Non esistenza della speranza matematica di una v.a. di Cauchy Proprietà di approssimazione della speranza matematica. Varianza, covarianza. Varianza di aX e della somma di due v.a.

Covarianza e sue proprietà. Varianza dei modelli introdotti: varianza di v.a. di Bernoulli, binomiali, di Poisson, geometrica modificata e geometrica, uniforme su un intervallo, esponenziale e gaussiana (tutte con dimostrazione), varianza delle v.a. di densità ipergeometrica (senza dimostrazione).

Disuguaglianza di Markov. Disuguaglianza di Chebyshev. Conevergenze in probabilità e convergenza quasi certa. Legge dei grandi numeri (dimostrazione solo della legge debole).

Mediana, percentili, quartili e quantili. Esempi: mediana, quartili e quantili delle distribuzioni esponenziale, uniforme e gaussiane.Funzione di rischio. Densità di Rayleigh. La mediana come punto di minimo di $c \mapsto E[|X - c|]$.

Convergenza in legge. Teorema del limite centrale (senza dimostrazione).

Riferimenti bibliografici

[1] Robert A. Adams. *Calcolo differenziale 1. Funzioni di una variabile reale.* CEA, 2007.

[2] Robert A. Adams. *Calcolo differenziale 2. Funzioni di piú variabili.* CEA, 2007.

[3] Michiel Bertsch and Roberta Dal Passo. *Elementi di Analisi Matematica.* Aracne, 2001.

[4] Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, and Lorenzo Giacomelli. *Analisi Matematica.* McGraw–Hill, 2007.

[5] Boris P. Demidovic. *Esercizi e problemi di analisi matematica.* Editori Riuniti, 2003.

[6] Enrico Giusti. *Esercizi e complementi di Analisi Matematica, volume primo.* Bollati Boringhieri, 1991.

[7] Enrico Giusti. *Esercizi e complementi di Analisi Matematica, volume secondo.* Bollati Boringhieri, 1992.

[8] Sheldon M. Ross. *Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze.* Apogeo, 2003.

[9] Sandro Salsa and Annamaria Squellati Marinoni. *Esercizi di analisi matematica 2. Vol. 1: Funzioni di più variabili e ottimizzazione. Serie numeriche e di funzioni.* Zanichelli, 1993.

[10] Sandro Salsa and Annamaria Squellati Marinoni. *Esercizi di analisi matematica 2. Vol. 2: Integrazione.* Zanichelli, 1993.

2 Registro delle lezioni

1 6 ottobre 2008 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Serie di potenze. Insieme di convergenza, raggio di convergenza, struttura dell'insieme di convergenza. Metodi di calcolo del raggio di convergenza (dimostrazione per il caso della radice k–esima, senza dimostrazione per il caso del rapporto). L'insieme di convergenza delle serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} x^k\,.$$

Altri esempi.

2 8 ottobre 2008 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

La serie delle derivate e la serie delle primitive. Teorema di Abel (senza dimostrazione), teorema di integrazione e derivazione per serie (senza dimostrazione). Applicazioni del teorema di integrazione e derivazione per serie: $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\arcsin(x)$. Esercizi.
Serie di Taylor: la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & x \neq 0. \end{cases}$$

3 9 ottobre 2008 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Serie di Taylor, serie di MacLaurin, funzioni C^∞ e funzioni C^ω. Condizioni di analiticità. Analiticità delle funzioni $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$. Esercizi.

4 13 ottobre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)

Norma euclidea in $\mathbb{R}^n$ e prodotto scalare. Struttura topologica di $\mathbb{R}^n$: Insiemi aperti e insiemi chiusi, proprietà. Successioni in $\mathbb{R}^n$, convergenza e teorema di Bolzano-Weierstraß (deduzione dal caso scalare). Sottosuccessioni e relazioni con la convergenza. Punti interni, aderenti e di accumulazione. Frontiera di un insieme. Chiusura di un insieme. Intorni. Funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: nozione di continuità. Esercizio: la continuità è equivalente alla continuità per componenti. Il punto all'infinito e i suoi intorni.

5 15 ottobre 2008 – 3 ore (Dott. Spadini)

Nozione di limite per funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (con ε e δ, con le palle, e con gli intorni. Limiti che coinvolgono l'infinito usando la nozione di intorno di ∞. Esercizio: formalizzare le nozioni di limite che coinvolgono l'infinito senza usare la nozione di intorno di ∞. Restrizioni di funzioni e limiti delle restrizioni. Esempi di calcolo. Caso di $\mathbb{R}^2$, riduzione in forma polare; limiti uniformi. Osservazione: il limite si può fare per componenti. Limiti e continuità, costruzione di funzioni continue da funzioni continue elementari; continuità della funzione

$(x, y) \mapsto x$. Insiemi compatti e insiemi connessi. Curve, combinazione convessa di due punti. Massimi e minimi di una funzione a valori in $\mathbb{R}$. Immagine continua di un compatto e di un connesso (senza dimostrazione). Teorema di estensione alla chiusura del dominio di una funzione continua limitata (senza dimostrazione).

