Analisi Matematica II con Elementi di Probabilità e Statistica

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Civile
a.a. 2007–08

Laura Poggiolini e Lorenzo Fusi

Dipartimento di Matematica Applicata Giovanni Sansone

Università di Firenze

Indice

Parte I

Esercizi vari

1

Richiami sulle successioni reali

1.1. Monotonia

Esempio 1.1.1. Due esempi di successione limitate e irregolari (e non monotone):

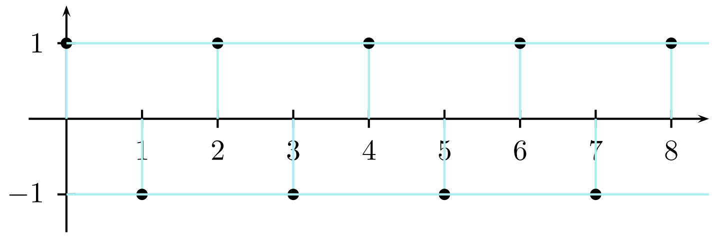


Figura 1.1: $a_n = (-1)^n$

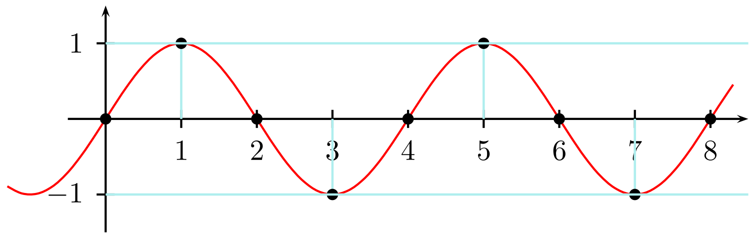


Figura 1.2: $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Esercizio 1.1.1. Verificare le proprietà di monotonia di ciascuna delle seguenti successioni.

$$a_n = 2^n\,, \quad b_n = \frac{n+1}{n+2}\,.$$

Esercizio 1.1.2. Verificare che la successione

$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

è strettamente crescente e limitata, sia usando le definizioni che ricorrendo allo studio di una opportuna funzione di variabile reale.

1.2. Limite di successione

Esercizio 1.2.1. Verificare le seguenti uguaglianze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}\,.$$

Esercizio 1.2.2. Verificare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{\sqrt{n}} = +\infty\,,\ \lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n+1} = -\infty$$

Osservazione 1.2.1. Sia $f\colon x \in (x_0, +\infty) \to f(x) \in \mathbb{R}$ una funzione di variabile reale definita su una semiretta destra. Supponiamo che esista $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Sia $\{a_n\}_{n>\lfloor x_0\rfloor}$ la successione definita da $a_n = f(n) \quad \forall n > \lfloor x_0\rfloor$. Allora esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Esempio 1.2.1. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ e $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

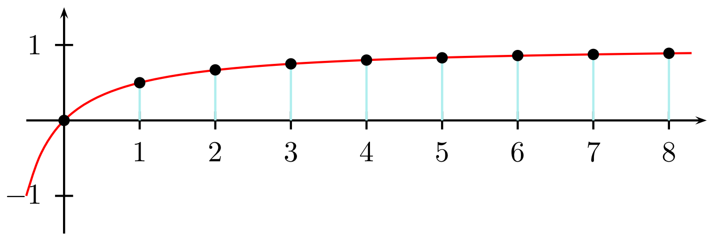


Figura 1.3: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ e $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Osservazione 1.2.2. L'osservazione 1.2.1 non può essere invertita: si considerino per esempio

$$f(x) = \sin(\pi x) \text{ e } a_n = f(n) = \sin(\pi n)$$

Sappiamo allora che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste. D'altra parte $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e dunque esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

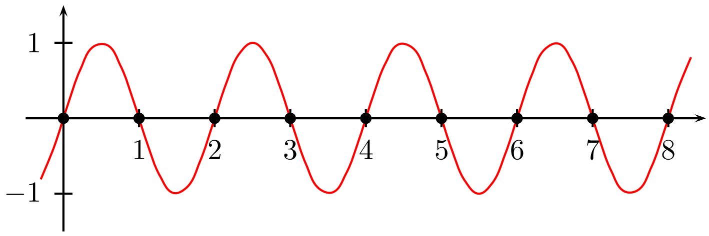


Figura 1.4: $a_n = \sin(\pi n)$ e $f(x) = \sin(\pi x)$

1.2.1. Due limiti notevoli

Esempio 1.2.2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $f\colon x \in [1, +\infty) \to x^{\frac{1}{x}} \to \mathbb{R}$. Poichè $f(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$, e la funzione esponenziale è una funzione continua, è sufficiente osservare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. □

Esempio 1.2.3. Sia x è un parametro reale; si consideri $a_n = x^n$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ 0 & |x| < 1 \\ \text{non esiste} & x \leq -1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Se $x = 0$, $a_n = x^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Se $x > 0$, possiamo scrivere $x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n\ln(x))$. Poiché $\lim_{n\to\infty} n\ln(x) = \begin{cases} +\infty & x > 1 \\ 0 & x = 1 \\ -\infty & 0 < x < 1 \end{cases}$ e poiché la funzione esponenziale $\exp(\cdot)$ è continua, otteniamo la tesi.
Se $x < 0$, osserviamo che $x^n = (-1)^n |x|^n$ e dunque, se $x \in (-1, 0)$ abbiamo che $a_n = x^n$ è il prodotto tra una successione oscillante ma limitata e una successione convergente a 0. Dunque converge a 0.
Se $x \leq -1$, allora abbiamo

$$x^n \geq 1 \text{ se } n \text{ è pari}$$
$$x^n \leq -1 \text{ se } n \text{ è dispari}$$

e dunque non può convergere. □

Esempio 1.2.4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Fissato $N \in \mathbb{N}$ con $N > |x|$, sia $n > N$. Allora

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^n}{n!}\right| &= \frac{|x|^N \ |x|^{n-N}}{N!(N+1)(N+2)\dots(n-1)n} \leq \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{n-N} \\ &= \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{-N}\left|\frac{x}{N+1}\right|^n\end{aligned}$$

Il prodotto dei primi due fattori $\frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{-N}$ è costante perché N e x sono fissati. Inoltre, per la scelta di N abbiamo $\left|\frac{x}{N+1}\right| < 1$ e dunque $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{N+1}\right|^n = 0$. □

1.3. Esercizi

Esercizio 1.3.1. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}\right)$, sia manipolando opportunamente la differenza di radici che riconducendosi allo studio dei limiti di funzione reale per $x \to 0^+$.

Esercizio 1.3.2. Studiare le proprietà di monotonia e limitatezza per le successioni seguenti:

$$a_n = \frac{2n+5}{n+3}; \quad b_n = ne^{-n}.$$

Esercizio 1.3.3. Verificare, in base alla definizione di limite, le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0; \quad \lim_{n\to\infty}(8 - \log_2 n) = -\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{4n} = \frac{3}{4}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n} = +\infty.$$

Esercizio 1.3.4. Studiare le proprietà di monotonia e limitatezza per le successioni seguenti:

$$2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right); \quad \frac{1}{n!}; \quad \frac{1}{9n-2}; \quad \frac{n+6}{n+2}.$$

Esercizio 1.3.5. Verificare, in base alla definizione di limite, le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{1+n} = -\infty; \quad \lim_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n}\right) = +\infty.$$

Esercizio 1.3.6. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n} - \sqrt{n^2+4}\right); \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+3}} - 1\right); \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}\right).$$

2
Serie numeriche

2.1. Serie numeriche: proprietà algebriche

Valgono proprietà algebriche e di ordinamento, analoghe a quelle che valgono per le successioni convergenti

Proprietà 2.1.1. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ sono due serie convergenti e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \,,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \,,$$

$$\text{se } a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ allora } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \,.$$

2.1.1. Un ulteriore criterio di convergenza per le serie a termini non negativi

Teorema 2.1.1 (Criterio di confronto al limite)**.** *Sia $\{a_n\}$ una successione a termini non negativi e sia $\{b_n\}$ una successione a termini positivi. Supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Allora*

- *se $L \in (0, +\infty)$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere;*
- *se $L = 0$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge;*

- *se* $L = +\infty$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *diverge, allora anche* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

2.2. Esercizi

Esercizio 2.2.1. Determinare il carattere delle seguenti serie e, se convergono, calcolarne la somma.

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} 3^{-k}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{-k}, \quad \sum_{k=-1}^{+\infty} \pi^{-k}. \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+3}}{3^{k-2}}.$$

Esercizio 2.2.2. Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2-4} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$$

Esercizio 2.2.3. Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4}, \ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!\,6^n}{(3n)!}.$$

Esercizio 2.2.4. Al variare di $p \in [0, +\infty)$ determinare il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$.

Esercizio 2.2.5. Al variare del parametro reale $x \in \mathbb{R}$, determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Esercizio 2.2.6. Al variare del parametro reale $x \in \mathbb{R}$, determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{x^n n!}$.

Esercizio 2.2.7. Determinare il carattere delle seguenti serie geometriche e, se convergono, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 3^{-n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{5^{n+2}}.$$

Esercizio 2.2.8. Determinare il carattere delle seguenti serie a termini non negativi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n^3+7}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3-n}}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}.$$

Esercizio 2.2.9. Determinare, al variare del parametro, il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p \geq 0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha a^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ a \geq 0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\exp(n^\beta) - 1\Big)\, n^2, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2.2.10. Determinare il carattere delle seguenti serie geometriche e, se convergono, calcolarne la somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{-k}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{k}; \quad \sum_{k=3}^{\infty} 2^{-k}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{3^{k-2}}.$$

Esercizio 2.2.11. Determinare il carattere delle seguenti serie a termini non negativi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, 6^n}{(3n)!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+n+1}}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2n^3+2n+7}.$$

Esercizio 2.2.12. Determinare, al variare del parametro, il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}, \quad a \geq 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3

Serie di potenze e serie di Taylor

[1] Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, Aracne
[2] Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, Lorenzo Giacomelli *Analisi Matematica*, McGraw–Hill.

Per chi ha il testo [3]
Prima di questo: 337–339 (le dimostrazioni sono sul fascicolo a parte!). Si consigliano inoltre gli esempi ed esercizi delle pagine successive: 340–346.

Per chi ha il testo [4]:
Prima di questo: sezione 5.10 (pagg. 131–134). Si consigliano inoltre gli esempi ed esercizi delle sezioni 8.13.1 (pagg. 220–224) e 9.9 (pagg. 265–267).

3.1. Operazione algebriche

Vale la seguente proprietà di cui omettiamo la dimostrazione

Proprietà 3.1.1. Siano $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x-x_0)^k$ due serie di potenze aventi lo stesso centro c e con raggi di convergenza r_a e r_b rispettivamente.

1. Se $\lambda \neq 0$, la serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k)(x-x_0)^k$ ha lo stesso insieme di convergenza e lo stesso raggio di convergenza r_a della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ e vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k)(x-x_0)^k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$$

per ogni x appartenente al comune insieme di convergenza;

2. la serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)(x - x_0)^k$ ha raggio di convergenza $r \geq \min\{r_a, r_b\}$ e vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x - x_0)^k$$

per ogni x tale che tutte e tre le serie convergano.

3.2. Derivazione e integrazione per serie

Quando dobbiamo studiare un polinomio, possiamo calcolare la sua derivata molto facilmente sfruttando la linearità dell'operatore di derivazione. Una serie di potenze è una somma di infiniti addendi. La proprietà di linearità della derivazione si estende? Ci poniamo la stessa domanda per la ricerca di una primitiva.

Prima di tutto abbiamo un risultato di continuità:

Teorema 3.2.1 (Teorema di Abel)**.** *La somma di una serie di potenze è una funzione continua nell'intervallo di convergenza della serie stessa.*

Teorema 3.2.2 (Teorema di integrazione e derivazione per serie)**.**
Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k$ *una serie di potenze con raggio di convergenza* $r > 0$ *(o* $r = +\infty$*). Allora*

1. *La serie delle derivate*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$
e la serie delle primitive
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}$$
hanno anch'esse raggio di convergenza r*.*

Inoltre, posto $f\colon x \in (-r, r) \to \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k \in \mathbb{R}$ *abbiamo*

2. f *è derivabile in* $(-r, r)$ *e* $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x - x_0)^{k-1}$ $\forall x \in (-r, r)$*;*

3. f è integrabile in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-r,r)$ e

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r).$$

Partendo dalla serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $|x|<1$ e usando questi due teoremi ricaviamo l'espressione in serie di potenze di altre funzioni:

Esempio 3.2.1.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = D\frac{1}{1-x} = D\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \quad |x|<1$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln 1 &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad x \in (-1,1]\end{aligned}$$

dove l'estensione dell'uguaglianza fino a $x=1$ è possibile grazie al teorema di Abel 3.2.1.

Esempio 3.2.2.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} \quad |x|<1$$

$$\begin{aligned}\arctan x = \arctan x - \arctan 0 &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad x \in [-1,1]\end{aligned}$$

dove l'estensione dell'uguaglianza fino a $|x|=1$ è possibile grazie al teorema di Abel 3.2.1.

Se riconsideriamo il teorema di integrazione e derivazione per serie 3.2.2, ci accorgiamo che esso può essere iterato quante volte vogliamo, quindi in realtà la funzione f definita dalla somma della serie non è solo di classe $C^1(-r,r)$ ma è addirittura di classe $C^\infty(-r,r)$. Che relazione c'è tra la somma della serie f e i coefficenti a_k? Abbiamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k \qquad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

dunque, in particolare

$$f(x_0) = a_0$$

Dal teorema 3.2.2 abbiamo poi

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} \qquad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

dunque, in particolare

$$f'(x_0) = 1 \cdot a_1$$

Applicando lo stesso teorema 3.2.2 alla serie delle derivate ed alla sua somma $f'(x)$ abbiamo

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2} \qquad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

dunque, in particolare

$$f''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2\,.$$

Iterando il procedimento troviamo

$$f^{(n)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-(n-1))a_k(x-x_0)^{k-n} \qquad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

dunque, in particolare

$$f^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!\, a_n.$$

Per estensione definiamo $f^{(0)} = f$. Abbiamo dunque dimostrato la seguente

Proposizione 3.2.1. Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ (o $r = +\infty$) e sia, per $x \in (x_0-r, x_0+r)$, $f(x)$ la somma della serie. Allora

$$f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Teorema 3.2.3.

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

È un problema di Cauchy a coefficenti continui per un'equazione differenziale lineare in forma normale del secondo ordine, quindi ammette una ed una sola soluzione di classe $C^2(\mathbb{R})$. Poiché i coefficenti sono costanti, è anche facile calcolare questa soluzione: è la funzione $\sin\colon x \in \mathbb{R} \to \sin(x) \in \mathbb{R}$.

Cerco una soluzione in forma di serie di potenze centrata in $x_0 = 0$; se questa converge per $x \in (-r, r)$ ($r > 0$ o $r = +\infty$), allora è di classe $C^\infty((-r, r))$, è $C^2((-r, r))$ ed è soluzione del problema di Cauchy, quindi coincide con la funzione $\sin|_{(-r,r)}$.

Sia dunque $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la funzione somma di una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ e supponiamo che la serie abbia raggio di convergenza $r > 0$ o $r = +\infty$. Abbiamo

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k \end{aligned}\right\} \quad \forall x \in (-r, r)$$

dunque $y''(x) + y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left((k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k\right) x^k \quad \forall x \in (-r, r)$.

(**n.b.** perché di due serie ne ho fatta una sola?)

Quindi, se

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

e $r > 0$, sicuramente $y(x)$ risolve il problema di Cauchy in $(-r, r)$.

Consideriamo le condizioni iniziali del problema di Cauchy:

$$y(0) = 0 \iff a_0 = 0 \qquad y'(0) = 1 \iff a_1 = 1$$

perché $y(0) = 0!\, a_0 = a_0$ e $y'(0) = 1!\, a_1 = a_1$. La condizione (3.2) è equivalente a

$$a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)(k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

e, dunque, poiché $a_0 = 0$ abbiamo $a_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Invece, se k è dispari, cioè se $k = 2n - 1$, $n \geq 1$ abbiamo:

$$a_{2n+1} = \frac{-a_{2n-1}}{(2n+1)2n} \quad \forall n \geq 1.$$

Vediamo cosa significa questa condizione:

$$\begin{array}{ll} n=1 & a_3 = \dfrac{-a_1}{3\cdot 2} = \dfrac{-1}{3\cdot 2} \\[2ex] n=2 & a_5 = \dfrac{-a_3}{5\cdot 4} = \dfrac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} \\[2ex] n=3 & a_7 = \dfrac{-a_5}{7\cdot 6} = \dfrac{-1}{7!} \\[2ex] \dots & \dots \end{array}$$

In generale, abbiamo quindi

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.$$

Considero quindi la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Poiché il coefficiente n–esimo non è definitivamente diverso da zero, per calcolarne il raggio di convergenza faccio un cambiamento di variabile. Posto $t = x^2$, abbiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{(2n+1)!} t^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^n$$

per ogni t per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^n$ converge. È una serie di potenze in t con centro $t_0 = 0$ e coefficenti $b_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$. Abbiamo

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{(-1)^n} \right| = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty$$

quindi $r = +\infty$. Dunque la serie in t converge per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ma $t = x^2$, quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per l'unicità delle soluzioni in $C^2(\mathbb{R})$ del problema di Cauchy consierato abbiamo dunque

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Esercizio 3.2.1. Dimostrare che $f(x) = \ln(1+x)$ è analitica in tutto il suo dominio.

3.2.1. La serie binomiale

Teorema 3.2.4. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, allora*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \qquad \forall x \in (-1,1)$$

In particolare

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k\, k!} x^k \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Dimostrazione. Il caso $\alpha \in \mathbb{N}$ è banale, supponiamo dunque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
1. Determiniamo il raggio di convergenza della serie
$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$:
$a_k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ dunque

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k-\alpha}{k+1}$$

Questa quantità converge ad 1 e dunque il raggio di convergenza è $r = 1$. Per $x \in (-1,1)$ sia $f(x)$ la funzione definita dalla somma di 1 con la somma della serie:

$$f\colon x \in (-1,1) \to 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = (1+x)^\alpha$:
Sicuramente $f(0) = (1+0)^\alpha$. Calcoliamo

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{(k-1)!} x^{k-1} \qquad x \in (-1,1)$$

Isoliamo il primo addendo e cambiamo indice: poniamoo $\ell = k-1$: $k \geq 2 \iff \ell \geq 1$ e dunque

$$f'(x) = \alpha + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\ell)}{\ell!} x^\ell \qquad x \in (-1,1)$$

Calcoliamo $(1+x)f'(x)$:

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= f'(x) + xf'(x)\\
&= \alpha + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!}x^k + x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{(k-1)!}x^{k-1}\\
&= \alpha + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{(k-1)!}\right)x^k\\
&= \alpha\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k\right) = \alpha f(x)\end{aligned}$$

Dunque la funzione somma della serie è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\alpha y(x)}{1+x}\\ y(0) = 1\end{cases}$$

nell'intervallo $(-1,1)$. D'altra parte anche la funzione $g(x) = (1+x)^\alpha$ risolve lo stesso problema di Cauchy in $(-1,+\infty)$:

$$\begin{aligned}&g(0) = (1+0)^\alpha = 0\\
&g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha(1+x)^\alpha}{1+x} = \frac{\alpha g(x)}{1+x}\end{aligned}$$

Si tratta di un problema di Cauchy per un'equazione lineare omogenea a coefficenti continui in $(-1,+\infty)$; per l'unicità della soluzione in $C^2((-1,1))$, deve essere $f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-1,1)$. □

Come conseguenza otteniamo anche lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione arcsin:

$$\begin{aligned}\arcsin x = \arcsin x - \arcsin 0 &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k\,k!}t^{2k}\right)\mathrm{d}t\\
&= x + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k\,k!\,(2k+1)}x^{2k+1}.\end{aligned}$$

3.3. Serie di Taylor e di MacLaurin

Fino ad ora abbiamo preso una serie di potenze, abbiamo cercato di determinare il suo insieme di convergenza E e, per $x \in E$ abbiamo posto $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$. Poi abbbiamo visto che se E non si riduce al solo punto x_0, allora f gode di molte buone proprietà. Cerchiamo ora di fare il procedimento opposto. Supponiamo di avere una funzione $f\colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con E intervallo e di sapere che è derivabile infinite volte in un qualche punto $x_0 \in E$.

Definizione 3.3.1 (Serie di Taylor)**.** Chiamo *serie di Taylor della funzione* f *con centro* x_0 la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{3.3}$$

Se $x_0 = 0$, la serie si chiama anche *serie di MacLaurin della funzione* f.

Abbiamo una serie di potenze e quindi ci chiediamo quale sia il suo insieme di convergenza. E, se converge, converge sicuramente a $f(x)$ o può convergere a qualche altro valore? Sicuramente per $x = x_0$ converge a $f(x_0)$. Ma per $x \neq x_0$ può succedere di tutto. Lo vediamo con un esempio.

Esempio 3.3.1. Sia $f\colon x \in \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Si può dimostrare che la funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e che

$$\exists f^{(n)}(0) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie di MacLaurin di f è la serie a coefficenti nulli $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 0\,x^k = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi la serie di MacLaurin converge $\forall x \in \mathbb{R}$ ma non converge a $f(x)$ perchè $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$.

Questo esempio ci mostra che esistono funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che la serie di Taylor di f non converge ad f. Diamo allora un nome alle funzioni per cui si ha questa convergenza.

Definizione 3.3.2 (Funzioni analitiche)**.** Una funzione f si dice *analitica in* x_0 se la serie di Taylor di f con centro x_0 converge ad f almeno in un intervallo aperto contenente x_0.
Se f è analitica in ogni punto di un intervallo I, allora f si dice *analitica in* I.

Abbiamo uno strumento che ci permetta di stabilire se una funzione $C^\infty(I)$ è anche analitica? Consideriamo la successione delle somme parziali della serie di Taylor:

$$s_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{k} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

è un oggetto noto: è il polinomio di Taylor $T_n(x, x_0)$ di grado n con centro x_0 della funzione f. Poichè $f \in C^\infty(I)$, sappiamo che

$$f(x) - T_n(x, x_0) = E_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

per un opportuno ξ compreso tra x_0 e x. Possiamo allora enunciare la seguente proposizione e il seguente corollario

Proposizione 3.3.1. Se $f \in C^\infty(I)$ e se $\lim_{n\to\infty} E_n(x, x_0) = 0$, allora la serie di Taylor di f con centro x_0, valutata in x, converge a $f(x)$.

Osservazione 3.3.1. Nell'esempio 3.2.1 abbiamo dimostrato, senza usare questi due risultati, che le funzioni $\ln(1 + x)$ e $\arctan x$ sono analitiche in $x_0 = 0$.

Nel teorema 3.2.3 abbiamo provato che la funzione sin è analitica in $x_0 = 0$ ed abbiamo calcolato la sua serie di MacLaurin.

Esempio 3.3.2. Sia $f\colon x \in \mathbb{R} \to \exp(x) \in \mathbb{R}$ la funzione esponenziale. Sappiamo allora che

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fisso $x_0 \in \mathbb{R}$. La serie di Taylor di f con centro x_0 è dunque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k\,.$$

La serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{e^{x_0}}{(k+1)!}\frac{k!}{e^{x_0}} = \frac{1}{k+1}$$

questa quantità converge a 0 quando $k \to +\infty$ e dunque $r = +\infty$, cioè la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$. Il resto è $E_n(x, x_0) = \dfrac{e^\xi}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ per un opportuno ξ compreso tra x_0 e x. Pongo $A = \max\{x, x_0\}$, allora

$$|E_n(x, x_0)| \le \frac{e^A\,|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Abbiamo visto (limite notevole) che $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, e dunque abbiamo anche $\lim_{n\to+\infty} E_n(x, x_0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.3.1. Dimostrare che le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono analitiche in $\mathbb{R}$. Dimostrare che lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione cos è

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.4. Serie di potenze: esercizi svolti e/o proposti

Esercizio 3.4.1. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(5-2x)^k}{k}.$$

Esercizio 3.4.2. Determinare l'insieme di convergenza e calcolare la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-x^2)^k}{k!}; \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(3x-2)^{k+1}}{k+1}.$$

Esercizio 3.4.3. Sia $f(x) = \dfrac{1}{7+x}$. Sviluppare f in serie di MacLaurin e in serie di Taylor in un intorno di $c = 3$. Determinare l'insieme di convergenza.

Esercizio 3.4.4. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k}{2k+1}\right)^{2k-1} x^k; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+2}{2k} x^k; \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k 2^k \ln(k)}.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k}{2^k} x^k; \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} x^k; \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^k}{k^2} x^k.$$

Esercizio 3.4.5. Sviluppare le seguenti funzioni in serie di MacLaurin, indicando l'insieme di convergenza della serie.

$$f(x) = \cos(3x^2); \qquad f(x) = \frac{\exp(3x^3) - 1}{x^2}; \qquad f(x) = \frac{x}{4 - x^2}.$$

Esercizio 3.4.6. Sviluppare in serie di Taylor con centro nel punto a fianco indicato. Indicare l'insieme di convergenza.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x), \qquad && c = 3; \\ f(x) &= \frac{x}{2+x}, \qquad && c = 1. \end{aligned}$$

Esercizio 3.4.7. Calcolare la somma della serie

$$x^3 - \frac{x^9}{3!\,4} + \frac{x^{15}}{5!\,16} - \frac{x^{21}}{7!\,64} + \frac{x^{27}}{9!\,256} \ldots$$

Esercizio 3.4.8. Calcolare $\sin\left(\dfrac{1}{10}\right)$ con errore inferiore a 10^{-5}.

Esercizio 3.4.9. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{\pi^k}$.

Esercizio 3.4.10. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!} x^k; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k 2^k} x^k; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x+9)^{k-1}}{(k-1)^2};$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^k (x+7)^k; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k^2} \left(\frac{3x-2}{2}\right)^k.$$

4

Sistemi di coordinate nel piano e nello spazio

4.1. Coordinate cartesiane e coordinate polari

Consideriamo un piano Π. Siamo abituati ad introdurvi un *sistema di coordinate cartesiane* nel seguente modo: fisso un punto del piano O che chiamo *origine* e due distinte rette orientate passanti per O. Li chiamiamo *asse* x e *asse* y, rispettivamente. Su ciascun asse introduco una unitá di misura.

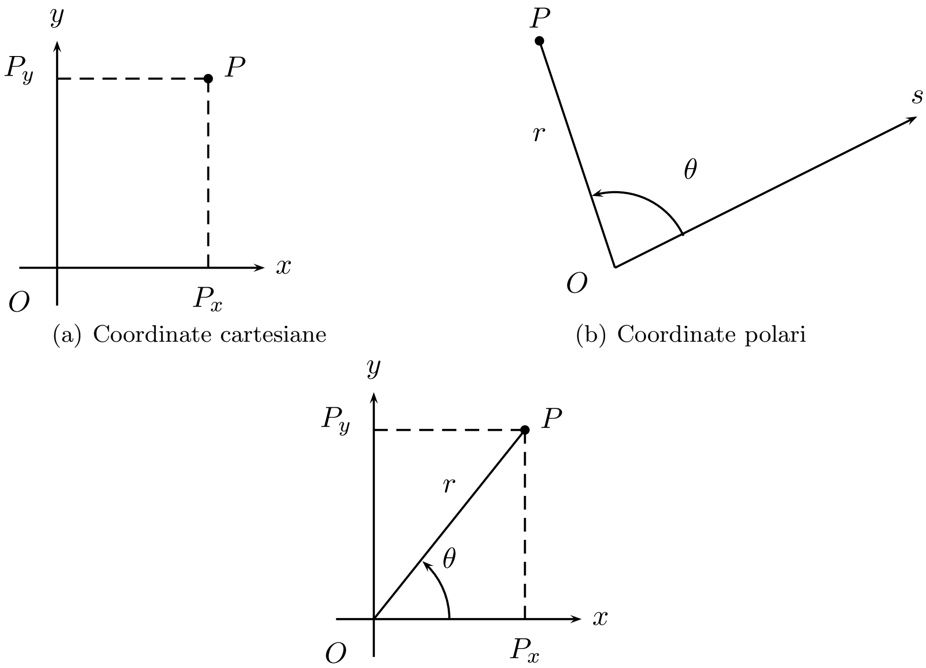
Consideriamo un punto P del piano Π, traccio la retta parallela all'asse y passante per P. Incontra l'asse x in un punto che chiamo P_x. Traccio la retta parallela all'asse x passante per P. Incontra l'asse y in un punto che chiamo P_y.

I segmenti OP_x e OP_y hanno una misura determinata dall'unitá di misura scelta sui due assi. Se P_x segue (o coincide con) O nell'orientamento dell'asse x chiamo *ascissa del punto* P la misura di OP_x. Se P_x precede O nell'orientamento dell'asse x chiamo *ascissa del punto* P la misura di OP_x cambiata di segno. Analogamente, considerando il segmento OP_y definisco l'*ordinata* del punto P.

Se le due rette di riferimento, cioé l'asse x e l'asse y sono perpendicolari, il sistema di riferimento Oxy si dice *sistema di riferimento cartesiano ortogonale*.

Il punto P è cosí univocamente determinato dalla sua ascissa e dalla sua ordinata (piú brevemente dalle sue *coordinate cartesiane*). Si usa il simbolo $P \equiv (x, y)$ o $P(x, y)$ per dire che P è il punto del piano Π individuato dalle coordinate cartesiane (x, y)

Esistono altri sistemi di coordinate per individuare un punto del piano. Vediamone uno: considero un punto O sul piano (che chiamo *polo*) ed una semiretta s, che chiamo *asse polare* uscente dal polo. Considero un punto P sul piano: posso individuare la sua posizione sul piano in questo modo: mediante la sua distanza dall'origine e mediante l'angolo che devo percorrere in senso orario per portare l'asse polare sulla semiretta uscente da O e passante per P, cioé tramite una



(a) Coordinate cartesiane (b) Coordinate polari

(c) Cambiamento di coordinate

Figura 4.1: Coordinate cartesiane e coordinate polari

coppia ordinata (r, θ) con $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ ($\theta \in (-\pi, \pi]$ se voglio un solo valore di θ).

Osservazione 4.1.1. Le coordinate polari sono ben definite solo per i punti P diversi dal polo. Perché?

Considero ora un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani Oxy ed un sistema di coordinate polari in cui il polo coincide con l'origine e l'asse polare con la semiretta positiva dell'asse x. Un punto P del piano sarà individuato dalle coordinate cartesiane (x, y) e dalle coordinate polari (r, θ). Che relazione c'è tra le due coordinate?

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{4.1}$$

Esempio 4.1.1. Trovare le coordinate polari del punto P di coordinate cartesiane $(1, 1)$.

Uso le formule (4.1): $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, mentre le uguaglianze $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ ci dicono che $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Quindi le coordinate polari del punto P sono $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Osservazione 4.1.2. Le coordinate polari sono ben definite solo per i punti P diversi dal polo. Come si riflette questo nelle formule di cambiamento di coordinate?

4.2. Coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche

Consideriamo lo spazio affine tridimensionale. Di solito scegliamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, cioè fissiamo un punto O dello spazio, che chiamiamo *origine* e 3 assi orientati e mutuamente ortogonali passanti per questo punto. Individuiamo un punto dello spazio tramite le proiezioni ortogonali del punto sui piani coordinati e sugli assi. Ma ci sono altri tipi di coordinate.

4.2.1. Coordinate cilindriche

Scelgo un punto O dello spazio ed una retta orientata t passante per O. Sul piano ortogonale alla retta e passante per O metto un sistema di coordinate polari (r, φ).
Se ho anche un sistema di coordinate cartesiane in cui l'origine è la stessa, l'asse z coincide con l'asse t e l'asse polare coincide con la direzione positiva dell'asse x, il cambiamento di coordinate è espresso dalle seguenti formule:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ t = z \end{cases} \tag{4.2}$$

4.2.2. Coordinate sferiche

Scelgo un punto O dello spazio ed una semiretta orientata t uscente da O. Sul piano π ortogonale alla semiretta e passante per O fisso un'ulteriore semiretta s uscente da O.
La posizione di un punto P dello spazio è univocamente determinata dalle seguenti 3 coordinate

1. la lunghezza r del segmento orientato $P - O$;

2. L'angolo φ che questo segmento orientato forma col semi-asse t ;

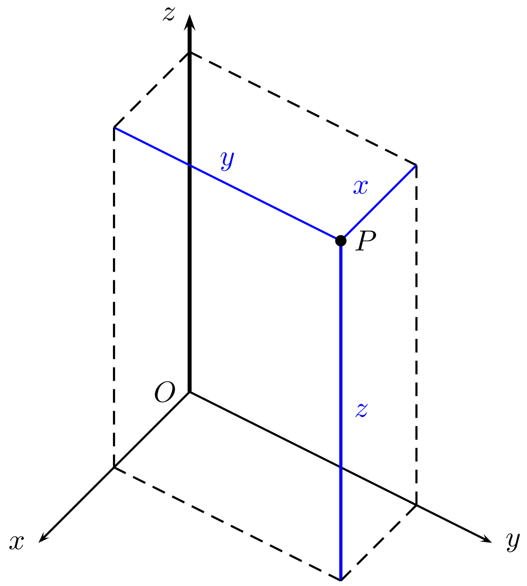


Figura 4.2: Coordinate cartesiane

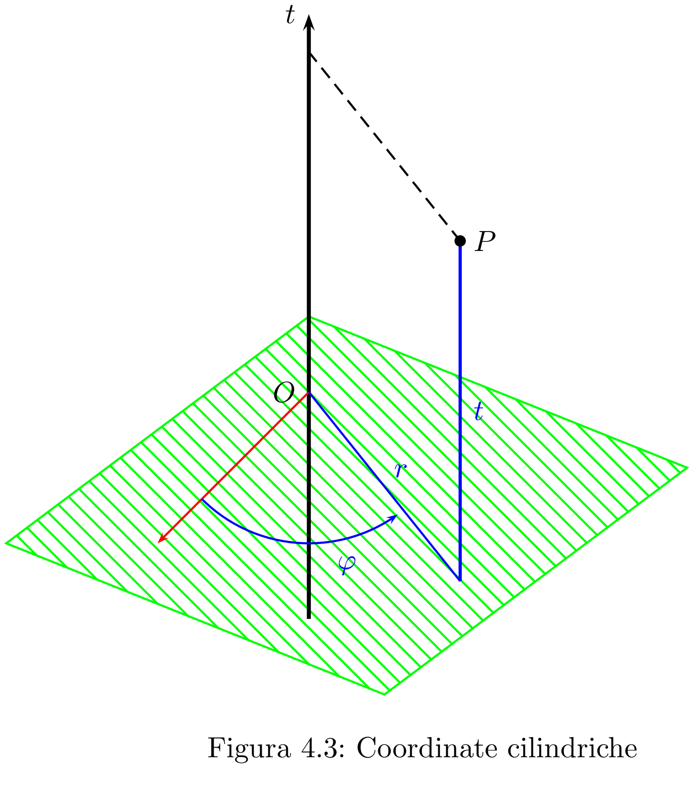


Figura 4.3: Coordinate cilindriche

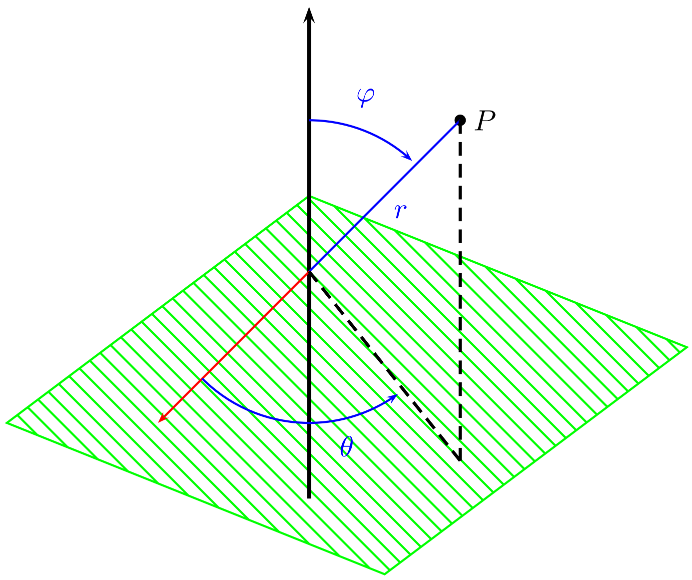


Figura 4.4: Coordinate sferiche

3. L'angolo θ che la proiezione di $P - O$ su π forma col semi-asse s

Osserviamo che possiamo sempre supporre $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$. Se fisso un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui l'origine coincide con il polo O, la direzione positiva dell'asse z coincide col semi-asse t e la direzione positiva dell'asse x coincide col semi-asse s, valgono le seguenti formule di cambiamento di variabile:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\varphi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{4.3}$$

5

Funzioni di due o più variabili reali

5.1. Esempi ed esercizi svolti e/o proposti

5.1.1. Domini ed insiemi di livello

Esercizio 5.1.1. Disegnare sul piano Oxy il dominio delle seguenti funzioni.

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \ln\frac{y}{x}}\,, \qquad f(x,y) = \ln\frac{x^2-1}{4-y^2}\,,$$
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{2} - \sin\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{xy}}\,, \quad f(x,y) = \sqrt{\frac{\dfrac{1}{2} - \sin\sqrt{x^2+y^2}}{xy}}\,.$$

Esercizio 5.1.2. Disegnare il dominio e le linee di livello della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\ln\left(1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}\right)}$$

Esercizio 5.1.3. Tra le seguenti funzioni identificare quelle radiali e quelle omogenee e studiarle

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4+x^2+y^2}\,, \quad f(x,y) = \frac{y^2}{x^2}\exp\left(\frac{-y}{x}\right)\,, \quad f(x,y) = \frac{xy-y^2}{x^2+y^2}\,,$$
$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\,, \quad f(x,y) = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\,, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{y^2+3x^2}$$
$$f(x,y) = \frac{xy+y^2}{x^2-y^2}\,, \qquad f(x,y) = \frac{y}{x}\exp\frac{-y}{x}\,.$$

5.1.2. Estremi assoluti tramite le linee di livello

Esercizio 5.1.4. Mediante lo studio degli insiemi di livello determinare massimo e minimo assoluti delle seguenti funzioni nell'insieme a fianco indicato (non fare nemmeno una derivata!!!) e determinare i punti in cui essi sono assunti

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+1}\,, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\,;\right\}$$

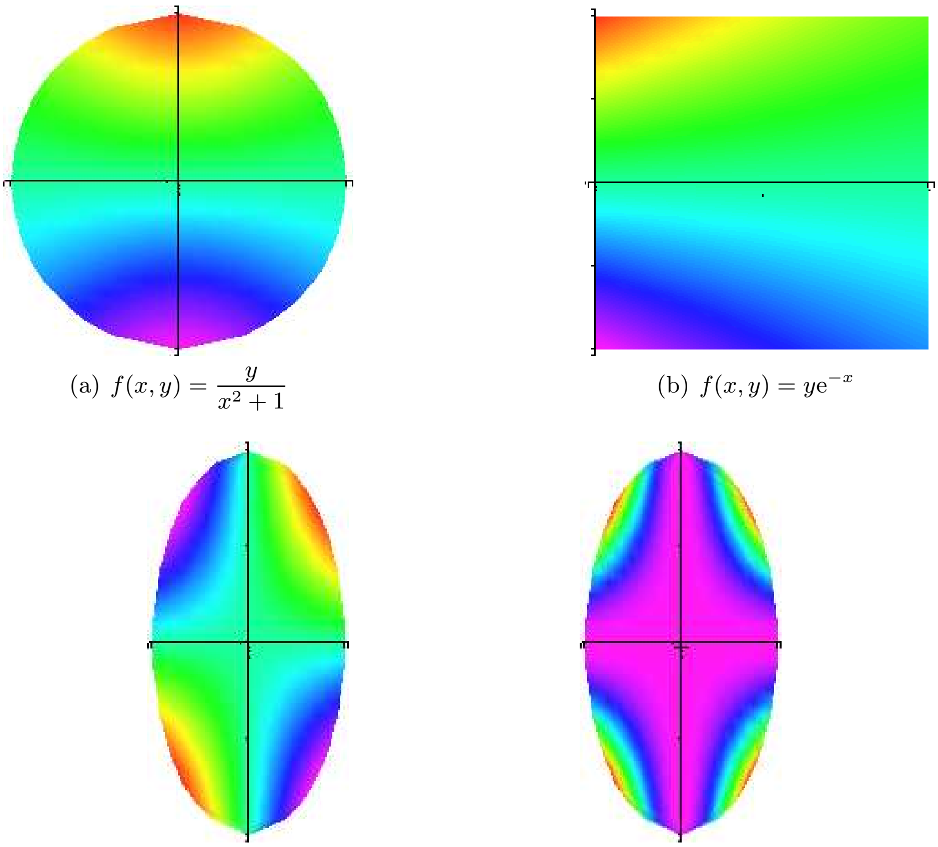
$$f(x,y) = y\mathrm{e}^{-x}\,, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1\,, \quad |y| \leq 2\right\}\,;$$

$$f(x,y) = xy \quad \text{e} \quad g(x,y) = (xy)^2, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}\,;$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2\,, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f(x,y) = (2x-y)^2\,, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \leq y \leq 4\}$$

$$f(x,y) = xy\,, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$



(a) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+1}$ (b) $f(x,y) = y\mathrm{e}^{-x}$

(c) $f(x,y) = xy$ (d) $g(x,y) = (xy)^2$

Figura 5.1: Le linee di livello di alcune funzioni dell'esercizio 5.1.4

5.1.3. Derivate parziali

Esercizio 5.1.5. Calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \exp(x^2-3y)\cos(2x+6y)\,, \\ f(x,y,z) &= \exp(xz)+zy-\sin(xyz)+\cos(xy^3)\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5.1.6. Scrivere l'equazione del(l'iper)piano tangente e della retta normale al grafico delle seguenti funzioni nel punto a fianco indicato

$$\begin{aligned} &f(x,y) = \ln(xy)+\cos(x+y) && P = \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &f(x,y,z) = \exp(yz)+\cos\left(\frac{\pi}{6}xy\right) && P = (1,2,\ln 3, f(1,2,\ln 3)) \end{aligned}$$

Esercizio 5.1.7. Disegnare nello spazio $Oxyz$ il dominio della funzione

$$f(x,y,z) = \ln(x^2-y^2+z^2)+x-z+y\,.$$

Determinare, se esistono, i punti del dominio in cui l'iperpiano tangente al grafico è orizzontale (cioè del tipo $t=C$, dove t è la quarta coordinata.)

5.1.4. Funzioni composte, derivate direzionali

Esercizio 5.1.8. Siano $\alpha\colon t\in\mathbb{R}\to(t-1,t+1)$ e $\beta\colon t\in\mathbb{R}\to\big(t^2-1,2\big)$ due curve nel piano. Sia $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sapendo che

$$\left.\frac{d}{dt}f\circ\alpha\right|_{t=1} = 2 \quad \text{e che} \quad \left.\frac{d}{dt}f\circ\beta\right|_{t=1} = 3\,,$$

calcolare, se possibile $Df(0,2)$.
Ripetere sostituendo la curva β con la curva $\beta\colon t\in\mathbb{R}\to\big(t^2-1,2t\big)$

Esercizio 5.1.9. Sia $f\colon(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\to x^3y+xz^3$ e sia $\alpha\colon t\in\mathbb{R}\to\big(3t,t^2,t^3-1\big)$.
Calcolare $\left.\dfrac{d}{dt}(f\circ\alpha)\right|_{t=1}$

Esercizio 5.1.10. Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = x^4\cos(y)$$

nel punto $P\equiv\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$, nella direzione individuata dal vettore $\mathbf{v}=(1,3)$.

Esercizio 5.1.11. Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y,z) = x^4-xy^3+zy$$

nel punto $P\equiv(1,2,3)$, nella direzione individuata dal vettore $\mathbf{v}=(1,1,1)$.