6 16 ottobre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)

Successioni e limiti, il teorema di collegamento. Chusi e successioni convergenti. Nozione di derivabilità di una funzione da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Derivate parziali. La derivabilità non implica la continuità. Funzioni di classe C^1 su un aperto. Differenziabilità. Formula per il differenziale. Il gradiente. Teorema di Fermat. Ricerca dell'immagine di una funzione a valori in $\mathbb{R}$. Riconoscimento degli insiemi chiusi come retroimmagini di chiusi. Esercizi svolti.

7 20 ottobre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)

Esercizi ed esempi sul calcolo dell'immagine di una funzione a valori reali. Derivate direzionale. Formula per la derivata direzionale per funzioni differenziabili. Significato geometrico del gradiente. Le nozioni di derivabilità e differenziabilità per funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$. Funzioni di classe C^1. Matrice jacobiana. Derivabilità di funzioni composte. La regola della catena. Il caso particolare $f \circ g$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

8 23 ottobre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)

Derivata di funzione composta il caso particolare $f \circ g$ con $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Estremi della restrizione di una funzione al sostegno di una curva regolare: ortogonalittà del gradiente alla curva. Derivate e approssimazione: polinomio di Taylor al primo ordine. Significato geometrico: il piano tangente al grafico. Derivate di ordine superiore al primo, matrice hessiana funzioni C^2 (e C^r, $r = 0, \ldots, \infty$). Teorema di Schwartz. Differenziale secondo, definizione e rappresentazione mediante la matrice hessiana. Differenziali di ordine superiore.

9 27 ottobre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)

Polinomio di Taylor al primo e secondo ordine; approssimazioni. Forme bilineari e forme quadratiche: f.q. definite e semidefinite positive e negative, indefinite. Studio della natura locale dei punti critici di funzioni da $\mathbb{R}^n$ (in particolare $\mathbb{R}^2$) a valori in $\mathbb{R}$: condizioni necessarie sufficienti per massimi e minimi (dimostrazione) e selle (senza dimostrazione). Semplici esempi.

10 29 ottobre 2008 – 3 ore (Dott. Spadini)

Riepilogo sulla determinazione dell'immagine di un funzione da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Determinazione degli estremi relativi alla frontiera del dominio: metodo "di sostituzione", proprietà del gradiente e metodo "geometrico". Moltiplicatori di Lagrange. Determinazione degli estremi nel caso in cui vi siano punti di non differenziabilità. Esempi. Derivata del prodotto scalare di due funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; il versore tangente a una curva e il versore normale. Riferimento mobile. Un'estensione del Teorema di Lagrange, esempi. Integrali dipendenti da un parametro: loro continuità e derivabilità (senza dimostrazione). Esercizi di riepilogo.

11 3 novembre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)
Ancora sul teorema di Lagrange. Le curve, curve semplici, chiuse, regolari, regolari a tratti e di Jordan. Integrale di una funzione a valori vettoriali. La nozione di lunghezza esempi di curve non rettificabili. Le curve C^1 sono rettificabili. Curve equivalenti. Curve C^1 equivalenti hanno la stessa lunghezza (dimostrazione). Esempi di calcolo della lunghezza, lunghezza di un grafico.

12 5 novembre 2008 – 3 ore (Dott. Spadini)
Espressioni differenziali, operazioni sulle espressioni differenziali. Integrazione di espressioni differenziali lungo una curva parametrizzata. L'espressione "ds", integrali di prima specie; significato fisico: massa, centro di massa e momenti di inerzia di un filo anche non omogeneo. Indipendenza dalla parametrizzazione. Forme differenziali e loro integrazione. Corrispondenza tra forme e campi vettoriali. Forme esatte e forme chiuse, condizione necessaria perche una forma sia esatta è che sia chiusa (dimostrazione); esempio di una forma chiusa ma non esatta. Campi vettoriali e lavoro. Campi conservativi e forme esatte. Dipendenza dalla parametrizzazione. Teorema fondamentale del calcolo per le forme esatte e sua applicazione alle condizioni necessarie per l'esattezza di una forma mediante gli integrali curvilinei.