5.1.5. Polinomio di Taylor ed estremi locali

Esercizio 5.1.12. Per ciascuna delle seguenti funzioni calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine con resto di Peano, nel punto a fianco indicato

$$
\begin{array}{ll}
f(x,y) = \mathrm{e}^{2x-3y} & P = (1,0) \\
f(x,y) = \sin(x-y)(x+y^2) & P = (0,0) \\
f(x,y) = \ln(xy)(x-2y) & P = (2,1) \\
f(x,y) = x^5y^3 - x^3y^5 & P = (1,-1) \\
f(x,y) = xy\ln(xy^2) + x^2y & P = (1,\mathrm{e}^{-3/2})
\end{array}
$$

Esercizio 5.1.13. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare i punti stazionari e stabilirne la natura (max rel, min rel, sella), cercando, ove possibile, di evitare lo studio della matrice hessiana.

$$
\begin{array}{ll}
f(x,y) = x^2\ln(x-y)\,, & f(x,y) = x\ln(x-y)\,, \\
f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\,, & f(x,y) = y^2 - x^2y
\end{array}
$$

Esercizio 5.1.14. Determinare, al variare del parametro reale a, la natura dei punti critici della funzione $f_a(x,y) = x^4 + ax^2y + y^2$.

Esercizio 5.1.15. Delle seguenti funzioni di due o tre variabili reali, di classe C^2 è noto lo sviluppo di Taylor con resto di Peano in un determinato punto. Determinare il valore della funzione, delle derivate parziali prime e seconde nel punto in esame e determinare, ove possibile, la natura del punto

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= (x-1)^2 + 2(x-1)y + 3y^2 + o((x-1)^2+y^2)\,, \\
f(x,y) &= 3 + x + x^2 - xy + o(x^2+y^2)\,, \\
f(x,y,z) &= 1 + x^2 + 4x(y-3) + 8(y-3)^2 + (z-1)^2 - 2x(z-1) \\
&\qquad\qquad + o(x^2+(y-3)^2+(z-1)^2)\,, \\
f(x,y,z) &= 1 + 4x^2 + 2xy + 8y^2 + z^2 - 2xz + o(x^2+y^2+z^2)\,,
\end{aligned}
$$

Esercizio 5.1.16. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme dei punti critici e studiarne, ove possibile, la natura

$$
f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz\,, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz
$$

5.1.6. Estremi assoluti

Determinare gli estremi assoluti delle seguenti funzioni nel dominio a fianco indicato

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1 \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le 9\}\,;$

$f(x,y) = y^2(x^2+y^2-2x) \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le 4\,,\ x^2+y^2-2x-2y \le 0\,,\ y \ge 0\}\,;$

$f(x,y) = \exp(x^2+y^2) - \dfrac{x^2}{2} - y^2 \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 3x^2+4y^2 \le 4\,,\ y \ge \dfrac{1}{2}\}$

$f(x,y) = \big(1+x^2+y\big)\exp(x-y)\,, \qquad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| \le 1\,, \quad |y| \le 1\big\}\ ;$

$f(x,y) = x^2 - 4y^2\,, \qquad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+4y^2 \le 1\big\}\ ;$

$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+xy+2y^2}\,, \qquad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2+y^2 \le 4\big\}\ ;$

$$f(x,y) = x^2 + y^3\,, \qquad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \ge 0\,, \quad y \ge 0\,, \quad x+y \le 4\big\}\ .$$

6
Curve e integrali curvilinei

6.1. Esempi ed esercizi svolti e/o proposti

Esempio 6.1.1. Si consideri la curva parametrica

$$\varphi\colon t \in [0, 2\pi] \to \varphi(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \in \mathbb{R}^3$$

dove a e b sono due costanti positive. Provare che il supporto di φ è contenuto sul cilindro di equazione $x^2 + y^2 = a^2$. Provare che φ è regolare e calcolarne il versore tangente in ogni punto. Scrivere l'equazione della retta tangente in $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$. È semplice? È chiusa? Calcolarne la lunghezza. Cosa posso dire della proiezione di φ sul piano Oxy?

Esercizio 6.1.1. Si consideri la curva parametrica

$$\varphi\colon t \in [0, 2\pi] \to \varphi(t) = (at\cos(t), at\sin(t), bt) \in \mathbb{R}^3$$

dove a e b sono due costanti positive. Provare che il supporto di φ è contenuto sul cono di equazione $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2z^2}{b^2}$. Provare che φ è regolare e calcolarne il versore tangente in ogni punto. È semplice? È chiusa? Calcolarne la lunghezza. Cosa posso dire della proiezione di φ sul piano Oxy? Detta ψ tale proiezione, determinarne il versore tangente in ogni suo punto e scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente in $\psi\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Esercizio 6.1.2. Si consideri la curva di equazione polare

$$r(\theta) = 1 + \cos(\theta) \quad \theta \in [-\pi, \pi]\,.$$

È regolare? Tracciare il suo supporto indicando punto iniziale, punto finale e verso di percorrenza. per ogni $t \in (-\pi, \pi)$ in cui è definito, scrivere il versore

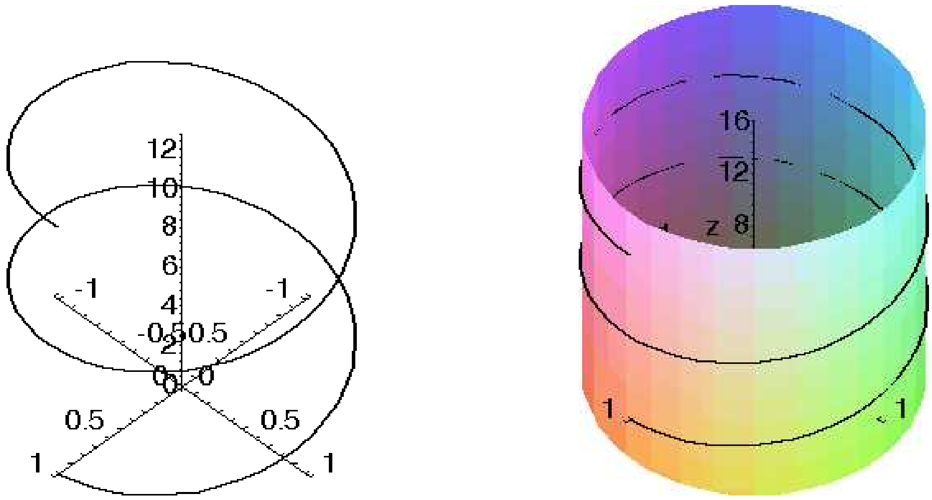
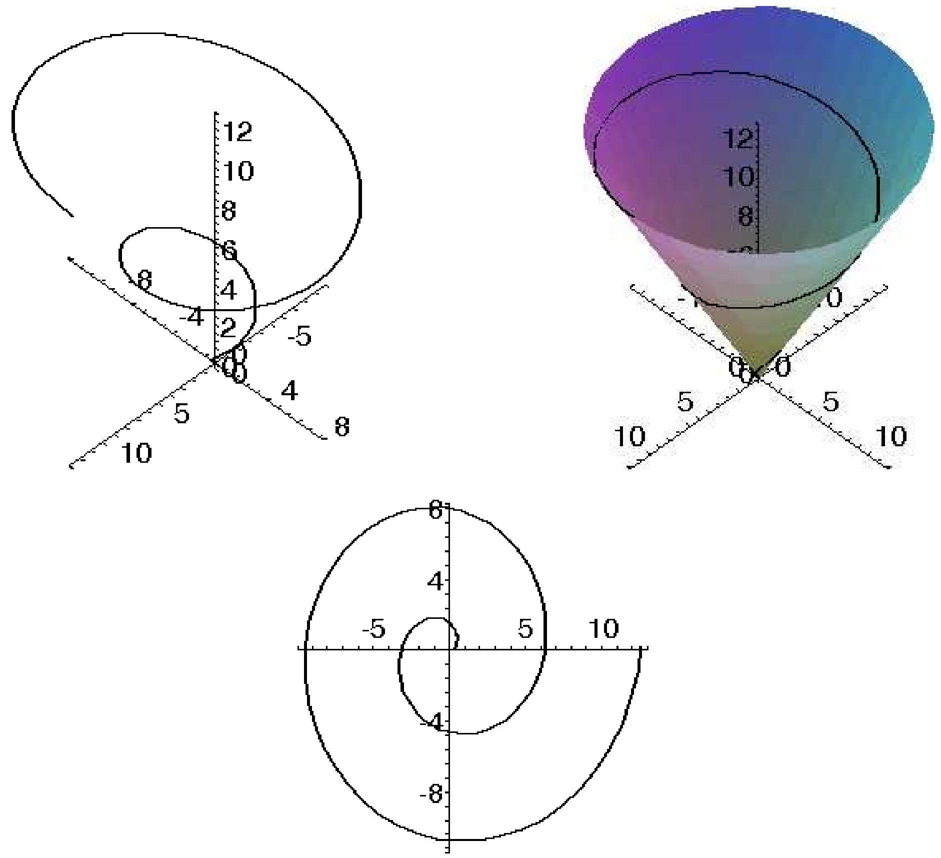


Figura 6.1: Elica su cilindro, $\varphi\colon t \in [0, 4\pi] \to \varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$



(c) Proiezione sul piano Oxy

Figura 6.2: Elica su cono, $\varphi\colon t \in [0, 4\pi] \to \varphi(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t)$

tangente alla curva. Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva nel punto di coordinate polari $\left(r\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4}\right)$. Calcolarne la lunghezza e le coordinate del baricentro.

Esercizio 6.1.3. Sia α la curva parametrica di equazione

$$\alpha\colon t \in [0,1] \to \alpha(t) = (\exp(2t), 2\exp(t), t) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare l'equazione della retta tangente in $\alpha(2)$ e calcolare la lunghezza della curva.

Esercizio 6.1.4. Sia α la curva parametrica

$$\alpha\colon t \in [-\pi,\pi] \to \alpha(t) = (\exp(2t), 2t, \sin(2t)) \in \mathbb{R}^3$$

Sia $f\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 2 - \sin^2 y} \in \mathbb{R}$. Calcolare $\displaystyle\int_\alpha f \mathrm{d}s$.

Esercizio 6.1.5. Sia γ l'intersezione tra il piano $x = y$ e la sfera $x^2+y^2+z^2 = 4$. Sia $f\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \sqrt{2y^2 + z^2} \in \mathbb{R}$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma f \mathrm{d}s$. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $(1,1,\sqrt{2})$.

Esercizio 6.1.6. Sia γ una curva piana il cui supporto è

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 4\,,\ y \geq 0\,,\ y \leq x\right\}$$

e avente $(2,0)$ come punto iniziale. Sia $\mathbf{F}\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \left(xy, \frac{x^2}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$.

Esercizio 6.1.7. Calcolare la lunghezza della porzione di curva $y^3 - x^2 = 0$ contenuta nel cerchio centrato nell'origine e raggio $\sqrt{2}$.

Esercizio 6.1.8. Sia γ la frontiera dell'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x + y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\right\}\,.$$

Sia $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x + y^2 \in \mathbb{R}$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma f \mathrm{d}s$.

Esercizio 6.1.9. Sia γ l'unione dei tre seguenti segmenti in $\mathbb{R}^3$: γ_1 segmento parallelo all'asse x che congiunge i punti $(0,0,0)$ e $(2,0,0)$; γ_2 segmento parallelo all'asse y che congiunge i punti $(2,0,0)$ e $(2,2,0)$; γ_3 segmento parallelo all'asse z che congiunge i punti $(2,2,0)$ e $(2,2,1)$; Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x^2 + z, y, z^3 + x) \in \mathbb{R}^3$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$.

Esercizio 6.1.10. Calcolare le coordinate del baricentro di un filo a forma di circonferenza definito come il luogo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1, \; y \geq 0\}$, e avente densità lineare di massa costante $\delta(x, y) = 1$

Esercizio 6.1.11. Calcolare le coordinate del baricentro di una molla a forma di elica di equazione $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, con $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$ e densità lineare di massa $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Esercizio 6.1.12. Calcolare il momento di inerzia di:

1. circonferenza di equazione $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ e densità lineare costante δ, rispetto all'asse y.

2. elica di equazione $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, con $t \in [0, 4\pi]$, $a, b > 0$ e densità lineare di massa costante δ, rispetto all'asse z.

Esercizio 6.1.13. Studiare la curva parametrica di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi]$$

Esercizio 6.1.14. Studiare il luogo dei punti di equazione polare

$$r(\theta) = \sin(3\theta)\,; \; r^2(\theta) = \cos(2\theta)$$

Esercizio 6.1.15. Data la curva parametrica

$$\vec{r}(t) = t(2t^2 - 3t + 1)\vec{i} + \cos(2\pi t)\vec{j}$$

con $t \in [0, 1]$,

1. stabilire se è chiusa e/o regolare.

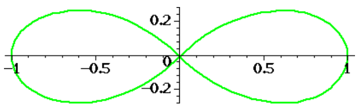
2. Trovare le equazioni parametriche della curva il cui sostegno è dato come intersezione delle superfici

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x + y \end{cases}$$

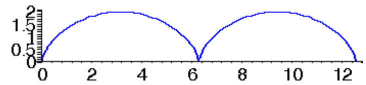
Esercizio 6.1.16. Trovare le equazioni parametriche della curva il cui sostegno è dato come intersezione delle superfici

$$\begin{cases} {}^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

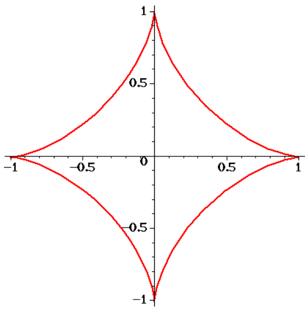
e dire se la curva è regolare/semplice/chiusa.



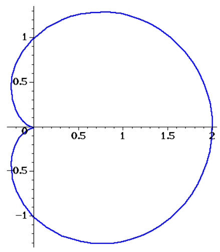
(a) Lemniscata $r^2 = \cos(2t)$



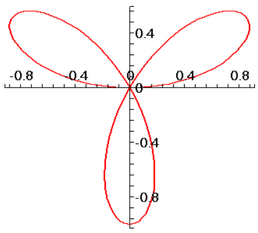
(b) Cicloide $x = t - \sin(t)$, $y = 1 - \cos(t)$



(c) Astroide $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$



(d) Cardioide $r = 1 + \cos(t)$



(e) $r = \sin(3t)$

Figura 6.3: Alcune curve famose

Esercizio 6.1.17. Calcolare la lunghezza della curva

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} + \ln(3\sin(t))\vec{k}$$

con $t \in [\pi/3, \pi/2]$.

Esercizio 6.1.18. Data la curva parametrica

$$\vec{r}(t) = \left(e^t \cos(t)\vec{i} + e^t \sin(t)\vec{j} + e^t\vec{k}\right)$$

$t \in (-\infty, +\infty)$ calcolare la lunghezza d'arco $L_o(t)$ di origine $\vec{r}(0) = (1, 0, 1)$. Riparametrizzare poi la curva mediante l'ascissa curvilinea $s = L_o(t)$.

Esercizio 6.1.19. Calcolare l'integrale di linea di prima specie

$$\int_\Gamma \frac{1-x}{y^2+z^2} \mathrm{d}\gamma$$

dove Γ è il cammino parametrizzato da

$$\vec{\gamma}(t) = \left(t^2, \cos(t), \sin(t)\right) \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Esercizio 6.1.20. Calcolare

$$\int_\Gamma \sqrt{2y^2 + z^2} \mathrm{d}\gamma$$

dove Γ è il cammino semplice con sostegno soluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$$

ed orientato in modo che la sua proiezione sul piano (z, x) sia percorsa in senso antiorario.

Esercizio 6.1.21. Determinare la retta tangente all'astroide

$$\vec{\gamma}(t) = \left((\cos(t))^3, (\sin(t))^3\right) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

nel punto $P = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$.

Esercizio 6.1.22. Calcolare

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2) \mathrm{d}\gamma$$

essendo Γ la curva in forma polare

$$\rho = e^{2\theta}, \qquad \theta \in (-\infty, 0]$$

Esercizio 6.1.23. Un filo omogeneo, di densità lineare ρ, è disposto lungo la curva di equazione

$$\vec{r}(t) = a(\cos(t) + \sin(t))\vec{i} + a(\sin(t) - \cos(t))\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z.

Esercizio 6.1.24. Calcolare il lavoro del campo $\vec{F} = y\vec{i} + x^2\vec{j}$ lungo la frontiera ∂S dell'insieme

$$S = \left\{(x, y) \colon x^2 - 1 \le y \le \sqrt{1 - x^2}, \quad y \le x + 1\right\}$$

Esercizio 6.1.25. Calcolare il lavoro del campo $\vec{F} = \cos x\vec{i} - y\vec{j}$ lungo la curva $y = \sin x$ per $x \in [0, \pi]$.

Esercizio 6.1.26. Sia dato il campo di forze

$$\vec{F}(x, y) = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$$

Dimostrare che il lavoro da esso compiuto su una particella in moto lungo la curva

$$\vec{\alpha}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$

dipende solo da $f(a),\ f(b),\ g(a),\ g(b)$.

Esercizio 6.1.27. Sia dato il campo di forze piano in coordinate polari

$$\vec{F}(r, \theta) = -4\sin(\theta)\vec{i} + 4\sin(\theta)\vec{j}$$

Si calcoli il lavoro che esso compie quando una particella si muove dal punto $(1, 0)$ all'origine lungo la spirale di equazione polare $r = e^{-\theta}$.

7

Integrali doppi e tripli, teorema della divergenza

7.1. Esercizi svolti e/o proposti

Esercizio 7.1.1. Nei seguenti integrali si scambi l'ordine di integrazione. Disegnare il dominio di integrazione.

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx; \quad \int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x}}^{1-x} f(x,y)\,dy\right)dx;$$
$$\int_{1/2}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Esercizio 7.1.2. Calcolare i seguenti integrali doppi $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ usando le formule di riduzione

$$\begin{aligned}
&D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ |y|\le x^2\} && f(x,y)=xe^y;\\
&D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|\ge 1,\ |y|\ge 1,\ x^2+y^2\le 2\} && f(x,y)=x;\\
&D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ge 0,\ 1\le x^2+y^2\le 4\} && f(x,y)=x^2+y;\\
&D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le y\le 1\} && f(x,y)=x^2y;\\
&D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\ge x^2,\ x\ge y^2\} && f(x,y)=xy^3;
\end{aligned}$$

Esercizio 7.1.3. Calcolare i seguenti integrali doppi $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ usando le formule di riduzione. Disegnare il dominio di integrazione.

$$\begin{aligned}
&D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2/2\le y\le x^2,\ 1<x<2\} && f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2};\\
&D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2\le y\le 2,\ x\ge 1/2\} && f(x,y)=|\ln(xy)|;
\end{aligned}$$

Esercizio 7.1.4. Calcolare le coordinate del baricentro di una lamina D di densità superficiale $\rho(x,y) = \sqrt{9+x^2} + 2y + 1$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1/2,\ 0 \le y \le 1\}$.

Esercizio 7.1.5. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse x di un corpo D di densità superficiale $\rho(x,y) = \sqrt{81-y^2} + x$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3/2\}$.

Esercizio 7.1.6. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z di un corpo D di densità superficiale ρ costante, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3/2\}$.

Esercizio 7.1.7. Calcolare la massa di un corpo D di densità superficiale $\rho(x,y) = \sqrt{1+x^4}$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

Esercizio 7.1.8. Sia $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \le y \le 2x^2,\ 1 \le xy \le 4\big\}$. Disegnare D, calcolare l'Area di D e $\displaystyle\iint_F x^3y^2 dxdy$

Esercizio 7.1.9. Sia D la regione di piano limitata dalle circonferenze $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$, dalla bisettrice del primo e terzo quadrante e dall'asse delle ascisse. Disegnare D e calcolarne l'Area.

Esercizio 7.1.10. Disegnare la regione $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2+y^2} \le 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$ e calcolarne l'Area. Determinarne il baricentro.

Esercizio 7.1.11. Disegnare il solido che si ottiene ruotando di 2π radianti il cerchio $\begin{cases} (x-2)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ attorno all'asse z e calcolarne il Volume.

Esercizio 7.1.12. Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ limitato dalle rette $y=x$, $y=2x$, $y+x=2$, $y+2x=2$. Disegnare E. Calcolare l'Area di E e $\displaystyle\iint_E xy^2 dxdy$.

Esercizio 7.1.13. Sia $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le ye^{-x} \le 2\,,\ 3 \le ye^{x} \le 5\big\}$. Calcolare l'Area di D e $\displaystyle\iint_D xydxdy$.

Esercizio 7.1.14.

1. Calcolare $\displaystyle\iint_C xydxdy$ dove C è il semicerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 contenuto nel semipiano delle ordinate positive. Calcolarlo sia usando le coordinate polari centrate nell'origine che quelle centrate in $(1,0)$.

2. Calcolare $\displaystyle\iint_C (1+x^2+y^2)dxdy$.

Esercizio 7.1.15. Calcolare l'Area della regione di piano racchiusa dall'ellisse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Calcolare $\iint_D \exp\left(9x^2+16y^2\right)dxdy$.

Esercizio 7.1.16. Sia E il tetradero di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$. Disegnare E e calcolare $\iiint_E (y+\sin z)dxdydz$.

Esercizio 7.1.17. Sia E il tetradero di vertici $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(0,0,1)$. Disegnare E e calcolare $\iiint_E (xy+\sin(\pi z))dxdydz$.

Esercizio 7.1.18. Sia $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 2\,,\ 0\le z\le 6-x^2-y^2\right\}$. Disegnare E e calcolare $\iiint_E x\ln(1+y)\,dxdydz$.

Esercizio 7.1.19. Sia E l'intersezione tra la palla di raggio 1 centrata nell'origine e il cono $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon z\ge 0\,,\ 3(x^2+y^2)\le z^2\right\}$. Disegnare E e calcolare $\iiint_E y^2zdxdydz$.

Esercizio 7.1.20. Sia $=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon z\ge 0\,,\ x^2+y^2+1\le z^2\le 4\right\}$. Disegnare E e calcolare $\iiint_E y^2zdxdydz$.

Esercizio 7.1.21. Sia $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 0\le x\le 2\,,\ 0\le y\le x\,,\ 0\le z\le xy\right\}$. Sia $f\colon(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\to y^2z\in\mathbb{R}$. Calcolare $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$.

Esercizio 7.1.22. Esprimere $\int\int\int_B f(x,y,z)dx\,dy\,dz$ per mezzo di integrali ripetuti di una variabile, dove $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 36,\ z>-1\}$ ed $f\in C(B,\mathbb{R})$, senza usare cambiamenti di variabile.

Esercizio 7.1.23. Calcolare i seguenti integrali tripli $\int\int\int_B f(x,y)dx\,dy\,dz$ usando le formule di riduzione

1. $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z>x^2+y^2,\ x+y+z<1\}$, $f(x,y)=1$;
2. $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z^2>x^2+y^2,\ 2z<-x+3,\ z>1\}$, $f(x,y)=1$;

Esercizio 7.1.24. Usando opportuni cambiamenti di coordinate, si calcoli

1. $$\iiint_E \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}},$$
   dove $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+4z^2\le 4\}$;
2. $$\iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$
   dove $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ z^2-x^2-y^2\le 0,\ z\ge 0\}$;

Esercizio 7.1.25. Calcolare le coordinate del baricentro di una calotta sferica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \; z \geq \sqrt{R^2 - r^2}\}$ riempita di materiale omogeneo (n.b. il raggio della sfera è R quello della calotta è r). (sugg. Usare coordinate cilindriche).

Esercizio 7.1.26. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z di un corpo S di densità costante 1, dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \; x \geq 0, \, y \geq 0, \, z \geq 0\}$;

8

Superfici, integrali di superficie, teorema di Stokes

8.1. Esercizi svolti e/o proposti

Esercizio 8.1.1. Verficare che le seguenti applicazioni definiscono delle superfici parametrizzate regolari e calcolarne il piano tangente ed il versore normale nel punto a fianco indicato

$$\varphi\colon (u,v) \in [0,4] \times [0,4] \to \begin{cases} x(u,v) = u+v \\ y(u,v) = u-2v \\ z(u,v) = u^2+4v^2 \end{cases} \qquad \varphi(1,2)$$

$$\varphi\colon (u,v) \in K \to \begin{cases} x(u,v) = u^2 \\ y(u,v) = v^2 \\ z(u,v) = uv \end{cases} \qquad \varphi\,(1,1)$$

dove K Ã¨ la parte cerchio centrato nell'origine di raggio 3, contenuta nel primo e secondo quadrante.

$$\varphi\colon (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \begin{cases} x(u,v) = (2+\cos(u))\cos(v) \\ y(u,v) = (2+\cos(u))\sin(v) \\ z(u,v) = \sin(u) \end{cases} \qquad \varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$$

Esercizio 8.1.2. Calcolare l'Area di ciascuna delle superfici dell'esercizio precedente.

Esercizio 8.1.3. Sia $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2-x^2-y^2\right\}$. Disegnare T e calcolare l'Area della frontiera di T.

Esercizio 8.1.4. Calcolare l'Area della superficie generata dalla rotazione della cicloide $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ attorno all'asse x di un angolo giro.

Esercizio 8.1.5. Calcolare $\displaystyle\int_\Sigma z d\sigma$ dove Σ Ã¨ la porzione di superficie $z = xy$ che si proietta in $T \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le x\sqrt{3}\,,\ x^2 + y^2 \le 1\}$

Esercizio 8.1.6. Sia $\mathbf{F} \colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (y, x, 0) \in \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. Sia Σ Ã¨ la porzione di superficie $z = xy$ che si proietta in $T \equiv \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x \le \sqrt{2 - y^2}\right\}$. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Esercizio 8.1.7. Sia $\mathbf{F} \colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + y, z - y, x^3 y) \in \mathbb{R}^3$. Calcolare il flusso di $rot\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\,,\ x^2 + y^2 = 4\}$$

dove il versore normale $\mathbf{n}$ è orientato verso l'alto.

Esercizio 8.1.8. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} \colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (z, x^2 y, y^2 z) \in \mathbb{R}^3$ uscente dalla superficie del solido

$$D \equiv \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1 + x^2 + y^2\right\}\ .$$

Esercizio 8.1.9. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} \colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x^3, y^3, z) \in \mathbb{R}^3$ uscente dalla sfera centrata nell'origine e di raggio 3.

Esercizio 8.1.10. Sia Σ la porzione della superficie sferica centrata in $(0, 0, 1)$ contenuta nel semispazio $z \ge 0$. Sia $\mathbf{n}$ il versore normale a Σ che punta verso l'esterno della sfera. Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}(x, y, z) = (y\cos(xz), x^2, \exp(yz))$. Calcolare $\iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\,,\ \mathbf{n}\rangle$

Esercizio 8.1.11. Sia γ l'intersezione tra le superfici cilindriche $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 9$. Provare che γ è una curva semplice e chiusa e calcolare $\int_\gamma y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$.

9
Disuguaglianza di Chebyshev

9.1. Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema 9.1.1. *Sia* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *un campione relativo ad un carattere numerico, con media* $\overline{x}$ *e varianza* $\sigma^2 > 0$*. Per* $k \geq 1$ *sia*

$$S_k := \{x_i, i = 1, \dots, n \colon |x_i - \overline{x}| < k\sigma\}\,.$$

Allora $\dfrac{\#S_k}{n} \geq 1 - \dfrac{1}{k^2}$.

Dimostrazione. Dalla definizione di varianza abbiamo

$$\begin{aligned} n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(xi - \overline{x})^2 = \sum_{i \colon x_i \in S_k}(xi - \overline{x})^2 + \sum_{i \colon x_i \notin S_k}(xi - \overline{x})^2 \geq \\ \geq \sum_{i \colon x_i \notin S_k}(xi - \overline{x})^2 \geq \sum_{i \colon x_i \notin S_k}(k\sigma)^2 = (n - \#S_k)k^2\sigma^2. \end{aligned}$$

Dividendo per $n\sigma^2 k^2$ otteniamo

$$\frac{1}{k^2} \geq 1 - \frac{\#S_k}{n}$$

da cui la tesi. $\square$

10
Probabilità: esercizi vari

10.1. Combinatorica e probabilità uniforme

Esercizio 10.1.1. Si lancia una moneta non truccata per n volte e, ogni volta, si guarda se esce testa o croce. Quanti sono i possibili risultati dopo n lanci?

Esercizio 10.1.2. Un lucchetto ha una combinazione di 4 cifre, da 0 a 9. Quante sono le possibili combinazioni del lucchetto? Se imponiamo che ogni cifra debba essere strettamente maggiore della precedente, quante combinazioni possibili ci sono nel lucchetto?

Esercizio 10.1.3. Giochiamo a poker con un mazzo da 28 carte.

1. Quanto vale la probabilità di ricevere un poker d'assi servito? E di ricevere un poker qualsiasi?
2. È più probabile ricevere un poker, un full o un colore?
3. Quanto vale la probabilità di ricevere un poker d'assi ed una picche (oltre l'asso)?
4. Rispondere ai quesiti dei punti precedenti supponendo di giocare con un mazzo da 52 carte.

Esercizio 10.1.4. Quanti sono i possibili anagrammi della parola `matematica`? E della parola `ingegneria`?

Esercizio 10.1.5. $2n$ persone si devono dividere in 2 squadre, di n persone ciascuna. In quanti modi è possibile farlo?

Esercizio 10.1.6. Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?

Esercizio 10.1.7. L'alfabeto marziano è composto da 999 caratteri. La Commissione per le Comunicazioni Intergalattiche ha deciso che tale alfabeto deve essere ridotto a 256 caratteri. Quanti alfabeti sono possibili?

Ooops! Dopo il ricorso del popolo marziano al TAI (Tribunale Amministrativo Intergalattico), alla commissione viene imposto di conservare 99 caratteri del vecchio alfabeto che vengono ritenuti essenziali. Quanti alfabeti di complessivi 256 caratteri sono ora possibili? Quanto vale la probabilità che un alfabeto creato a caso senza vincolo, in realtà lo rispetti?

Esercizio 10.1.8. La SST (Società Spaziale per le Telecomunicazioni) gestisce le comunicazioni tra i diversi pianeti. Affinché il sistema di comunicazione interplanetaria funzioni, è necessario assegnare un codice binario di n cifre a ciascun pianeta. Se la SST gestisce k pianeti, di quanti caratteri binari devono essere composti questi codici?

Esercizio 10.1.9. Al telefono componiamo 6 cifre a caso. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

1. le 6 cifre sono tutte diverse,
2. il prodotto delle 6 cifre è un numero divisibile per 2,
3. il prodotto delle 6 cifre è un numero divisibile per 3,
4. il prodotto delle 6 cifre è un numero divisibile per 6,
5. le 6 cifre sono in ordine strettamente crescente.

10.2. Probabilità condizionata e indipendenza

Esercizio 10.2.1. Siano A, B, C una terna di eventi indipendenti in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dimostrare che A e $B \cup C$ sono indipendenti.

Esercizio 10.2.2. Una moneta, forse truccata (esce testa con probabilità p) viene lanciata 100 volte. Determinare le probabilità dei seguenti eventi:

1. al decimo lancio esce testa,
2. al decimo lancio esce testa e al primo lancio esce croce,
3. escono esattamente 8 teste,
4. escono almeno 8 teste,
5. esce croce a tutti i tiri pari,
6. esce croce in almeno un tiro pari,
7. la prima croce esce al k–esimo lancio.

Esercizio 10.2.3. Un'urna contiene una palla bianca, una palla rossa e una palla nera. Si compiono n estrazioni di una palla alla volta, reinserendo, dopo ciascuna estrazione, la palla nell'urna. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

1. estraggo sempre la palla bianca,
2. estraggo sempre la stessa palla,
3. non estraggo mai la palla rossa,
4. estraggo ciascuna palla almeno una volta.

Esercizio 10.2.4. Un'urna contiene una palla bianca, 2 palle rosse e 3 palle nere. Si compiono n estrazioni di una palla alla volta, reinserendo, dopo ciascuna estrazione, la palla nell'urna. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

1. estraggo sempre palle nere,
2. estraggo sempre palle dello stesso colore,

3. non estraggo mai la palla bianca,
4. estraggo palle di tutti e tre i colori.

10.3. Variabili aleatorie discrete

Esercizio 10.3.1. Lanciamo due dadi non truccati. Dopo aver definito uno spazio di probabilità opportuno, dire quali sono i possibili valori che le seguenti v.a. possono assumere:
X_1 il punteggio minimo tra i due punteggi,
X_2 il punteggio minimo tra i due punteggi,
X_3 la somma dei due punteggi,
X_4 la differenza tra il punteggio massimo ed il punteggio minimo.
Per ciascuna delle precedenti v.a. scrivere la densità discreta e la funzione di ripartizione. Tracciare i grafici delle funzioni di ripartizione.

Esercizio 10.3.2. Lancio una moneta n volte. Supponiamo che ogni lancio sia indipendente e che ad ogni lancio la probabilità che esca testa sia p. Sia X la v.a. che descrive la differenza tra il numero di teste ed il numero di croci che si ottengono negli n lanci.
1. introdurre un opportuno spazio di probabilità e scrivere X,
2. chi è l'insieme immagine di X?
3. a partire dalla densità binomiale di parametri n e p, $B(n, p)$, calcolare la densità di X.

Esercizio 10.3.3. Sia X una v.a. di Poisson di parametro λ. Calcolare $P(X \text{ è pari})$ e $P(X \text{ è dispari})$.

Esercizio 10.3.4. 1. Per ogni fissato λ parametro reale positivo studiare l'andamento della successione

$$p\colon k \in \mathbb{N} \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \in \mathbb{R}.$$

È monotona? Ammette massimo? Ammette minimo?
2. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, studiare l'andamento della funzione

$$f\colon \lambda \in (0, +\infty) \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \in \mathbb{R}.$$

È monotona? Ammette massimo? Ammette minimo?

Esercizio 10.3.5. Supponiamo che il numero di incidenti giornalieri che avvengono ogni giorno sul tratto di autostrada Firenze–Bologna si distribuisca come una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 4$.
1. Qual è la probabilità che oggi accadano 3 incidenti?
2. Qual è la probabilità che oggi accadano almeno 3 incidenti?

3. Qual è la probabilità che oggi accadano almeno 3 incidenti, sapendo che ce n'è sicuramente uno?
4. Qual è la probabilità che accadono 3 incidenti, sapendo che non ne possono accadere più di 10?

Esercizio 10.3.6. Siano X e Y v.a. indipendenti. Supponiamo che X abbia densità $B(n,p)$ e che Y abbia densità $B(k,p)$. Calcolare $p_{X|X+Y}(\cdot,j)$, $j = 0,1,\dots,k$.

Esercizio 10.3.7. Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. indipendenti, tutte di densità $B(1,p)$. Sia $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Calcolare $p_{X_i|Y}(\cdot,j)$, $j = 0,1,\dots,n$.

Esercizio 10.3.8. Lanciamo una moneta in cui esce testa con probabilità p. È più probabile ottenere almeno una testa in due lanci o almeno due teste in quattro lanci?

Esercizio 10.3.9. Sia

$$p\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{c}{x+1} & x = 0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare c in modo che p sia una densità. Sia X una v.a. avente p come propria densità. Calcolare $P(X < 2)$, $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$.

Esercizio 10.3.10. Sia

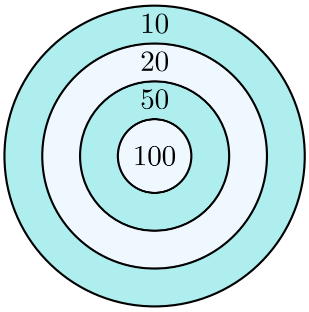
$$p\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{c}{x+2y} & x,\ y = 1,2,3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare c in modo che p sia una densità. Sia (X,Y) una v.a. avente p come propria densità. Calcolare $P(X^2 + Y^2 < 6)$, calcolare le densità marginali di (X,Y). Calcolare $P(X = 3|Y > 1)$.

Esercizio 10.3.11. In una scatola di 10 gomitoli di lana, ce ne sono 6 bianchi e 4 colorati. Si estraggono i gomitoli dalla scatola uno alla volta, senza reiscatolarli. Qual è la probabilità di estrarre il primo gomitolo colorato all'i–esimo tentativo? A quale tentativo devo aspettarmi di estrarre il primo gomitolo colorato? Con quale varianza?

Esercizio 10.3.12. Il sistema antiincendio di un supermercato è costituito da sei sensori. L'assicurazione copre eventuali danni causati da un incendio se almeno quattro dei sei sensori funzionano. Supponiamo che ogni sensore funzioni, indipendentemente dagli altri, con probabilità dell'80%. Con quale probabilità siamo coperti dall'assicurazione? Quanti sensori ci aspettiamo che funzionino?

Esercizio 10.3.13. Si consideri il seguente bersaglio:



Tiro una freccia contro il bersaglio e ottengo un certo punteggio a seconda della zona colpita, come indicato in figura. Supponendo di non mancare il bersaglio, qual è il punteggio medio atteso? La varianza dei punteggi?

10.4. Variabili aleatorie continue

Esercizio 10.4.1. Una v.a. continua X ha densità

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto c\,|x|\exp^{-ax^2} \in \mathbb{R}$$

dove a è un parametro reale positivo. Determinare il valore di c in funzione di a. Calcolare la speranza matematica e la varianza di X.

Esercizio 10.4.2. Sia X una v.a. continua di densità

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto c(1+x^2)^{-1} \in \mathbb{R}$$

Determinare il valore di c. Calcolare la funzione di ripartizioneF_X. Calcolare la densità di $Y := X^{-1}$. Calcolare speranza e varianza di X e Y.

Esercizio 10.4.3. Siano α e λ parametri reali positivi. Mostrare che la funzione $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} c\,x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

è densità di una v.a. continua X se e solo se

$$c = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{dove} \quad \Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Provare che per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha $\Gamma(n) = (n-1)!$

Esercizio 10.4.4. Sia X una variabile aleatoria di densità continua f. Per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, scrivere la funzione di ripartizione e la densità della v.a. $Y := X^k$.

Esercizio 10.4.5. Sia X una v.a. continua non negativa di densità f e funzione di ripartizione F. Dimostrare che

$$E[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\mathrm{d}x$$

e che

$$E[X^k] = \int_0^{+\infty} kx^{k-1}(1 - F(x))\mathrm{d}x$$

Esercizio 10.4.6. Sia X una v.a. che assume valori solo nell'intervallo $[0, a]$ e di densità f. Mostrare ch $\mathrm{Var}(X) \le \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Esercizio 10.4.7. Il quantile $q_{\frac{1}{2}}$ (se è definito) di una v.a. X si dice *mediana* di X. I quantili $q_{\frac{1}{4}}$ e $q_{\frac{3}{4}}$ (se sono definiti) di una v.a. X si dicono *quartili* di X. Calcolare mediana e quartili delle seguenti v.a.

1. X v.a. uniformemente distribuita su un intervallo (a, b);
2. X v.a. normale di parametri μ e σ^2;
3. X v.a. esponenziale di parametro λ.

Esercizio 10.4.8. Un *valore modale* di una v.a. continua X con densità $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ è un punto di massimo di f. Calcolare i valori modali delle seguenti v.a.

1. X v.a. uniformemente distribuita su un intervallo (a, b);
2. X v.a. normale di parametri μ e σ^2;
3. X v.a. esponenziale di parametro λ.

Esercizio 10.4.9. La *funzione di rischio* di una v.a. continua X con densità $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ è definita come

$$\lambda(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{1 - F_X(x)} & F_X(x) < 1 \\ 0 & F_X(x) = 1. \end{cases}$$

1. Calcolare la funzione di ripartizione e la densità in funzione della sola funzione di rischio

2. Calcolare la funzione di rischio delle seguenti v.a.

   a) X v.a. uniformemente distribuita su un intervallo (a, b);

   b) X v.a. normale di parametri μ e σ^2;

   c) X v.a. esponenziale di parametro λ.

Esercizio 10.4.10. Sia (X, Y) una v.a. bidimensionale la cui densità congiunta è la distribuzione uniforme sul triangolo di vertici $(0, 0)$ $(a, 0)$, $(0, a)$, a parametro reale positivo. Calcolare le densità marginali.

Esercizio 10.4.11. Al variare di $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ determinare il valore della costante C per cui la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che vale $Cy^2 \mathrm{e}^{-x}$ se il punto (x, y) appartiene all'angolo convesso determinato dalle due semirette che formano angoli α e $-\alpha$ con la direzione positiva dell'asse dell'ascisse e che vale 0 altrimenti, sia densità congiunta di una v.a. (X, Y). Calcolare poi le densità marginali di tale v.a.

Parte II

Prove scritte di Analisi Matematica II assegnate durante gli a.a. precedenti

1
a.a. 2002-03

1.1. Recupero Prima Prova Intercorso - Primo appello

Esercizio 1.1.1. Scrivere la Formula di Taylor al secondo ordine con il resto di Peano con centro in $P \equiv (4,2)$ per la funzione

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

Esercizio 1.1.2. Disegnare sul piano complesso l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$z|z| = -\overline{z}^2$$

1.2. Recupero Seconda Prova Intercorso - Primo appello

Esercizio 1.2.1. Siano $O = (0,0)$, $C = (2,4)$ e $A = (4,4)$. Sia γ la curva composta dall'arco di parabola OC $y = x^2$ e dal segmento CA, percorsa da O verso A. Sia $\mathbf{F}\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (F_1, F_2) = (y, -x^2)$. Calcolare $\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy$.

Esercizio 1.2.2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x - x^2 \\ x(0) = -1 \end{cases} \tag{1.1}$$

indicando chiaramente il dominio della soluzione.

1.3. Recupero Terza Prova Intercorso - Primo appello

Esercizio 1.3.1. Calcolare l'Area della porzione di sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, compresa tra i piani $z = 2$ e $z = 4$.

Esercizio 1.3.2. Disegnare la regione

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x}\,, \quad x \leq y \leq 2x \right\}$$

e calcolarne l'Area.

1.4. Compito A - Primo appello

Esercizio 1.4.1. Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ e sia $u(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
Verificare che se u soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.2}$$

allora f soddisfa l'equazione differenziale

$$(t^2 + 1)f^{''}(t) + 2tf^{'}(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Di che tipo di equazione si tratta? Cosa possiamo dire dell'insieme delle soluzioni?
Dopo aver posto $g(t) = f^{'}(t)$, trovare l'insieme delle soluzioni di (1.3) e di (1.2) della forma assegnata.

Esercizio 1.4.2. Disegnare il dominio e le linee di livello della funzione

$$f(x, y) = \arcsin(x^2 y)$$

Studiare la natura dei punti critici di f.

Esercizio 1.4.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre le nozioni di curva parametrica regolare e di curva regolare. Spiegare il significato della lunghezza di una curva.

2. Si definisca la nozione di dominio regolare del piano e si enunci il teorema della divergenza per i domini piani.

1.5. Compito B - Primo appello

Esercizio 1.5.1. Studiare il fenomeno dei battimenti per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + 4x = 12\cos(4t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Esercizio 1.5.2. Sia S il toro di equazione parametrica

$$\psi\colon (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \begin{cases} x = (2+\cos u)\cos v \\ y = (2+\cos u)\sin v \\ z = \sin u \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \qquad (1.5)$$

Sia γ la curva

$$\gamma\colon t \in [0,2\pi] \to (t,2t) \in \mathbb{R}^2 \qquad (1.6)$$

Si consideri la curva $\psi \circ \gamma\colon t \in [0,2\pi] \to \psi \circ \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$. È semplice? È chiusa? Calcolare la retta tangente a $\psi \circ \gamma$ in $t = \dfrac{\pi}{6}$ ed esplicitare la lunghezza della curva

Esercizio 1.5.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la notazione trigonometrica per i numeri complessi ed enunciare la formula di de Moivre.

2. Si definisca la nozione di dominio regolare del piano e si enunci il teorema della divergenza per i domini piani.

1.6. Compito C - Primo appello

Esercizio 1.6.1. Determinare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = xy$$

nel dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$$

Esercizio 1.6.2. Disegnare la regione esterna alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ ed interna alla cardioide di equazione polare $r = 2(1+\cos\varphi)$. Calcolarne l'Area.

Esercizio 1.6.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la notazione trigonometrica per i numeri complessi ed enunciare la formula di de Moivre.

2. Introdurre la nozione di curva parametrica regolare e di lunghezza di una curva parametrica regolare. Spiegare il significato della lunghezza.

1.7. Recupero Seconda Prova Intercorso - Secondo appello

Esercizio 1.7.1. Sia $\varphi\colon t \in [-2,2] \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrica di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^3 \qquad t \in [-2,2] \\ z(t) = t^6 \end{cases}$$

Calcolare la retta tangente alla curva in $t = 1$ ed esplicitare la lunghezza della curva.

Esercizio 1.7.2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - x' = e^t \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0\,. \end{cases} \tag{1.7}$$

1.8. Recupero Terza Prova Intercorso - Secondo appello

Esercizio 1.8.1. Determinare la posizione del baricentro di una lamina che occupa la regione $\rho \leq 2(1 + \cos\theta)$ e la cui densità è $d(\rho,\theta) = \rho$.