13 6 novembre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)
Dimostrazione dei teoremi discussi il giorno precedente. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esattezza di una forma mediante gli integrali; calcolo di una primitiva. Nozione di insieme semplicemente connesso.

14 10 novembre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)
Insiemi convessi e stellati: sono semplicemente connessi. Condizione sufficiente affinché una forma sia esatta. Esempio di una forma esatta con dominio non semplicemente connesso. Integrali su curve diverse. Omotopie relative di curve. Enunciato del teorema di omotopia e sue conseguenze. Indice di avvolgimento intorno all'origine. Metodi alternativi di calcolo di una primitiva.

15 12 novembre 2008 – 1 ora (Dott. Spadini)
Esercizi. Dimostrazione del teorema di invarianza per omotopie (nel caso di omotopie C^2).

16 12 novembre 2008 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)
Equazioni differenziali ordinarie (EDO), generalità: forma generale di una EDO di ordine n, Definizione di soluzione di una EDO di ordine n. EDO di ordine n in forma normale, EDO lineari (omogenee e non). EDO lineari come operatori lineari tra spazi vettoriali. Struttura dell'insieme delle soluzioni di

una EDO lineare di ordine n.
Problema di Cauchy per EDO normali del primo ordine. EDO lineari delprimo ordine a coefficienti continui. Soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy associato
Applicazioni: sviluppo in serie della funzione esponenziale tramite la risoluzione di un problema di Cauchy.
Esempi ed esercizi.

17 13 novembre 2008 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)
Teorema di Cauchy per EDO del primo ordine in forma normale. Teorema di esistenza globale. Non intersezione dei grafici di due soluzioni di una stessa EDO. Soluzione generale di EDO del primo ordine a variabili separabili che soddisfano le ipotesi del teorema di Cauchy.
Esempio: l'equazione logistica.

18 17 novembre 2008 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)
Esercizi sulle EDO a variabili separate. Teorema di esistenza e unicità globale per EDO lineari del secondo ordine a coefficienti continui.

Soluzioni linearmente indipendenti di EDO lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti continui. Teorema sulla struttura dell'insieme delle soluzioni di EDO lineari del secondo ordine a coefficienti continui, omogenee e non.

19 19 novembre 2008 – 3 ore (Dott.ssa Poggiolini)
Dimostrazione del Teorema sulla struttura dell'insieme delle soluzioni di EDO lineari del secondo ordine a coefficienti continui, omogenee e non.

EDO lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti. EDO lineari non omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti. Metodo della variazione delle costanti e metodo di somiglianza.

Esercizi.

20 20 novembre 2008 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)
Vibrazioni lineari, pennello di Peano

21 24 novembre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)
Integrali doppi su rettangoli, definizione e proprietà fondamentali, linearità e monotonia. Insiemi trascurabili. Teorema di integrabilità. Calcolo degli integrali doppi: teorema di Fubini-Tenelli. Integrali su domini limitati generali, definizione e proprietà fondamentali.

22 26 novembre 2008 – 3 ore (Dott. Spadini)
Misura di insiemi limitati. Insiemi misurabili non. Integrali su domini limitati generali, formule di riduzione, teoremi della media. Esempi. Centro di massa di una lamina piana con densità variabile. Metodi di calcolo, simmetrie, osservazioni generali su monotonia, additività risp. dominio di integrazione.

Formula di cambiamento di variabili, significato geometrico dello jacobiano, coordinate polari. Calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

23 27 novembre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)
Formule di Gauss-Green (dimostrazione nel caso di insiemi semplici risp. agli assi). Orientazione della frontiera di un insieme. Formule di calcolo dell'area. Esempi. Divergenza di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$ e Teorema della divergenza nel piano.

24 01 dicembre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)
Integrali tripli: definizione e proprietà principali. Teorema di Fubini e formule di riduzione, integrazione per fette e fili. Cambiamento di variabile negli integrali tripli. Coordinate cilindriche.

25 03 dicembre 2008 – 3 ore (Dott. Spadini)
Volume, massa e centro di massa e momento di inerzia di solidi (anche con densità non costante). Coordinate sferiche. Superfici parametrizzate. Integrali di superficie: definizione e prime proprietà. Area, massa etc. di superfici parametrizzate. Superfici a placche (brevi cenni) e flussi. I teoremi della divergenza e di Stokes.

26 04 dicembre 2008 – 2 ore (Dott. Spadini)
Gli operatori differenziali divergenza, gradiente, rotore e laplaciano; loro relazioni e significato (cenni). Ricostruzione di un campo vettoriale solenoidale a partire dal suo rotore (brevi cenni). Esempi ed esercizi di calcolo di integrali tripli e di superficie.