Esercizio 1.8.2. Calcolare l'Area della porzione di cilindro $x^2 + z^2 = 16$ contenuta nella regione delimitata dal cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

1.9. Compito A - Secondo appello

Esercizio 1.9.1. Disegnare sul piano Oxy l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\right\}\ .$$

Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = xy$ sull'insieme D e calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$.
Perché posso affermare a priori che f ammette massimo e minimo in D?

Esercizio 1.9.2. Tracciare sul piano complesso l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$z - z^2 + z\,|z|\,e^{\frac{\pi i}{3}} - |z|\,e^{\frac{\pi i}{3}} = 0$$

Esercizio 1.9.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare il teorema di Cauchy e spiegare il fenomeno del pennello di Peano per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di massimo relativo.

1.10. Compito B - Secondo appello

Esercizio 1.10.1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = e^x \ln t \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

indicando bene il dominio della soluzione.

Esercizio 1.10.2. Calcolare il massimo ed il minimo di $f(x,y) = x^4 - y^4 + x^2y^2$ nel cerchio di raggio 1 centrato nell'origine.

Esercizio 1.10.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione f di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali proprietà devono essere soddisfatte da f per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.
2. Introdurre la nozione di integrale doppio su un dominio normale ed enunciare il teorema che permette la riduzione dell'integrale doppio ad un integrale iterato.

1.11. Compito C - Secondo appello

Esercizio 1.11.1. Disegnare

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{2x^2} \le y \le \frac{1}{x^2},\ 2x^2 \le y \le 3x^2,\ x \ge 0\right\}$$

e calcolare

$$\iint_D \frac{x^2}{y} dxdy\,.$$

Esercizio 1.11.2. Tracciare sul piano Oxy il dominio D della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{3 - |x-3| - |y-3|}$$

È chiuso? è aperto? è limitato? è connesso? Calcolare il minimo su D della funzione

$$d(x,y) = \sqrt{\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2}$$

In quale punto è assunto?

Esercizio 1.11.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare il teorema di Schwarz per le funzioni di due variabili reali;

2. Introdurre il concetto di superficie parametrica regolare e enunciare il teorema di Guldino per le superfici di rotazione.

1.12. Compito A - Terzo appello

Esercizio 1.12.1. Trovare la soluzione $u(x,t)$ dell'equazione differenziale

$$2u_{xx} - u_t = 0$$

della forma $u(x,t) = f(x)g(t)$ con f e g di classe $C^2(\mathbb{R})$ e tale che

$$u(x,0) = \sin(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Su ogni retta $t = t_0$, $t_0 > 0$, determinare, se esiste, il massimo di $u(x,t_0)$.

Esercizio 1.12.2. Si consideri la superficie parametrica

$$\varphi\colon [-1,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(u,v) = \sqrt{u^2+1}\cosh v \\ y(u,v) = \sqrt{u^2+1}\sinh v \\ z(u,v) = u \end{cases}$$

Verificare che la superficie è regolare e che il suo sostegno è una porzione dell'iperboloide

$$x^2 - y^2 = z^2 + 1\,.$$

Disegnare l'iperboloide. Esplicitare l'Area della superficie φ. Calcolare tale Area (può essere utile ricordare la formula $\cosh^2 v + \sinh^2 v = \cosh(2v)$).

Esercizio 1.12.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare il teorema di Cauchy e spiegare il fenomeno del pennello di Peano per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2. Si definisca la nozione di dominio regolare del piano e si enunci il teorema della divergenza per i domini piani.

1.13. Compito B - Terzo appello

Esercizio 1.13.1. Disegnare sul piano complesso l'insieme delle soluzioni della seguente equazione

$$z^2 = -|z|\,\overline{z}$$

Esercizio 1.13.2. Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2(y^2-4) \\ y(0) = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = x^2(y^2-4) \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

indicando, in entrambi i casi, il dominio della soluzione.

Esercizio 1.13.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di curva regolare parametrica, di lunghezza di una tale curva e significato geometrico della lunghezza.
2. Principio di sovrapposizione per equazioni differenziali lineari.

1.14. Compito C - Terzo appello

Esercizio 1.14.1. Studiare il fenomeno della risonanza per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = 12\cos(3t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 1.14.2. Sia

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| \le 4\right\}$$

e sia

$$f(x,y) = y - \frac{x^2}{4}\,.$$

Disegnare D. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti e relativi di f su D ed i punti in cui tali estremi sono assunti.
Calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$.

Esercizio 1.14.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di equazione differenziale in forma normale ed enunciato del teorema di Cauchy.
2. Teorema per il cambiamento di variabile negli integrali doppi.

1.15. Compito A - Quarto appello

Esercizio 1.15.1. Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy, indicando, in entrambi i casi, il dominio della soluzione.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-4}{y} \\ y(0) = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{y^2-4}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Esercizio 1.15.2. Si consideri la curva in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\varphi\colon t \in [0, 2\pi] \to \begin{cases} x = \sin(t)\cos(2t) \\ y = \cos(t) \\ z = \sin(t)\sin(2t)\,. \end{cases}$$

È regolare? È semplice? È chiusa? Verificare che il suo sostegno è contenuto sulla sfera centrata nell'origine e di raggio 1.
Trovare i punti $\varphi(t)$ sul sostegno della curva per cui la retta tangente alla curva in $\varphi(t)$ è contenuta in un piano parallelo al piano coordinato $z = 0$.

Esercizio 1.15.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare il teorema di Cauchy e spiegare il fenomeno del pennello di Peano per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

1.16. Compito C - Quarto appello

Esercizio 1.16.1. Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy, indicando, in entrambi i casi, il dominio della soluzione.

$$\begin{cases} y' = y^2 - 16 \\ y(0) = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^2 - 16 \\ y(0) = -8 \end{cases}$$

Esercizio 1.16.2. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z-1)^5 = 32$$

e disegnare sul piano complesso l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 1.16.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare la definizione di superficie parametrica regolare

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sia un punto di massimo relativo.

1.17. Compito B - Quinto appello

Esercizio 1.17.1. Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy, indicando, in entrambi i casi, il dominio della soluzione.

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2y \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^2 - 2y \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Esercizio 1.17.2. Sia D il dominio contenuto nel primo quadrante delimitato dalla curva di equazione polare $r = \sin(2\varphi)$. Disegnare la curva e calcolare $\displaystyle\int_{\partial D^+} x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y$.

Esercizio 1.17.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione f di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali proprietà devono essere soddisfatte da f per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.

2. Introdurre la nozione di curva parametrica regolare e di lunghezza di una curva parametrica regolare. Spiegare il significato della lunghezza.

1.18. Compito C - Quinto appello

Esercizio 1.18.1. Calcolare il Volume della regione di spazio contenuta all'interno della sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

e del cilindro

$$x^2 + y^2 = 1$$

Esercizio 1.18.2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

Quale relazione devono soddisfare y_0 e v_0 affinchè

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \ ?$$

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = x\exp(-2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 1.18.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la notazione trigonometrica per i numeri complessi ed enunciare la formula di de Moivre.

2. Introdurre la nozione di curva parametrica regolare e di lunghezza di una curva parametrica regolare. Spiegare il significato della lunghezza.

1.19. Compito B - Sesto appello

Esercizio 1.19.1. Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando il dominio della soluzione.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+y^2}{y(1+x^2)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Esercizio 1.19.2. Sia

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{3(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{1+x^2+y^2}\right\} .$$

Disegnare la proiezione di A sul piano Oxz. Identificare e disegnare gli insiemi

$$B_1 = \left\{(x,y,z)\colon z = \sqrt{3(x^2+y^2)}\right\} \quad B_2 = \left\{(x,y,z)\colon z = \sqrt{1+x^2+y^2}\right\}$$

Calcolare il Volume di A.

Esercizio 1.19.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione f di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali proprietà devono essere soddisfatte da f per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

1.20. Compito C - Sesto appello

Esercizio 1.20.1. Sia

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2},\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1 \right\}$$

Disegnare la proiezione di D sul piano Oxz. Disegnare e identificare l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

Calcolare $\displaystyle\iiint_D z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Esercizio 1.20.2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 5e^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Per quali valori del parametro reale β il limite $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{e^{\beta t}}$ esiste ed è finito? Per quali valori di β questo limite esiste e vale 0?

Esercizio 1.20.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare il teorema di Schwarz per le funzioni di due variabili reali;
2. Introdurre la nozione di curva parametrica regolare e di lunghezza di una curva parametrica regolare. Spiegare il significato della lunghezza.

1.21. Compito C - Settimo appello

Esercizio 1.21.1. Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando **chiaramente** il dominio della soluzione.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 + y^2}{y(x^2 - 1)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Esercizio 1.21.2. Disegnare sul piano complesso il luogo degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\dfrac{z + i}{z}$ è un numero reale.

Esercizio 1.21.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di curva regolare parametrica, di lunghezza di una tale curva e significato geometrico della lunghezza.
2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sia un punto di massimo relativo.

2

a.a. 2003-04

2.1. Compito A - Pre-appello

Esercizio 2.1.1. Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(k+1)!}$.

1. Determinare l'insieme di convergenza della serie.
2. Detto D tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Riconoscere la funzione f. *Suggerimento: porre* $y = -x^2$.
3. Determinare tutte e sole le soluzioni $y(x)$ della equazione differenziale
$$y' = -2y\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \tag{2.1}$$
4. Verificare che la funzione $f(x)$ è l'unica soluzione di (2.1) tale che $\lim_{x\to 0} y(x)$ esiste ed è finito.

Esercizio 2.1.2. Avendo riferito lo spazio ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, riconoscere e disegnare gli insiemi

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - 4y = 0\right\},$$
$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 = x^2 + y^2\right\}.$$

Disegnare la porzione di A contenuta nella regione

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 \le x^2 + y^2\right\}.$$

e calcolarne l'Area.

Esercizio 2.1.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

2. Si definisca la nozione di curva polare e si dica quale condizione deve essere soddisfatta affinchè una curva polare sia una curva parametrica regolare del piano.

2.2. Compito B - Pre-appello

Esercizio 2.2.1. Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{2n}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto D tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione f, si calcoli $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Esercizio 2.2.2. Si consideri la curva parametrica $\varphi\colon t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \varphi(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x(t) = \tan t \\ y(t) = \cos^2 t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] .$$

1. Verificare che si tratta di una curva parametrica regolare.

2. Sia ψ la curva cartesiana definita dalla funzione $f\colon x \in [0, \sqrt{3}] \to \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$. Mostrare che φ e ψ sono curve parametriche equivalenti.

Esercizio 2.2.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di superficie parametrica regolare.

2. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione f di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali proprietà devono essere soddisfatte da f per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.

2.3. Compito C - Pre-appello

Esercizio 2.3.1. Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto D tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione f, si calcoli $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Esercizio 2.3.2. Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando chiaramente il dominio della soluzione

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2.3.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di curva parametrica regolare.
2. Teorema per il cambiamento di variabile negli integrali doppi.

2.4. Compito A - Primo appello

Esercizio 2.4.1. Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

1. Determinare l'insieme di convergenza della serie.
2. Detto D tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Verificare che $f(0) = 0$ e che $f'(0) = 1$ e, usando la proprietà di derivazione per serie, verificare che f soddisfa l'equazione differenziale $y'' - y = 0$.
3. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$
4. Sia $g(x)$ la soluzione di tale problema. Perchè posso affermare che $f(x) = g(x) \quad \forall x \in D$?

Esercizio 2.4.2. Si considerino gli insiemi

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 = x^2 + y^2\right\} \qquad B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1 + x\right\}$$

Disegnare A. Identificare gli insiemi A e B. Si consideri la curva parametrica

$$\varphi \colon t \in [-2, 2] \to \varphi(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{2}, t, \frac{t^2 + 1}{2}\right) \in \mathbb{R}^3$$

Verificare che il supporto di φ è contenuto in $A \cap B$. Esplicitare la lunghezza di φ. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} \colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (y + z, z + x, x + y) \in \mathbb{R}^3$$

Verificare che il prodotto scalare tra il campo vettoriale e il vettore tangente alla curva, $\mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, è positivo in ogni punto della curva ed è crescente lungo la curva.

Esercizio 2.4.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare la definizione di superficie parametrica regolare
2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sia un punto di massimo relativo.

2.5. Compito B - Primo appello

Esercizio 2.5.1. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto D tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione f, si calcoli $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Esercizio 2.5.2. Risolvere i seguente problemi di Cauchy, indicando, in entrambi i casi, il dominio della soluzione

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4-y^2}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = x(4-y^2) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2.5.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare la definizione di superficie parametrica regolare
2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sia un punto di massimo relativo.

2.6. Compito C - Primo appello

Esercizio 2.6.1. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n}}{n}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto D tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione f, si calcoli $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Esercizio 2.6.2. Disegnare e riconoscere i due seguenti insiemi

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z - 10 = 0\right\}$$
$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x^2 + 2y^2 - z - 2 = 0\right\}$$

Calcolare il volume della regione finita dello spazio delimitata dai due insiemi.

Esercizio 2.6.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare la definizione di superficie parametrica regolare
2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di massimo relativo.

2.7. Compito B - Secondo appello

Esercizio 2.7.1. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n/2}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto D tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione f, si calcoli $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Esercizio 2.7.2. Si consideri l'insieme

$$A \equiv \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y = 0\right\}$$

Disegnare e identificare A.
Si consideri la curva $\gamma\colon t \in [-1, 1] \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t^2 \\ z = t - t^2 \end{cases}$$

Verificare che il supporto di γ è contenuto in A.
γ è una curva piana? Cioè esiste un piano che contiene il supporto di γ?
Esplicitare la lunghezza di γ. Calcolare la lunghezza di γ.
Si consideri la funzione

$$f\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 + z^2 - y^2 + xy \in \mathbb{R}\,.$$

Verificare che $(0, 0, 0)$ è un punto critico di f e determinarne la natura. Si consideri la funzione composta

$$g\colon t \in [-1, 1] \to f(\gamma(t)) \in \mathbb{R}\,.$$

Verificare che $\gamma(0) = (0, 0, 0)$. Perché posso affermare, senza fare alcun calcolo che $t = 0$ è un punto stazionario di g? Determinarne la natura,

Esercizio 2.7.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione f di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali proprietà devono essere soddisfatte da f per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.
2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

2.8. Compito C - Secondo appello

Esercizio 2.8.1. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)(2x)^n$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto D tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione f, si calcoli $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Esercizio 2.8.2. Si consideri la funzione

$$f\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 - y^2 + z^2 \in \mathbb{R}\,.$$

Siano L_0 ed L_1, rispettivamente, gli insiemi di livello 0 e di livello 1 della funzione f. Disegnare ed identificare i due insiemi.
Sia

$$A \equiv \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x, y, 0) \leq 1\,, |y| \leq 2\right\}\,.$$

Disegnare A. Si consideri la funzione

$$g\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x^4 - y^2 \in \mathbb{R}\,.$$

Determinare gli estremi assoluti di g in A. Scrivere sottoforma di integrale iterato l'integrale doppio $\iint_A g(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Esercizio 2.8.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione f di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali proprietà devono essere soddisfatte da f per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

2.9. Compito B - Terzo appello

Esercizio 2.9.1. Esibire 3 successioni positive $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, tali che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = 0$$

e, allo stesso tempo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \text{ diverge, mentre } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n} \text{ converge.}$$

Motivare la risposta.

Esercizio 2.9.2. Si considerino le funzioni

$$F\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2+y^2+z^2 \in \mathbb{R} \qquad G\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2+y^2-x \in \mathbb{R}$$

Disegnare e identificare gli insiemi

$$L_1 \equiv \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x,y,z)=1\right\} \qquad M_0 \equiv \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon G(x,y,z)=0\right\}$$

Si consideri la curva $\gamma\colon t \in [0,\pi] \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \sin^2 t \\ y(t) = \sin t \cos t \quad t \in [0,\pi] \\ z(t) = \cos t \end{cases}$$

Dopo aver verificato che γ è una curva regolare, e che il suo supporto è contenuto in $L_1 \cap M_0$, determinare, tra tutti i punti del supporto, quello avente minima distanza dal punto $(0,1,0)$ e quello avente massima distanza dallo stesso punto $(0,1,0)$.

Detto P_0 il punto che realizza la minima distanza, scrivere l'equazione della retta tangente alla curva in tale punto.

Si consideri la funzione F precedentemente definita e sia $\mathbf{\Phi}$ il campo vettoriale definito dal gradiente di F:

$$\mathbf{\Phi}\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \operatorname{grad} F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\right) \in \mathbb{R}^3$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{\Phi}\,\mathrm{ds}$.

Esercizio 2.9.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la nozione di integrale doppio su un dominio normale ed enunciare il teorema che permette la riduzione dell'integrale doppio ad un integrale iterato.

2. Introdurre la nozione di superficie parametrica regolare.

2.10. Compito C - Terzo appello

Esercizio 2.10.1. Esibire 3 successioni positive $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, tali che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = 0$$

e, allo stesso tempo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \text{ diverge, mentre } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n} \text{ converge.}$$

Motivare la risposta.

Esercizio 2.10.2. Si considerino le funzioni

$$F\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 + y^2 - z^2 \in \mathbb{R}$$
$$G\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{R}$$

Disegnare e identificare gli insiemi

$$L_1 \equiv \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x,y,z) = 1\big\}$$
$$M_1 \equiv \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon G(x,y,z) = 1\big\}$$

Disegnare e identificare l'insieme $L_1 \cap M_1$.
Si considerino la funzione

$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to F(x,y,0) - xy \in \mathbb{R}\,.$$

e l'insieme

$$A \equiv \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 4\,,\ x \ge 0\big\} \bigcup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -x-2 \le y \le x+2\,,\ x < 0\big\}\,.$$

Determinare gli estremi assoluti di f in A e, dopo aver parametrizzato la frontiera di A, calcolare $\displaystyle\int_{\partial A} f\,\mathrm{d}s$.

Esercizio 2.10.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la nozione di integrale doppio su un dominio normale ed enunciare il teorema che permette la riduzione dell'integrale doppio ad un integrale iterato.

2. Introdurre la nozione di superficie parametrica regolare.

2.11. Compito - Quarto appello

Esercizio 2.11.1. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n x^{\frac{n}{3}}}{3}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto D tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione f, si calcoli $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Esercizio 2.11.2. Si consideri la funzione

$$F\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 + y^2 + 4z^2 \in \mathbb{R}$$

Disegnare e identificare l'insieme

$$A \equiv \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x,y,z) = 1\big\}\ .$$

Si consideri la superficie parametrica

$$\varphi\colon (u,v)\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\varphi(u,v)=\left(\cos v\sin u,\sin v\sin u,\frac{1}{2}\cos u\right)\in\mathbb{R}^3\,.$$

Verificare che l'immagine Σ della superficie φ è contenuta in A. Indicare sul disegno di A quale porzione rappresenta Σ. Esplicitare l'Area di Σ.

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{G}\colon (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\to\mathbf{G}(x,y,z)\equiv\left(y,2z,\frac{x}{2}\right)\in\mathbb{R}^3\,.$$

Calcolare il flusso di $\mathbf{G}$ attraverso la superficie Σ.

Si considerino l'insieme

$$B\equiv\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y\geq|x|\ ,\ 1\leq F(x,y,0)\leq 3\right\}$$

e la funzione

$$f\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2\to\frac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Disegnare B e determinare gli estremi assoluti di f in B.

Esercizio 2.11.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di curva parametrica regolare.
2. Teorema per il cambiamento di variabile negli integrali doppi.

2.12. Compito - Quinto appello

Esercizio 2.12.1. Al variare dei parametri $\omega\in\mathbb{N}$ e $a\in\mathbb{R}$ si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} y''+\omega^2 y=0\\ y(0)=0\\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a\end{cases}$$

Verificare che

1. se ω è dispari, il problema ammette soluzione solo per $a=0$. In questo caso, quante sono le soluzioni?
2. se ω è pari, per ogni valore di a il problema ammette una ed una sola soluzione. Determinarla.

Nel caso particolare $\omega=2$, determinare a in modo che il grafico della soluzione passi per il punto $\left(\frac{\pi}{12},1\right)$ e sia $f\colon x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to f(x)\in\mathbb{R}$ la restrizione all'intervallo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ della soluzione così ottenuta.

Sia

$$g\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to y\cos(x) \in \mathbb{R}.$$

e sia A la regione del piano Oxy delimitata dal grafico di f e dall'asse delle ascisse.
Disegnare A. Determinare gli estremi assoluti di g in A e calcolare $\displaystyle\int_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Esercizio 2.12.2. Sul piano Oxz si consideri la curva parametrica generata dal grafico della funzione

$$f\colon x \in [a,1] \to |\ln(x)|\ .$$

Verificare che per ogni $a \in (0,1)$ si ha una curva parametrica regolare.
Si consideri la superficie generata dalla rotazione di questa curva attorno all'asse z. Calcolarne l'Area. Scrivere in forma parametrica la curva che si ottiene intersecando la superficie con l'insieme

$$A \equiv \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ \exp(z) = 2y\right\}$$

Esercizio 2.12.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Teorema di derivazione e integrazione per serie di potenze.

2. Criterio di Leibnitz.

2.13. Compito - Sesto appello

Esercizio 2.13.1. Al variare dei parametri $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}$ si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - n^2 y = \exp(kx) \tag{2.2}$$

Determinare per quali valori dei parametri n e k esistono soluzioni $y(x)$ tali che

1. esiste finito $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) \neq 0$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$;

3. $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$;

4. $y(x)$ è una funzione pari.

Nel caso particolare $k = n = 2$, risovere il problema di Cauchy associato all'equazione (2.2) con condizioni iniziali

$$y(\ln(2)) = 0\,, \quad y'(\ln(2)) = 1 - \frac{16}{15}\ln(2)\,.$$

Esercizio 2.13.2. Siano a e b due parametri reali tali che $a^2 + b^2 = 1$. Si considerino le funzioni

$$g_{ab}\colon x \in \mathbb{R} \to a\cos(x) + b\sin(x) \in \mathbb{R}$$

e sia

$$f_{ab}\colon x \in [0,\pi] \to g_{ab}(x) \in \mathbb{R}$$

la restrizione di g_{ab} all'intervallo $[0,\pi]$. Sul piano Oxy si considerino la curva γ generata dal grafico di f_{ab} e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (y,2) \in \mathbb{R}^2.$$

Determinare a e b in modo che il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ sia minimo. Calcolare tale minimo. Siano $\overline{a}$ e $\overline{b}$ i valori dei parametri a e b che realizzano tale minimo e sia $g_{\overline{a}\overline{b}}$ la funzione che si ottiene in corrispondenza di tali parametri.

Sia $h\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to g_{\overline{a}\overline{b}}(x-y) - g_{\overline{a}\overline{b}}(x+y) \in \mathbb{R}$. Determinare la natura dei punti critici di h.

Esercizio 2.13.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Teorema di derivazione e integrazione per serie di potenze.

2. Definizione di dominio connesso e di superficie parametrica regolare.

2.14. Compito - Sesto appello - bis

Esercizio 2.14.1. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{\frac{n}{2}}}{n+1}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto D tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione f, si calcoli $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Esercizio 2.14.2. Si consideri la funzione

$$F\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 + y^2 - z^2 \in \mathbb{R}$$

Disegnare e identificare l'insieme

$$A \equiv \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x,y,z) = -1\right\} .$$

Si consideri la superficie parametrica

$$\varphi\colon (u,v) \in \left[\frac{1}{4}, 4\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \to \varphi(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u) \in \mathbb{R}^3 .$$

Verificare che l'immagine Σ della superficie φ è contenuta in A. Indicare sul disegno di A quale porzione rappresenta Σ.

Calcolare $\iint_\Sigma \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\sigma$.

Scrivere l'equazione del piano tangente α e della retta normale alla superficie in $\varphi\left(\ln 2, \frac{\pi}{3}\right)$. Determinare, se esiste, il punto di α avente minima distanza dall'origine.

Si consideri la regione D dello spazio delimitata da A e dai piani $z = \cosh\frac{1}{4}$, $z = \cosh 4$ e sia E la proiezione di D sul piano $x = 0$. Calcolare l'Area di E e $\iint_E |y|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Esercizio 2.14.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Caratterizzazione delle soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea e delle soluzioni di una equazione differenziale lineare non omogenea.
2. Teorema di Cauchy.

2.15. Compito - Settimo appello

Esercizio 2.15.1. Sviluppare in serie di MacLaurin la funzione $f(x) = \arctan(x)$.

1. Determinare l'insieme di convergenza della serie.
2. Usando tale sviluppo, trovare lo sviluppo in serie della funzione
$$F(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t\,.$$
3. Determinare l'insieme di convergenza della serie ottenuta.

Esercizio 2.15.2. Si consideri la funzione
$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \frac{x-y}{1+x^2+y^2} \in \mathbb{R}\,.$$

Disegnare ed identificare gli insiemi di livello della funzione f. Mediante lo studio degli insiemi di livello determinare, se esistono, il massimo ed il minimo assoluto di f.
Disegnare ed identificare l'insieme
$$A \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x,y) \geq \frac{1}{2}\right\}$$

Si consideri la curva
$$\gamma\colon t \in [0,2\pi] \to \gamma(t) = (1 + \mathrm{e}^{-t}\cos t, -1 + \mathrm{e}^{-t}\sin t) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Verificare che il supporto della curva è tutto contenuto in A. Calcolare il versore tangente alla curva in un generico punto $\gamma(t)$.
Scrivere la retta tangente alla curva in un generico punto $\gamma(t)$.
Esiste $t \in [0,2\pi]$ tale che questa retta passi per l'origine?

Esercizio 2.15.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

2. Si definisca la nozione di curva polare e si dica quale condizione deve essere soddisfatta affinchè una curva polare sia una curva parametrica regolare del piano.

2.16. Compito - Settimo appello - bis

Esercizio 2.16.1. Si riferisca lo spazio euclideo ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$. Sia

$$A \equiv \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0\,, \quad y = 0\,, \quad x^2 - z^2 = 1\right\}$$

e sia B l'insieme che si ottiene da A con una rotazione completa attorno all'asse z. Identificare A e B e disegnarli nel riferimento $Oxyz$.

Si consideri la superficie Σ di equazioni parametriche

$$\varphi(u,v) = \left(\cos u - \frac{v}{\sqrt{2}}\sin u\,,\, \sin u + \frac{v}{\sqrt{2}}\cos u\,,\, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)\,, \quad (u,v) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\times[-1,1]$$

Verificare che Σ è contenuta in B. Tracciare Σ sul disegno di B. Calcolare l'Area di Σ.

Tra tutti i punti di Σ determinare quello (o quelli) aventi minima distanza dal punto $(0,0,-1)$. Disegnare tale punto (o tali punti) sul disegno di B.

Si fissi $u_0 \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e si consideri la curva parametrica

$$\psi \colon v \in [-1,1] \to \psi(v) = \varphi(u_0, v) \in \mathbb{R}^3\,.$$

L'immagine di ψ è un oggetto noto: identificarlo. Sia ψ_0 la curva che si ottiene per $u_0 = 0$. Tracciare l'immagine di ψ_0 sul disegno di B.

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} \colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (\exp(x), \exp(y+z), \exp(y-z)) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo ψ_0.

Esercizio 2.16.2. Scrivere sotto forma di battimento la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 4x(t) = -10\cos(3t) \\ x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Determinare l'ampiezza massima del moto e i periodi del battimento.

Esercizio 2.16.3. Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la nozione di integrale doppio su un dominio normale ed enunciare il teorema che permette la riduzione dell'integrale doppio ad un integrale iterato.

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di massimo relativo.

3
a.a. 2004-05

3.1. Primo appello

Primo Esercizio

Esercizio 3.1.1. Si consideri la successione

$$a_n = \sqrt{n^3+2} - 2\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}.$$

1. **(max 3 punti)** Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
2. **(max 3 punti)** al variare del parametro reale α discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^\alpha$.

Esercizio 3.1.2. Si consideri la successione

$$a_n = \sqrt{\mathrm{e}^n+2} - 2\sqrt{\mathrm{e}^n+1} + \sqrt{\mathrm{e}^n}.$$

1. **(max 3 punti)** Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
2. **(max 3 punti)** al variare del parametro reale α discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^\alpha$.

Secondo Esercizio

Esercizio 3.1.3. Sia $f(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - xy = x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

1. (max 3 punti) Determinare la funzione f e il suo dominio;

2. (max 1 punto) Siano

$$g\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f(u-v) - f(u+v) \in \mathbb{R}$$
$$h\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f\left(\sqrt{2\,|v|}\right) + f\left(\sqrt{2\,|u|}\right) \in \mathbb{R}\,.$$

Scrivere esplicitamente le funzioni g e h;

3. (max 4 punti) Sul piano Ouv sia T il triangolo di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$. Determinare gli estremi assoluti di g in T;

4. (max 4 punti) Calcolare $\displaystyle\iint_T h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

Esercizio 3.1.4. Sia $f(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

1. (max 3 punti) Determinare la funzione f e il suo dominio;

2. (max 1 punto) Siano

$$g\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f(u-v) - f(u+v) \in \mathbb{R}$$
$$h\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f\left(\sqrt{2\,|v|}\right) + f\left(\sqrt{2\,|u|}\right) \in \mathbb{R}\,;$$

Scrivere esplicitamente le funzioni g e h;

3. (max 4 punti) Sul piano Ouv sia T il triangolo di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$. Determinare gli estremi assoluti di g in T;

4. (max 4 punti) Calcolare $\displaystyle\iint_T h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

3.2. Secondo appello

Primo Esercizio

Esercizio 3.2.1. Sia $\varphi\colon t \in \mathbb{R} \to \varphi(t) \in \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia

$$u\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \varphi(x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{e}^{y} \in \mathbb{R}\,.$$

1. (max 3 punti) Verificare che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = u(x,y)\,.$$

2. (max 3 punti) Sul piano Oxy sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$. Posto $\varphi(t) = t^2$, calcolare $\displaystyle\iint_T u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Esercizio 3.2.2. Sia $\varphi\colon t \in \mathbb{R} \to \varphi(t) \in \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia

$$u\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \varphi(x\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^{-y} \in \mathbb{R}\,.$$

1. (max 3 punti) Verificare che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = u(x,y)\,.$$

2. (max 3 punti) Sul piano Oxy sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$. Posto $\varphi(t) = t^2$, calcolare $\displaystyle\iint_T u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Secondo Esercizio

Esercizio 3.2.3. Sul piano Ouv si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < u^2 + v^2 < 9\right\}\,.$$

Sia Ω la frontiera di E.

1. (max 1 punto) Identificare Ω e disegnarlo sul piano Ouv;

2. (max 3 punti) Determinare gli estremi assoluti e i punti estremanti della restrizione a Ω della funzione

$$f\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to (u-1)^2 + v^2 \in \mathbb{R}\,;$$

3. (max 3 punti) Calcolare l'integrale curvilineo di f esteso alla circonferenza centrata nell'origine e raggio 3;

4. (max 1 punto) Sia D la chiusura di E. Identificare D e disegnarlo sul piano Ouv;

5. (max 4 punti) Sia Σ la superficie parametrica di equazioni

$$\mathbf{r}\colon (u,v) \in D \to (\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^v, \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v, uv) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Determinare, se esistono, i punti di Σ in cui il piano tangente è orizzontale (cioè è ben definito ed è della forma $z = \textit{costante}$, dove z è la terza coordinata di $\mathbb{R}^3$).

Esercizio 3.2.4. Sul piano Ouv si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < u^2 + v^2 < 4\right\}\,.$$

Sia Ω la frontiera di E.

1. (max 1 punto) Identificare Ω e disegnarlo sul piano Ouv;

2. (max 3 punti) Determinare gli estremi assoluti e i punti estremanti della restrizione a Ω della funzione

$$f\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to u^2 + (v-1)^2 \in \mathbb{R}\,;$$

3. (max 3 punti) Calcolare l'integrale curvilineo di f esteso alla circonferenza centrata nell'origine e raggio 2;

4. (max 1 punto) Sia D la chiusura di E. Identificare D e disegnarlo sul piano Ouv;

5. (max 4 punti) Sia Σ la superficie parametrica di equazioni

$$\mathbf{r}\colon (u,v) \in D \to (\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^v, \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v, uv) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Determinare, se esistono, i punti di Σ in cui il piano tangente (ovvero il versore normale) non è definito.

3.3. Terzo appello

Primo Esercizio

Esercizio 3.3.1. Si consideri la funzione

$$f\colon x \in \mathbb{R} \to (4x^2+1)^{-1/2} \in \mathbb{R}$$

1. **(max 2 punti)** Usando gli sviluppi in serie di MacLaurin già noti, scrivere lo sviluppo in serie della funzione f;
2. **(max 4 punti)** Dopo aver calcolato la derivata prima della funzione

$$g\colon x \in \mathbb{R} \to \ln\left(6x + \sqrt{36x^2+9}\right) \in \mathbb{R}\,,$$

determinare lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione g.

Esercizio 3.3.2. Si consideri la funzione

$$f\colon x \in \mathbb{R} \to (9x^2+1)^{-1/2} \in \mathbb{R}$$

1. **(max 2 punti)** Usando gli sviluppi in serie di MacLaurin già noti, scrivere lo sviluppo in serie della funzione f;
2. **(max 4 punti)** Dopo aver calcolato la derivata prima della funzione

$$g\colon x \in \mathbb{R} \to \ln\left(6x + \sqrt{36x^2+4}\right) \in \mathbb{R}\,,$$

determinare lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione g.

Secondo esercizio

Esercizio 3.3.3. Sul piano Oxy si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ |x| \le 2\,,\ |y| \le 2\,,\ |x| + |y| \ge 1\right\}\ .$$

1. **(max 1 punto)** Disegnare E;
2. **(max 2 punti)** Posto $f(x,y) = y^2 - 2x^2$, determinarne gli estremi assoluti in E ed i punti estremanti;
3. **(max 2 punti)** Descrivere, sotto forma di una o più curve parametriche, la frontiera dell'insieme E;
4. **(max 2 punti)** Calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} f\,\mathrm{d}s$;
5. **(max 2 punti)** Dopo aver riferito lo spazio euclideo ad un sistema di assi cartesiani $Oxyz$, si consideri il solido D che si ottiene con una rotazione completa attorno all'asse z di
$$F \equiv \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon 0 \le x \le 2\,,\ |z| \le 2\,,\ x + |z| \ge 1\right\}\ .$$
Disegnare D e descriverlo tramite una o più disequazioni;
6. **(max 3 punti)** Sapendo che un corpo materiale è distribuito nella regione D con densità
$$\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + z^2\,,$$
se ne calcolino la massa ed il momento d'inerzia rispetto all'asse z.

Esercizio 3.3.4. Sul piano Oxy si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ \max\{|x|\ ,\ |y|\} \ge 1\,,\ |x| + |y| \le 4\right\}\ .$$

1. **(max 1 punto)** Disegnare E;
2. **(max 2 punti)** Posto $f(x,y) = 4y^2 - x^2$, determinarne gli estremi assoluti in E ed i punti estremanti;
3. **(max 2 punti)** Descrivere, sotto forma di una o più curve parametriche, la frontiera dell'insieme E;
4. **(max 2 punti)** Calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} f\,\mathrm{d}s$;
5. **(max 2 punti)** Dopo aver riferito lo spazio euclideo ad un sistema di assi cartesiani $Oxyz$, si consideri il solido D che si ottiene con una rotazione completa attorno all'asse z di
$$F \equiv \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x \ge 0\,,\ \max\{x\ ,\ |z|\} \ge 1\,,\ x + |z| \le 4\right\}\ .$$
Disegnare D e descriverlo tramite una o più disequazioni;

6. **(max 4 punti)** Sapendo che un corpo materiale è distribuito nella regione D con densità
$$\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2 \,,$$
se ne calcolino la massa ed il momento d'inerzia rispetto all'asse z.

3.4. Quarto appello

Primo Esercizio

Esercizio 3.4.1. Al variare del parametro reale $a > 0$, si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-t) & t < a \\ 0 & t > a \end{cases} .$$

Si consideri poi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} .$$

1. **(max 4 punti)** Determinare la soluzione $x\colon t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.4.2. Al variare del parametro reale $a > 0$, si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & t < a \\ 0 & t > a \end{cases} .$$

Si consideri poi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 4x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} .$$

1. **(max 4 punti)** Determinare la soluzione $x\colon t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{R}$.

Secondo esercizio

Esercizio 3.4.3. Sul piano Oxy si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0 \,,\; x^2 + y^2 \leq 4 \,,\; (|x| - 1)^2 + y^2 \geq 1\right\} .$$

1. **(max 2 punti)** Disegnare E;
2. **(max 1 punti)** Descrivere, sotto forma di una o più curve parametriche, la frontiera dell'insieme E;

3. **(max 4 punti)** Posto $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, determinarne gli estremi assoluti in E ed i punti estremanti;

4. **(max 4 punti)** Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F} \colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (xy, y^2) \in \mathbb{R}^2$$
Calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$;

5. **(max 3 punti)** Si immerga il piano Oxy nello spazio euclideo riferito ad una terna di assi ortogonali $Oxyz$ e si consideri la superficie Σ che si ottiene ruotando ∂E con una rotazione completa attorno all'asse x. Scrivere Σ sotto forma di una o più superfici parametriche regolari.

Esercizio 3.4.4. Sul piano Oxy si consideri l'insieme
$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 16\,,\ x^2 + (y-2)^2 \geq 1\right\}\ .$$

1. **(max 2 punti)** Disegnare E;

2. **(max 1 punti)** Descrivere, sotto forma di una o più curve parametriche, la frontiera dell'insieme E;

3. **(max 4 punti)** Posto $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$, determinarne gli estremi assoluti in E ed i punti estremanti;

4. **(max 4 punti)** Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F} \colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (xy, y^2) \in \mathbb{R}^2$$
Calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$;

5. **(max 3 punti)** Si immerga il piano Oxy nello spazio euclideo riferito ad una terna di assi ortogonali $Oxyz$ e si consideri la superficie Σ che si ottiene ruotando ∂E con una rotazione completa attorno all'asse x. Scrivere Σ sotto forma di una o più superfici parametriche regolari.

3.5. Quinto appello

Primo Esercizio

Esercizio 3.5.1. Sia $f \colon x \in \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = y - \exp(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. **(max 2 punti)** Determinare f;

2. **(max 4 punti)** sia $g\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f(u+v) - f(u-v)$. Esplicitare g, determinarne gli eventuali punti critici e la loro natura;
3. **(max 4 punti)** sia $h\colon (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \to f(u+v+w)$. Calcolare l'integrale di h esteso al tetraedro dello spazio $Ouvw$ di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Esercizio 3.5.2. Sia $f\colon x \in \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y + \exp(-x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. **(max 2 punti)** Determinare f;
2. **(max 4 punti)** sia $g\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f(u+v) - f(u-v)$. Esplicitare g, determinarne gli eventuali punti critici e la loro natura;
3. **(max 4 punti)** sia $h\colon (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \to f(u+v+w)$. Calcolare l'integrale di h esteso al tetraedro dello spazio $Ouvw$ di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

Secondo Esercizio

Esercizio 3.5.3. Sul piano Oxy si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ , \ x^2+y^2 \leq 1\,,\ (|x|-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\right\}\,.$$

1. **(max 2 punti)** Disegnare E;
2. **(max 4 punti)** Posto $f(x,y) = x^2 - y^2$, calcolare $\displaystyle\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;
3. **(max 2 punti)** Determinare gli estremi assoluti ed i punti estremanti di f in E;

Esercizio 3.5.4. Sul piano Oxy si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ , \ x^2+y^2 \leq 1\,,\ (x-1)^2 + (|y|-1)^2 \geq 1\right\}\,.$$

1. **(max 2 punti)** Disegnare E;
2. **(max 4 punti)** Posto $f(x,y) = x^2 - y^2$, calcolare $\displaystyle\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;
3. **(max 2 punti)** Determinare gli estremi assoluti ed i punti estremanti di f in E.

4
a.a. 2005-06

4.1. Primo appello

Primo Esercizio

Esercizio 4.1.1. Si consideri la funzione

$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to |y| - x^2 \in \mathbb{R}\,.$$

1. (max 3 punti) Tracciare le linee di livello della funzione f.
2. (max 3 punti) Determinare gli estremi assoluti della funzione f nell'insieme $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ indicando anche i punti estremanti.
3. (max 3 punti) Calcolare $\displaystyle\iint_Q f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
4. (max 3 punti) Calcolare $\displaystyle\int_{\partial Q} f\mathrm{d}s$.

Esercizio 4.1.2. Si consideri la funzione

$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to |x| - y^2 \in \mathbb{R}\,.$$

1. (max 3 punti) Tracciare le linee di livello della funzione f.
2. (max 3 punti) Determinare gli estremi assoluti della funzione f nell'insieme $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ indicando anche i punti estremanti.
3. (max 3 punti) Calcolare $\displaystyle\iint_Q f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
4. (max 3 punti) Calcolare $\displaystyle\int_{\partial Q} f\mathrm{d}s$.

Secondo Esercizio

Esercizio 4.1.3. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k-1}{k+1} 2^k x^k$$

1. (max 2 punti) Determinare l'insieme di convergenza I della serie di potenze
2. (max 4 punti) Detta

$$f\colon x \in I \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k+1} 2^k x^k \in \mathbb{R}$$

la funzione somma della serie, determinare una formula esplicita per f.

Esercizio 4.1.4. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k-1}{k+1} 2^{-k} x^k$$

1. (max 2 punti) Determinare l'insieme di convergenza I della serie di potenze
2. (max 4 punti) Detta

$$f\colon x \in I \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k+1} 2^{-k} x^k \in \mathbb{R}$$

la funzione somma della serie, determinare una formula esplicita per f.

4.2. Secondo appello

Esercizio unico

Esercizio 4.2.1. Al variare del parametro reale a, si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} v'' + av = 0 \\ V(0) = 1 \\ \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0 \end{cases}$$

1. (max 4 punti) Mostrare che

1. Se $a \geq 0$, il problema non ammette alcuna soluzione;
2. Se $a < 0$, il problema ammette una ed una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

2. (max 2 punti) Sul piano Oxy si consideri l'insieme

$$D \equiv \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq |x-1| + |y-2| \leq 3\right\} .$$

Disegnare D.

3. (max 4 punti) Sia $v\colon t \in \mathbb{R} \to v(t) \in \mathbb{R}$ la soluzione che si ottiene per $a = -4$ e sia

$$f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to v\left(\frac{x+y}{2}\right) - v(x) - v(y)$$

Calcolare gli estremi assoluti di f in D indicando i punti estremanti.

4. (max 4 punti) Supponiamo che su ∂D sia distribuita una massa con densità lineare $\rho(x, y) = 1 + |xy|$. Calcolare la massa totale.

5. (max 4 punti) Supponiamo che su D sia distribuita una massa con densità superficiale $d(x, y) = 1 + |x|$. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse y.

Esercizio 4.2.2. Al variare del parametro reale a, si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} v'' + av = 0 \\ v(0) = 1 \\ \lim_{t\to-\infty} v(t) = 0 \end{cases}$$

1. (max 4 punti) Mostrare che

1. Se $a \geq 0$, il problema non ammette alcuna soluzione;
2. Se $a < 0$, il problema ammette una ed una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

2. (max 2 punti) Sul piano Oxy si consideri l'insieme

$$D \equiv \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq |x - 2| + |y - 1| \leq 3\right\} .$$

Disegnare D.

3. (max 4 punti) Sia $v \colon t \in \mathbb{R} \to v(t) \in \mathbb{R}$ la soluzione che si ottiene per $a = -4$ e sia

$$f \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to v\left(\frac{x + y}{2}\right) - v(x) - v(y)$$

Calcolare gli estremi assoluti di f in D indicando i punti estremanti.

4. (max 4 punti) Supponiamo che su ∂D sia distribuita una massa con densità lineare $\rho(x, y) = 1 + |x|$. Calcolare la massa totale.

5. (max 4 punti) Supponiamo che su D sia distribuita una massa con densità superficiale $d(x, y) = 2 + |xy|$. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse y.

4.3. Terzo appello

Primo esercizio

Esercizio 4.3.1. (max 3 punti) Al variare dei parametri α, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ determinare la parte principale in $t = 0$ della funzione

$$f(t) = \left(1 + t^{20}\right)^{\alpha} - \cos(\beta t^{10})$$

Esercizio 4.3.2. (max 3 punti) Al variare dei parametri α, $\beta \in \mathbb{R}$ calcolare, se esiste,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(k^{\beta} + 1\right)^{\alpha}}{k}$$

Secondo esercizio

Esercizio 4.3.3. Al variare del parametro reale α si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)^\alpha}{k} x^k$$

1. (max 3 punti) Determinare l'insieme di convergenza I_α della serie;
2. (max 3 punti) Nel caso patricolare $\alpha = 2$ scrivere esplicitamente la funzione somma della serie.