27 21 gennaio 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)
Statistica descrittiva, caratteri qualitativi, quantitativi discreti, quantitativi continui. Campione, modalità, effettivo (o frequenza assoluta), frequenza relativa. Istogrammi, moda, valori modali. Parametri descrittivi dei caratteri numerici: media (aritmetica), varianza e loro proprietà. Percentili, quartili, range e intervallo interquartile.

28 22 gennaio 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)
Retta di regressione, covarianza e coefficiente di correlazione. Disuguaglianza di Chebyshev.
Disposizioni, permutazioni, combinazioni. Esempi.
Fenomeni deterministici e fenomeni aleatori. Eventi ed insiemi associati. Leggi di DeMorgan (senza dim.). σ–algebre e loro proprietà. Definizione assiomatica della probabilità.

29 28 gennaio 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)
Proprietà elementari delle probabilità.
Spazi equiprobabili. Esempi. Probabilità condizionata. Esempi.

30 29 gennaio 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Legge ipergeometrica. Partizione coerente. Formula di Bayes, formula delle probabilità totali. Eventi indipendenti. Esempi ed esercizi.

31 11 febbraio 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Variabili aleatorie. Funzione di ripartizione. V.a. discrete e v.a. continue. Densità discrete. Esempi. Densità binomiale. Legge di Bernoulli. Densità ipergeometrica. Densità geometrica e densità geometrica modificata, proprietà della mancanza di memoria.

32 12 febbraio 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Densità di Poisson. Modelli continui. Densità uniforme su un intervallo. Densità gaussiana. Densità esponenziale, proprietà della mancanza di memoria.

V.a. vettoriali. Funzione di ripartizione congiunta. V.a. vettoriali discrete: densità di probabilità congiunta. Densità marginali. Ricostruzione delle densità marginali a partire dalla densità congiunta. Controesempio: non è possibile ricostruire la densità congiunta note le densità marginali.

33 18 febbraio 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Densità multinomiale. Esercizi.
V.a. congiuntamente continue. Densità congiunta e densità marginali. Esercizi. V.a. indipendenti.

34 19 febbraio 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Caratterizzazione dell'indipendenza per v.a. discrete e per v.a. continue mediante le funzioni densità. Esercizi.
Composizioni con v.a. discrete. Densità della somma di due v.a. discrete. Somma di v.a. di Bernoulli indipendenti. Somma di v.a. di Poisson indipendenti.

35 25 febbraio 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Esercizi. Distribuzioni condizionali di v.a. discrete. Composizione di v.a. continue con funzioni: funzione di ripartizione. Esempi: funzione di ripartizione e densità di X^2 e $aX + b$. speranza matematica di una v.a. discreta e di una v.a. continua. Esmpi: speranza matematica del lancio di un dado non truccato e di una v.a. distribuzione uniforme. Proprietà: speranza matematica della composizione (dimostrazione solo nel caso discreto).

36 26 febbraio 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Speranza matematica: linearità (dimostrazione solo nel caso discreto), prodotto di due v.a. indipendenti (dimostrazione solo nel caso discreto), monotonia (dimostrazione solo nel caso discreto). Esempi: speranza matematica di v.a. di Bernoulli, binomiali, ipergeometriche, di Poisson, geometrica e geometrica modificata, uniformi, esponenziali e normali. Non esistenza della speranza matematica di una v.a. di Cauchy Proprietà di approssimazione della speranza matematica. Varianza, covarianza. Varianza di aX e della somma di due v.a.

37 4 marzo 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Covarianza e sue proprietà. Varianza dei modelli introdotti: varianza di v.a. di Bernoulli, binomiali, di Poisson, geometrica modificata e geometrica, uniforme su un intervallo, esponenziale e gaussiana (tutte con dimostrazione), varianza delle v.a. di densità ipergeometrica (senza dimostrazione).

Disuguaglianza di Markov. Disuguaglianza di Chebyshev. Conevergenze in probabilità e convergenza quasi certa. Legge dei grandi numeri (dimostrazione solo della legge debole).

38 5 marzo 2009 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Esercizi.

39 11 marzo 2008 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Mediana, percentili, quartili e quantili. Esempi: mediana, quartili e quantili delle distribuzioni esponenziale, uniforme e gaussiane.Funzione di rischio. Densità di Rayleigh. La mediana come punto di minimo di $c \mapsto E[|X - c|]$.

40 12 marzo 2008 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Convergenza in legge. Teorema del limite centrale (senza dimostrazione). Esempi. Esercizi.

41 19 marzo 2008 – 2 ore (Dott.ssa Poggiolini)

Esercizi.