Esercizio 4.3.4. Al variare del parametro reale α si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^\alpha}{k} x^{3k}$$

1. (max 3 punti) Determinare l'insieme di convergenza I_α della serie;
2. (max 3 punti) Nel caso patricolare $\alpha = 2$ scrivere esplicitamente la funzione somma della serie.

Terzo esercizio

Esercizio 4.3.5. Si consideri l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y-1| \le x^2, \quad |x-1| + |y-1| \le 1, \quad y \ne x\right\}$$

1. (max 1 punto) Disegnare D e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
2. (max 1 punto) Disegnare $A \equiv \mathrm{int}(D)$ e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
2. (max 1 punto) Disegnare $E \equiv \overline{D}$ e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
4. (max 4 punti) Sia

$$f \colon (x,y) \in E \to y|x-1| + 4x|y-1| \in \mathbb{R}$$

Determinare gli estremi assoluti di f in E indicando i punti estremanti;
5. (max 3 punti) Calcolare $\displaystyle\iint_E f(x,y)\,dxdy$.

Esercizio 4.3.6. Si consideri l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y+1| \le x^2, \quad |x-1| + |y+1| \le 1, \quad y \ne -x\right\}$$

1. (max 1 punto) Disegnare D e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
2. (max 1 punto) Disegnare $A \equiv \mathrm{int}(D)$ e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;

2. (max 1 punto) Disegnare $E \equiv \overline{D}$ e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
4. (max 4 punti) Sia

$$f\colon (x,y) \in E \to y|x-1| - 4x|y+1| \in \mathbb{R}$$

Determinare gli estremi assoluti di f in E indicando i punti estremanti;
5. (max 3 punti) Calcolare $\iint_E f(x,y)\,dxdy$.

4.4. Quarto appello

Esercizio unico

Esercizio 4.4.1. Al variare dei parametri reali α e β, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + \alpha^2 x = \cos(\alpha t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = \beta \end{cases}$$

1. (max 3 punti) Al variare di α e β si determini la soluzione

$$x_{\alpha,\beta}\colon t \in \mathbb{R} \to x_{\alpha,\beta}(t) \in \mathbb{R}$$

di detto problema.
2. (max 3 punti) Si consideri la funzione

$$f\colon (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \to x_{\alpha,\beta}(1) \in \mathbb{R}$$

f è derivabile?
3. (max 3 punti) f è differenziabile?
4. (max 2 punti) Sia

$$D \equiv \left\{ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\colon \alpha \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad |\beta| \le \cos(\alpha) \right\}.$$

Disegnare D sul piano $O\alpha\beta$.
5. (max 4 punti) Si consideri la funzione

$$g\colon (\alpha,\beta) \in D \to \alpha f(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$$

Determinare, se esistono, gli estremi assoluti di g in D.
6. (max 3 punti) Calcolare $\iint_D |g(\alpha,\beta)| d\alpha d\beta$.

4.5. Quinto appello

Primo Esercizio

Esercizio 4.5.1. Sia

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0, \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

1. (max 3 punti) Disegnare D e verificare che per ogni $a > 0$ esiste una ed una sola semiretta uscente dall'origine che divide D in due sottoinsiemi D_1 e D_2 tali che

$$\iint_{D_1} y dx dy = a \iint_{D_2} y dx dy$$

dove D_1 è il sottoinsieme di D che interseca l'asse delle ascisse solo nell'origine.
2. (max 5 punti) Verificare che per ogni $b > 0$ esiste una ed una sola semiretta uscente dall'origine che divide D in due sottoinsiemi E_1 e E_2 tale che

$$\iint_{E_1} y dx dy = b \iint_{T_2} y dx dy$$

dove E_1 è il sottoinsieme di D che interseca l'asse delle ascisse solo nell'origine e T_2 è il triangolo individuato dalla semiretta, dall'asse delle ascisse e dalla retta $x = 2$.

Secondo esercizio

Esercizio 4.5.2. Sia D il dominio della funzione

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} \ln\left(2x - x^2 - y^2\right).$$

1. (max 2 punti) Disegnare D, $A \equiv \operatorname{int}(D)$, $F \equiv \partial D$, $E \equiv \overline{D}$ e, per ciascuno dei quattro insiemi, dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
2. (max 4 punti) Sia

$$f \colon (x, y) \in E \to \left|4y^2 - x^2\right| + 2x^2 \in \mathbb{R}$$

Determinare gli estremi assoluti di f in F indicando i punti estremanti;
Determinare gli estremi assoluti di f in E indicando i punti estremanti;
3. (max 4 punti) Calcolare $\displaystyle\int_F f\, ds$.

Esercizio 4.5.3. Sia D il dominio della funzione

$$g(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 - y^2} \ln\left(-2x - x^2 - y^2\right).$$

1. (max 2 punti) Disegnare D, $A \equiv \operatorname{int}(D)$, $F \equiv \partial D$, $E \equiv \overline{D}$ e, per ciascuno dei quattro insiemi, dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso

per archi;
2. (max 4 punti) Sia

$$f\colon (x,y) \in E \to \left|4y^2 - x^2\right| + 9x^2 \in \mathbb{R}$$

Determinare gli estremi assoluti di f in F indicando i punti estremanti;
Determinare gli estremi assoluti di f in E indicando i punti estremanti;
3. (max 4 punti) Calcolare $\displaystyle\int_F f\,ds$.

4.6. Sesto appello

Primo Esercizio

Esercizio 4.6.1. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2-1}{2^n} t^{2n},$$

1. **(max 1 punto)** Determinare l'insieme di convergenza I.
2. **(max 3 punti)** Sia $f\colon t \in I \to f(t) \in \mathbb{R}$ la funzione somma della serie. Esplicitare f
3. **(max 1 punto)** Sia

   $$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \max\{|x|, |y|\} \in I\right\}.$$

   D è aperto? è chiuso? è connesso per archi? è limitato? Disegnare D e $\overline{D}$
4. **(max 2 punti)** Si consideri la funzione

   $$g\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \left|y^2 - y\right| + x \in \mathbb{R}$$

   Disegnare gli insiemi di livello di g.
5. **(max 2 punti)** Determinare, se esistono, gli estremi assoluti di g in $\overline{D}$, indicando i punti estremanti.

Secondo Esercizio

Esercizio 4.6.2. Si consideri la curva

$$\varphi\colon u \in [0,\pi] \to \varphi(u) \in \mathbb{R}^3$$

di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + \sin u \\ y = 0 \\ z = 1 + \cos u. \end{cases}$$

1. **(max 2 punti)** Vericare che il supporto di φ giace sul semipiano
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0, \quad y = 0\right\}.$$
e disegnare, approssimativamente, il supporto di φ.

2. **(max 3 punti)** Sia Σ la superficie che si ottiene ruotando il supporto di φ attorno all'assse z. Calcolare l'Area di Σ.

3. **(max 1 punto)** Scrivere Σ in forma parametrica.

4. **(max 3 punti)** Supponiamo che su Σ sia distribuita una massa con densità $\rho(x, y, z) = |z| + 1$. Calcolare la massa.

4.7. Settimo appello

Primo esercizio

Esercizio 4.7.1. Si consideri la serie di potenze
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n^2 + 1\right) (2t)^n,$$

1. **(max 1 punto)** Determinare il raggio di convergenza R e l'insieme di convergenza I della serie.

2. **(max 4 punti)** Sia $f \colon t \in I \to f(t) \in \mathbb{R}$ la funzione somma della serie. Esplicitare f

3. **(max 2 punti)** Sia
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon R \leq \frac{\max\{|x|, |y|\}}{x^2 + y^2} \leq 2R\right\}.$$
D è aperto? è chiuso? è connesso per archi? è limitato? Disegnare D.

4. **(max 2 punti)**Sia
$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0,\ y = 0\ (x, z) \in D\right\}$$
e sia T la regione dello spazio che si ottiene ruotando E attorno all'asse z. Disegnare T.

5. **(max 4 punti)** Calcolare il volume di T.

6. **(max 4 punti)** Calcolare l'area della frontiera di T

Secondo esercizio

Esercizio 4.7.2. Si consideri l'insieme

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \; |x| + |y - 1| \leq 1\right\}.$$

1. **(max 1 punto)** Disegnare Q.
2. **(max 4 punti)** Si consideri la funzione

$$g \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to \left|x^2 - xy\right| + xy \in \mathbb{R}$$

   Disegnare gli insiemi di livello di g.
3. **(max 3 punti)** Determinare, se esistono, gli estremi assoluti di g in Q, indicando i punti estremanti.

5
a.a. 2006-07

5.1. Primo appello

Primo Esercizio

Esercizio 5.1.1. Si consideri la funzione $\alpha\colon t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}$ definita da

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2\pi \\ -2 & t > 2\pi \end{cases}$$

1. Determinare la soluzione $f\colon t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, del problema differenziale
$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} + x = 2\sin(t) \\ x(0) = \pi \\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases}$$
2. Sia $\gamma\colon t \in [-\pi, \pi] \mapsto (f(t), f(\pi - t)) \in \mathbb{R}^2$. Dire se si tratta di una curva regolare, se è semplice e se è chiusa.
3. Scrivere, se esiste, la retta tangente al supporto di γ nel punto $\gamma(0)$.

Esercizio 5.1.2. Si consideri la funzione $\alpha\colon t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}$ definita da

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2\pi \\ -2 & t > 2\pi \end{cases}$$

1. Determinare la soluzione $f\colon t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, del problema differenziale
$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} + x = -2\cos(t) \\ x(0) = \pi \\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases}$$

2. Sia $\gamma\colon t \in [-\pi, \pi] \mapsto (f(t), f(\pi - t)) \in \mathbb{R}^2$. Dire se si tratta di una curva regolare, se è semplice e se è chiusa.

3. Scrivere, se esiste, la retta tangente al supporto di γ nel punto $\gamma(0)$.

Secondo Esercizio

Esercizio 5.1.3. Sia $f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 4x^2 + |y-1|\,(y-1) \in \mathbb{R}$.

1. Disegnare le linee di livello di f.

2. Disegnare l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ |2x| + |y-1| \le 4, \right\}.$$

3. Determinare gli estremi assoluti di f in D, indicando i punti estremanti.

4. Sia $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + (y-1)^2 \le 1 \quad |2x| + |y-1| \le 2\right\}$. Disegnare E, calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} f \mathrm{d}s$ e $\displaystyle\iint_E f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5. Disegnare $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x, y) \le 4, \quad y \ge 1\right\}$ e calcolare il Volume della regione che si ottiene da F con una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate.

Esercizio 5.1.4. Sia $f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + 4\,|y-1|\,(y-1) \in \mathbb{R}$.

1. Disegnare le linee di livello di f.

2. Disegnare l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ |x| + 2\,|y-1| \le 1, \right\}.$$

3. Determinare gli estremi assoluti di f in D, indicando i punti estremanti.

4. Sia $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + (y-1)^2 \le 1 \quad |2x| + |y-1| \le 2\right\}$. Disegnare E, calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} f \mathrm{d}s$ e $\displaystyle\iint_E f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5. Disegnare $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x, y) \le 2, \quad y \ge 1\right\}$ e calcolare il Volume della regione che si ottiene da F con una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate.

5.2. Secondo appello

Primo Esercizio

Esercizio 5.2.1. Si consideri la funzione $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x^2 + \max\{x^2, y^2\} \in \mathbb{R}$.

1. Disegnare le linee di livello di f
2. Disegnare l'insieme
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| + |y| \leq 2\right\}$$
3. Determinare gli estremi assoluti di f in D indicando i punti estremanti
4. Calcolare $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ e $\int_{\partial D} f\mathrm{d}s$

Esercizio 5.2.2. Si consideri la funzione $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x^2 + \min\{x^2, y^2\} \in \mathbb{R}$.

1. Disegnare le linee di livello di f
2. Disegnare l'insieme
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| + |y| \leq 2\right\}$$
3. Determinare gli estremi assoluti di f in D indicando i punti estremanti
4. Calcolare $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ e $\int_{\partial D} f\mathrm{d}s$

Secondo Esercizio

Esercizio 5.2.3.
$$y' = x^2y^2$$
determinare, se esistono, quelle il cui grafico è tangente alla retta $y = x$.

Indicare esplicitamente il dominio di tali soluzioni.

Esercizio 5.2.4. Tra tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y' = -xy^2$$
determinare, se esistono, quelle il cui grafico è tangente alla retta $y = x$.

Indicare esplicitamente il dominio di tali soluzioni.

Terzo Esercizio

Esercizio 5.2.5.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
Determinarne l'insieme di convergenza ed esplicitare la funzione somma della serie.

Esercizio 5.2.6. Si consideri la serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
Determinarne l'insieme di convergenza ed esplicitare la funzione somma della serie.

5.3. Terzo appello

Primo Esercizio

Esercizio 5.3.1. Al variare del parametro naturale $n \geq 1$, si consideri la curva parametrica
$$\varphi_n \colon t \in [-\pi, \pi] \mapsto \left(n \sin \frac{t}{n}, n \left(1 - \cos \frac{t}{n} \right) \right) \in \mathbb{R}^2$$

1. Dimostrare che per ogni valore del parametro n la curva φ_n è regolare e semplice. Per quali valori di n è chiusa?
2. Calcolare la lunghezza di φ_n
3. Che relazione c'è tra il parametro t ed il parametro d'arco di φ_n?
4. Disegnare il supporto di φ_1 , φ_2, φ_{1000} indicando punto iniziale, punto finale e verso di percorrenza.
5. Per ogni t fissato calcolare, se esiste,
$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t).$$
Suggerimento: trattare a parte il caso $t = 0$ e usare opportunamente gli sviluppi di MacLaurin per $t \neq 0$.
al variare di t quale oggetto viene descritto da $\varphi_t := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$?
6. Si consideri la superficie di equazione parametrica
$$\psi \colon (u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \mapsto \left(u + v, u - v, u^2 - v^2\right) \in \mathbb{R}^3$$
Verificare che il supporto di ψ è contenuto sul grafico di una funzione $z = f(x, y)$

7. Scrivere le equazioni parametriche della curva $\gamma_n = \psi \circ \varphi_n$ ed esplicitarne la lunghezza.

Secondo Esercizio

Esercizio 5.3.2. Sul piano Oxy si consideri l'insieme D definito da

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| \le 2,\ |y| \le 1\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (|y| - 1)^2 \le 4\right\}$$

1. Disegnare D.
2. Disegnare le linee di livello della funzione $f(x, y) = |x| + \left|\min\left\{|y|, y^2\right\} - 1\right|$ evidenziando le eventuali simmetrie
3. Determinare gli estremi assoluti di f in D
4. Calcolare $\int_{\partial D} f ds$
5. Supponendo che f sia una densità di massa distribuita in D, calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse x e rispetto ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per l'origine.

5.4. Quarto appello

Primo Esercizio

Esercizio 5.4.1. Sia $D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon u^2 + v^2 \le 4\right\}$ Al variare del parametro reale positivo α si consideri la superfici parametrica $\varphi_\alpha \colon D \to \mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{cases} x = \alpha u \\ y = \dfrac{v}{\alpha} \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

1. Dopo aver dato la definizione di superficie parametrica regolare, dimostrare che per ogni valore del parametro α la superficie φ_α è una superficie parametrica regolare e disegnarne il sostegno
2. Parametrizzare l'insieme $E = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon (u - 1)^2 + v^2 = 1\right\}$ come una curva parametrica regolare $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^2$, con I opportuno intervallo chiuso e limitato
3. Considerare la curva parametrica $\psi_\alpha := \varphi_\alpha \circ \gamma$. Verificare che, qualunque sia il parametro positivo α, il suo supporto è contenuto in un piano contenente l'asse y . Esistono valori di α per cui questo piano coincide con il piano $z = x$?
4. Esplicitare l'Area della superficie φ_α

5. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xz, z^2)$ attraverso la superficie φ_α, avendola orientata in modo che la terza componente del versore normale sia sempre negativa.

Secondo esercizio

Esercizio 5.4.2. Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani Oxy, si consideri l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$ Sia r una semiretta uscente dal punto $(2, 0)$, tutta contenuta nel quarto di piano $y \geq 0$, $x \leq 2$ e sia s la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse. La semiretta r può essere individuata tramite l'angolo $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x.

Si consideri la regione E contenuta in D e delimitata dalle due semirette.

1. Calcolare l'Area $A(\alpha)$ di E.

2. Scrivere $A(\alpha)$ in serie di Taylor centrata in π (n.b. ricondursi a serie di MacLaurin già note, e non cercare di indovinare la serie calcolando esplicitamente i primi termini)

3. Siano F_1 ed F_2 la ulteriori due regioni in cui D viene diviso dalle rette r ed s.

   Determinare α in modo che
   $$\iint_{F_1} |y| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{F_2} |y| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{E} |y| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y?$$

4. È possibile scegliere α in modo che
   $$\iint_{F_1} (x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{F_2} (x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{E} (x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y?$$

   In caso affermativo, quanti valori di α rendono vera questa catena di uguaglianze?

5.5. Quinto appello

Primo Esercizio

Esercizio 5.5.1. Dopo aver definito la nozione di *raggio di convergenza di una serie di potenze*, determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2 \ln(n)}{n!} x^n$$

Secondo Esercizio

Esercizio 5.5.2. Introdurre la nozione di curva in forma polare e scrivere la condizione necessaria e sufficiente per la regolarità di una tale curva.

In un piano euclideo si introduca un sistema di coordinate polari $Or\theta$. Tracciare il sostegno delle curve di equazione polare

$$r_1(\theta) = 2\sin(3\theta) \qquad r_2(\theta) = \sqrt{3} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

e calcolare l'Area della regione

$$D = \{(r, \theta) \colon r \leq \min\{r_1(\theta), \quad r_2(\theta)\}\}\,.$$

Terzo Esercizio

Esercizio 5.5.3. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani Oxy, si consideri l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4, \quad (x-2)^2 + y^2 \geq 4\right\}.$$

- Sia $Or\theta$ un sistema di coordinate polari in cui l'asse polare coincide con il semiasse positivo dell'asse x. Scrivere D in queste nuove coordinate;
- Disegnare ∂D e calcolare $\displaystyle\int_{\partial D} \min\{x^2, 3y^2\}\mathrm{d}s$;
- Calcolare $\displaystyle\int_D \min\{x^2, 3y^2\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;
- Tracciare le linee di livello della funzione
$$f \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \min\{x^2, 3y^2\} \in \mathbb{R};$$
- Determinare massimo e minimo assoluti di f in D, indicando i punti estremanti.

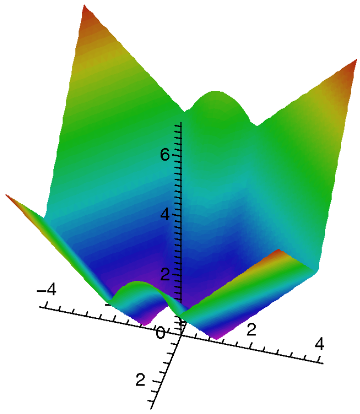
5.6. Sesto appello

Primo Esercizio

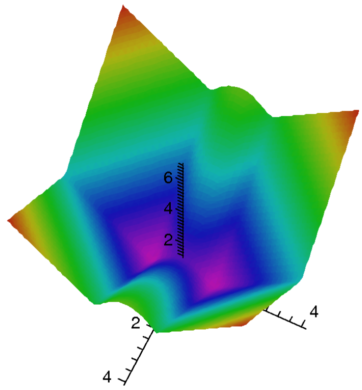
Esercizio 5.6.1. Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = \exp(2x)\ln(t^2)$$

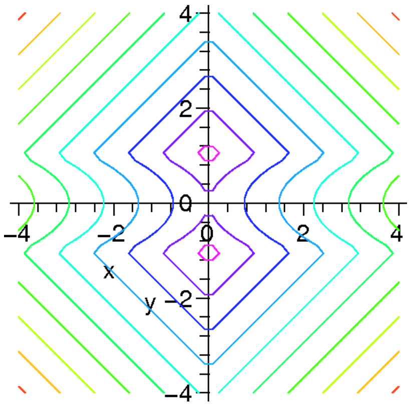
1. Di che tipo di equazione differenziale si tratta? Enunciare il Teorema di Cauchy per questo tipo di equazioni
2. Se $x \colon t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ è una sua qualsiasi soluzione definita anche per $t = 1$, cosa posso dire su I?



(a) Il grafico



(b) Il grafico da un'altra angolazione



(c) Le linee di livello

Figura 5.1: Grafico e linee di livello della funzione dell'esercizio 5.3.2

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x = \exp(2x)\ln(t^2) \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

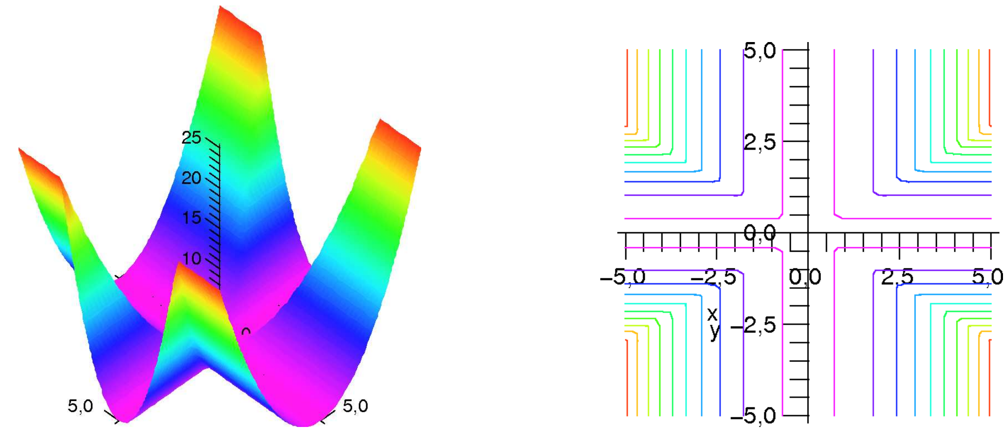
Se non è possibile esplicitare il dominio J della soluzione, dire se J è illimitato, limitato a destra, limitato a sinistra, se è aperto, se è chiuso.

Secondo esercizio

Esercizio 5.6.2. Sul piano Oxy si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq 1\right\}.$$

1. Disegnare E e ∂E. Dire se si tratta di insiemi aperti, chiusi, connessi per archi, limitati.



(a) Il grafico (b) Le linee di livello

Figura 5.2: Grafico e linee di livello della funzione dell'esercizio 5.5.3

2. Descrivere, sottoforma di una o più curve parametriche l'insieme ∂E.
3. Si consideri la funzione
$$f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x-1| + |y| \in \mathbb{R},$$
tracciare le linee di livello della funzione f . Al variare di $c \in \mathbb{R}$, dire se la linea di livello c della funzione f è' connessa per archi.
4. Determinare l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui f non è differenziabile.
5. Determinare gli estremi di f in E, ndicando i punti estremanti.
6. Calcolare $\iint_E (x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.

Terzo esercizio

Esercizio 5.6.3. Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2\, 3^n} t^{4n}.$$
Esplicitare la funzione somma della serie.

5.7. Settimo appello

Primo esercizio

Esercizio 5.7.1. Si consideri l'equazione differenziale
$$x'(t) = x(t) \tan(t) + \sin(t)$$

1. Di che tipo di equazione differenziale si tratta? Se $x\colon t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione definita anche per $t = 3$ e che non ammette nessuna altra soluzione come propria estensione, chi è l'insieme I

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\tan(t) + \sin(t) \\ x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases}$$

indicando esplicitamente il dominio della soluzione.

Secondo esercizio

Esercizio 5.7.2. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto fissato. Definire le seguenti nozioni

1. f è continua in (x_0, y_0)
2. f è derivabile in (x_0, y_0)
3. f è differenziabile in (x_0, y_0)

Nel caso particolare in cui f è la funzione di seguito definita

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. studiare la continuità di f in $(0,0)$
2. studiare la derivabilità di f in $(0,0)$
3. studiare la differenziabilità di f in $(0,0)$

Terzo esercizio

Esercizio 5.7.3. Sia $Oxyz$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \ : y = 0,\ |z| \leq 1 - (x-2)^2\right\}.$$

1. Disegnare E e ∂E sul piano $y = 0$.
2. Descrivere ∂E tramite una o più curve parametriche regolari
3. Supponiamo che E rappresenti una lamina piana su cui è distribuito un materiale avente densità superficiale $\rho = x^2$ Calcolare la massa della lamina.

4. Si consideri l'insieme D generato da E con una rotazione completa attorno all'asse z: descrivere D in un opportuno sistema di coordinate cilindriche

5. Calcolare il Volume di D

6. Calcolare l'Area di ∂D

6

a.a. 2007-08

6.1. Prima prova intercorso, prima data

Primo Esercizio

Esercizio 6.1.1. Al variare del parametro reale α si consideri la successione

$$a_n := \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \alpha\left(1 - \cos\left(\frac{3}{n}\right)\right)$$

1. Provare che $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$
converge. Enunciare il/i criterio/i impiegato/i.

2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha
$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$$

3. In corrispondenza di tale valore di α determinare l'insieme dei $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\beta |a_n|$$
converge.

Secondo esercizio

Esercizio 6.1.2. Sia $Oxyz$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 0,\ (x-3)^2 + z^2 \leq 4,\ x \geq 4\right\}.$$

1. Disegnare E e ∂E sul piano $y = 0$.

2. Descrivere ∂E in forma parametrica

3. Supponiamo che E rappresenti una lamina piana su cui è distribuito un materiale avente densità superficiale $\rho = 1 + |z|$. Calcolare la massa della lamina.

4. Si consideri l'insieme D generato da E con una rotazione completa attorno all'asse z.

5. Descrivere D in un opportuno sistema di coordinate cilindriche

6. Calcolare il Volume di D

7. Calcolare l'Area di ∂D.

Terzo esercizio

Esercizio 6.1.3. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = |x| \ln(1 + y)$$

1. Determinare il dominio di f in $\mathbb{R}^2$ e disegnarlo

2. Determinare l'insieme dei punti in cui f non è derivabile

3. Determinare l'insieme dei punti in cui f è derivabile ma non differenziabile

6.2. Prima prova intercorso, prima data

Primo Esercizio

Esercizio 6.2.1. Al variare del parametro reale c si consideri la successione

$$an := \ln\left(1 + \frac{c}{n}\right) + \sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1 \quad n \geq 1$$

1. Determinare per quale/i valore/i di c la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

converge.

2. Enunciare il/i criterio/i impiegato/i.

Secondo esercizio

Esercizio 6.2.2. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-2)}{3^n} y^{2n}$$

1. Determinare l'insieme di convergenza della serie
2. Esplicitare la funzione somma della serie.

Terzo esercizio

Esercizio 6.2.3. Sia $Oxyz$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ : y = 0, \ |z| \leq 1 - (x-2)^2 \right\}.$$

1. Disegnare E e ∂E sul piano $y = 0$.
2. Descrivere ∂E tramite una o più curve parametriche regolari
3. Supponiamo che E rappresenti una lamina piana su cui è distribuito un materiale avente densità superficiale $\rho = x^2$ Calcolare la massa della lamina.
4. Si consideri l'insieme D generato da E con una rotazione completa attorno all'asse z: descrivere D in un opportuno sistema di coordinate cilindriche
5. Calcolare il Volume di D
6. Calcolare l'Area di ∂D

Quarto esercizio

Esercizio 6.2.4. Al variare del parametro reale positivo α si consideri la funzione

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x\,|y|^\alpha\right)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Studiare la continuità di f in $(0, 0)$
2. Studiare la derivabilità di f in $(0, 0)$
3. Studiare la differenziabilità di f in $(0, 0)$

Parte III

Programma del corso e registro delle lezioni

Analisi Matematica II con Elementi di Probabilità e Statistica, ICI 2007–08 Docente: Laura Poggiolini

Oltre ai testi di riferimento [4] o [3] si segnalano i seguenti testi di esercizi: [6, 7], [9, 10] e [5]. Altri esercizi si trovano sui testi [1, 2]. Per la probabilità, oltre al testo di riferimento si segnala il volume [8]

Si ricorda inoltre che parte degli argomenti non sono stati spiegati secondo il testo ma secondo le note che si trovano in rete a partire dalla pagina
`http://www.dma.unifi.it/~poggiolini/didattica/analisi_ii_prob_stat.php`

Programma di Analisi Matematica II

Successioni reali. Limite di successione reale: successioni, convergenti, divergenti, irregolari. Permanenza del segno. Limitatezza delle successoni convergenti (con dimostrazione). Teorema del confronto o dei due carabinieri. Successioni definitivamente monotone. Regolarità delle successioni monotone. Limiti notevoli:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Richiami: il numero di Nepero e e il logaritmo neperiano (o naturale)

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r^n \quad r\in\mathbb{R} & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} \quad a>0 \\
\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} \quad \alpha\in\mathbb{R}\ a>1 & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} \\
\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} \quad a>0
\end{array}$$

La formula di Stirling (senza dimostrazione).

Successione estratta; successione di Cauchy o fondamentale; criterio di Cauchy per le successioni reali.

Serie numeriche: la serie formale. Successione delle somme parziali. Serie convergenti, divergenti e iregolari. Somma della serie. La serie geometrica di ragione $r\in\mathbb{R}$ e la sua successione delle somme parziali (con dimostrazione). Condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica. Riformulazione del criterio di Cauchy per le serie numeriche. La serie armonica. Regolarità delle serie a termini definitivamente non negativi. Criterio del confronto. Criterio di condensazione. La serie armonica generalizzata. Criterio del rapporto (senza dimostrazione). Criterio della radice. Criterio del confronto asintotico (senza dimostrazione).

Serie non a termini positivi: serie assolutamente convergenti e lore convergenza, serie semplicementi convergenti, serie con termini a segni alterni, criterio di Leibniz.

Serie di potenze. Insieme di convergenza, raggio di convergenza, struttura dell'insieme di convergenza. Metodi di calcolo del raggio di convergenza (dimostrazione per il caso della radice k–esima, senza dimostrazione per il caso del rapporto). L'insieme di convergenza delle serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} x^k\,.$$

La serie delle derivate e la serie delle primitive. Teorema di Abel (senza dimostrazione), teorema di integrazione e derivazione per serie (senza dimostrazione). Applicazioni del teorema di integrazione per serie: $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$.

Applicazioni del teorema di derivazione e integrazione per serie: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\arcsin(x)$. Serie di Taylor, serie di MacLaurin, funzioni C^∞ e funzioni C^ω. Condizioni di analiticità. Analiticità delle funzioni $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$.

Richiami su: lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, prodotto scalare, norma e distanza in $\mathbb{R}^n$. grafico di funzione $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; insieme di livello di funzione $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Coordinate nel piano euclideo: coordinate cartesiane e coordinate polari. Coordinate nello spazio euclideo: coordinate cartesiane, coordinate cilindriche e coordinate sferiche.

Domini naturali di funzioni $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$. Elementi di topologia di $\mathbb{R}^n$: palle e sfere. Definizioni: punto interno ad un insieme, interno di un insieme, punto di frontiera di un insieme, frontiera di un insieme, punto di accumulazione, punto isolato, insieme aperto, insieme chiuso, chiusura, insieme limitato.

Teorema di Bolzano–Weierstrass (senza dimostrazione). Nozione di "definitivamente per $x \to x_0$" e di "definitivamente per $x \to \infty$". Limiti di funzioni $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Equivalenza della convergenza di una funzione vettoriale con la convergenza componente per componente. Continuità di funzioni $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Insiemi compatti e funzioni continue, teorema di Weierstrass (senza dimostrazione). Definizione di curva; sostegno e ordinamento indotto. Insiemi connessi per archi. Teorema per il calcolo dei limiti tramite le restrizioni (senza dimostrazione). Uso delle coordinate polari per il calcolo dei limiti.

Derivate direzionali, derivate parziali, gradiente, funzioni derivabili.

Algebra delle funzioni derivabili. Equivalenza tra derivabilità ed esistenza dell'approssimazione lineare per funzioni di una variabile reale. Differenziabilità. Relazioni tra differenziabilità, derivabilità e continuità in un punto. Teorema del differenziale totale (senza dimostrazione). Iperpiano tangente al grafico; il caso

$n = 2$: piano tangente e retta normale al grafico. Derivabilità della composizione tra una curva derivabile ed una funzione differenziabile.

Teorema del valor medio, derivate direzionali e derivate parziali di ordine superiore , teorema di Schwarz, polinomio di Taylor e teorema di Peano (dimostrazione solo per l'ordine $m = 2$).

Massimi e minimi relativi. Condizione necessaria del primo ordine. condizione necessaria e condizione sufficiente del secondo ordine. Forme quadratiche definite e semidefinite.

Criterio algebrico per la (semi–)definitezza di una matrice reale quadrata simmetrica (senza dimostrazione); criterio di Sylvester (senza dimostrazione). Curve. Prime definizioni. Vettore, retta e versore tangente. Curve cartesiane. Curve polari.

Curve regolari, curve equivalenti. Spezzata indotta da una suddivisione, lunghezza di una curva. Curve rettificabili. Rettificabilità e lunghezza di una curva $C^1([a, b])$ (senza dimostrazione). Lunghezza di curve equivalenti. Lunghezza di curve cartesiane, curve polari.

Curve C^1 a tratti. Integrali curvilinei di prima specie. Forme differenziali e campi vettoriali. Integrali curvilinei di seconda specie. Forme esatte.

Forme esatte su aperti connessi: condizioni equivalenti. Forme chiuse. La forma $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$. Curve omotope in un aperto connesso, insiemi semplicemente connessi. Curve omotope ed integrale di una forma chiusa (senza dim.). Equivalenza tra forme chiuse e forme esatte di classe C^1 in aperti semplicemente connessi. Relazioni tra forme, campi di forze, integrali di linea e lavoro.

Suddivisione di un rettangolo. Somma superiore e somma superiore. Integrabilità secondo Riemann su un rettangolo. La funzione $\chi_{\mathbb{Q}^2}$.

Criterio di integrabilità (senza dim.). Linearità e monotonia (senza dim.). Integrabilità di $|f|$ (senza dim.). Teorema della media (senza dim.). Fornmula a di riduzione sui rettangoli. (senza dim.). Integrale di una funzione limitata su un insieme limitato. Insiemi misurabili secondo PeanoJordan. Criterio di misurabilità di un insieme limitato. Caratterizzazione degli insiemi a di misura nulla (senza dim.) Misura di un segmento di retta.

Integrali doppi: baricentro e momento di inerzia per un dominio bidimensionale.

Misura del grafico di una funzione $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Proprietà delle funzioni integrabili su domini misurabili (senza dim.). Domini ysemplici e domini xsemplici. Teorema di riduzione su domini ysemplici o xsemplici (senza dim.). Cambiamento di variabile negli integrali doppi: trasfor- mazione di un rettangolo elementare mediante un diffeomorfismo C^1. Coordinate polari, $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$,

Integrali tripli. Cambiamento di variabile negli integrail tripli, coordinate sferiche e cilindriche. Volume dei solidi di rotazione.

Curve di Jordan, superfici elementari, superfici di rotazione, superfici cartesiane. Esistenza del piano tangente.

Interno e bordo di una superficie. Superfici regolari. Regolarità del grafico, regolarità di una superficie di rotazione. Area di superficie. Integrale di superficie.

Teorema del gradiente, domini regolari, teorema della divergenza. Esempi ed esercizi.

Esercizi sul teorema della divergenza. Superfici elementarri orientabili. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie elementare orientabile.

Teorema di Stokes.

Programma di Elementi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

Statistica descrittiva, caratteri qualitativi, quantitativi discreti, quantitativi continui. Campione, modalità, effettivo (o frequenza assoluta), frequenza relativa. Istogrammi, moda, valori modali. Parametri descrittivi dei caratteri numerici: media (aritmetica), varianza e loro proprietà. Quantili, quartili, range e intervallo interquartile. Retta di regressione, covarianza e coefficiente di correlazione. Disuguaglianza di Chebyshev. Media geometrica, media armonica, media quadratica.

Fenomeni deterministici e fenomeni aleatori. Eventi ed insiemi associati. Leggi di DeMorgan (senza dim.). σ–algebre e loro proprietà. Definizione assiomatica della probabilità. Proprietà elementari.

Spazi equiprobabili. Disposizioni, permutazioni, combinazioni. Legge ipergeometrica. Probabilità condizionata. Partizione coerente. Formula di Bayes, formula delle probabilità totali. Eventi indipendenti.

Variabili aleatorie. Funzione di ripartizione. Variabili aleatorie discrete. Densità discrete. Esempi: densità binomiale, densità geometrica. Densità geometrica modificata. Densità di Poisson.

Variabili aleatorie pluri–dimensionali. Densità congiunta, densità marginali. Esempio di variabili aleatorie bi–dimensionali con medesime densità marginali ma diversa densità congiunta. Indipendenza. Densità multinomiale.

Densità condizionale. Composizioni e indipendenza. Densità della somma di v.a. discrete indipendenti e non. Densità della somma di v.a. indipendenti di densità di Bernoulli o di Poisson. Funzione di ripartizione del massimo e del minimo di due v.a. discrete indipendenti.

Esempi di calcolo con la densità geometrica modificata. Speranza matematica: composizioni, linearità, prodotto di due v.a. discrete indipendenti. Monotonia. Esempi: speranza matematica di v.a. di Bernoulli, binomiali, ipergeometriche, di Poisson, geometrica modificata.

Momenti e momenti centrati, varianza, covarianza. Proprietà della varianza. Esempi: varianza di v.a. di Bernoulli, binomiali, di Poisson, geometrica modificata, v.a. di densità ipergeometrica.

Disuguaglianza di Chebyshev, Legge dei grandi numeri, retta di regressione, coefficiente di correlazione e sue proprietà.

Proprietà generali della funzione di ripartizione. Variabili aleatorie con funzione di ripartizione continua. Densità di una variabile aleatoria. Densità uniforme su un intervallo. Densità esponenziale di parametro λ e proprietà di mancanza di memoria. Quantili. Legge normale $N(0,1)$. Proprietà di $N(0,1)$ e dei suoi quantili.

Densità della v.a. X^2, nota la densità di X

Densità della v.a. $aX+b$, $a \neq 0$ nota la densità di X. Quantli di $aX+b$ noti i quantili di X. Leggi normali $N(\mu,\sigma^2)$.

V.a. indipendenti, funzione di ripartizione congiunta, densità congiunta. Densità marginali.

Densità della somma di due v.a. X e Y aventi densità congiunta f (senza dimostrazione).

Densità per $Z := \max\{X,Y\}$ e $\widetilde{Z} := \min\{X,Y\}$ dove X e Y sono v.a. indipendenti di densità note.

Speranza matematica per variabili aleatorie continue con densità. Proprietà: linearità, monotonia, composizione (senza dimostrazione). Speranza del prodotto di v.a. indipendenti (senza dimostrazione) Momenti e momenti centrati. Varianza. Speranza matematica e varianza di: v.a. uniforme su un intervallo, v.a. esponenziale, v.a. normali.

Bibliografia

[1] Robert A. Adams. *Calcolo differenziale 1. Funzioni di una variabile reale.* CEA, 2007.

[2] Robert A. Adams. *Calcolo differenziale 2. Funzioni di piú variabili.* CEA, 2007.

[3] Michiel Bertsch and Roberta Dal Passo. *Elementi di Analisi Matematica.* Aracne, 2001.

[4] Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, and Lorenzo Giacomelli. *Analisi Matematica.* McGraw–Hill, 2007.

[5] Boris P. Demidovic. *Esercizi e problemi di analisi matematica.* Editori Riuniti, 2003.

[6] Enrico Giusti. *Esercizi e complementi di Analisi Matematica, volume primo.* Bollati Boringhieri, 1991.

[7] Enrico Giusti. *Esercizi e complementi di Analisi Matematica, volume secondo.* Bollati Boringhieri, 1992.

[8] Sheldon M. Ross. *Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze.* Apogeo, 2003.

[9] Sandro Salsa and Annamaria Squellati Marinoni. *Esercizi di analisi matematica 2. Vol. 1: Funzioni di più variabili e ottimizzazione. Serie numeriche e di funzioni.* Zanichelli, 1993.

[10] Sandro Salsa and Annamaria Squellati Marinoni. *Esercizi di analisi matematica 2. Vol. 2: Integrazione.* Zanichelli, 1993.

Registro delle lezioni

1 24 settembre 2007 – 2 ore

Successioni reali. Limite di successione reale: successioni, convergenti, divergenti, irregolari. Permanenza del segno. Limitatezza delle successoni convergenti (con dimostrazione). Teorema del confronto o dei due carabinieri. Successioni definitivamente monotone. Regolarità delle successioni monotone. Limiti notevoli:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Richiami: il numero di Nepero e e il logaritmo neperiano (o naturale)

$$\begin{array}{ll}
\lim\limits_{n\to+\infty} r^n \quad r\in\mathbb{R} & \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} \quad a>0 \\
\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} \quad \alpha\in\mathbb{R}\ a>1 & \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} \\
\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} & \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} \quad a>0
\end{array}$$

La formula di Stirling (senza dimostrazione).

Successione estratta; successione di Cauchy o fondamentale; criterio di Cauchy per le successioni reali.

Serie numeriche: la serie formale. Successione delle somme parziali. Serie convergenti, divergenti e iregolari. Somma della serie. La serie geometrica di ragione $r\in\mathbb{R}$ e la sua successione delle somme parziali (con dimostrazione).

2 26 settembre 2007 – 2 ore

Condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica. Riformulazione del criterio di Cauchy per le serie numeriche. La serie armonica. Regolarità delle serie a termini definitivamente non negativi. Criterio del confronto. Criterio di condensazione. La serie armonica generalizzata. Criterio del rapporto (senza dimostrazione). Criterio della radice. Criterio del confronto asintotico (senza dimostrazione). Esercizi.

3 27 settembre 2007 – 2 ore

Serie assolutamente convergenti e lore convergenza, serie semplicementi convergenti, serie con termini a segni alterni, criterio di Leibniz. Esercizi.

4 1 ottobre 2007 – 2 ore

Serie di potenze. Insieme di convergenza, raggio di convergenza, struttura dell'insieme di convergenza. Metodi di calcolo del raggio di convergenza (dimostrazione per il caso della radice k–esima, senza dimostrazione per il caso del rapporto). L'insieme di convergenza delle serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\,,\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}x^k\,,\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}x^k\,,\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}x^k\,.$$

La serie delle derivate e la serie delle primitive. Teorema di Abel (senza dimostrazione), teorema di integrazione e derivazione per serie (senza dimostrazione). Applicazioni del teorema di integrazione per serie: $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$.

5 3 ottobre 2007 – 2 ore

Applicazioni del teorema di derivazione e integrazione per serie: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\arcsin(x)$. Serie di Taylor, serie di MacLaurin, funzioni C^∞ e funzioni C^ω. Condizioni di analiticità. Analiticità delle funzioni $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$. Esercizi.

6 4 ottobre 2007 – 2 ore

Richiami su: lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, prodotto scalre, norma e distanza in $\mathbb{R}^n$. grafico di funzione $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; insieme di livello di funzione $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Esempio: il grafico e gli insiemi di livello della funzione $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$.

Coordinate nel piano euclideo: coordinate cartesiane e coordinate polari. Coordinate nello spazio euclideo: coordinate cartesiane, coordinate cilindriche e coordinate sferiche.

Domini naturali di funzioni $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$. Esempi:

$$f(x,y) = \sqrt{-\ln(x^2+y^2)} \qquad g(x,y) = \frac{1}{\ln(x^2-y^2)}.$$

Elementi di topologia di $\mathbb{R}^n$: palle e sfere. Definizioni: punto interno ad un insieme, interno di un insieme, punto di frontiera di un insieme, frontiera di un insieme, punto di accumulazione, punto isolato, insieme aperto, insieme chiuso, chiusura, insieme limitato. Esercizi sulla rappresentazione di insiemi del piano mediante coordinate cartesiane e coordinate polari.

7 8 ottobre 2007 – 2 ore

Lezione tenuta dal Dott. Lorenzo Fusi

Esercizi relativi a successioni e serie numeriche, serie di potenze e serie di Taylor.

8 10 ottobre 2007 – 2 ore

Teorema di Bolzano–Weierstrass (senza dimostrazione). Nozione di "definitivamente per $x \to x_0$" e di "definitivamente per $x \to \infty$". Limiti di funzioni $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Equivalenza della convergenza di una funzione vettoriale con la convergenza componente per componente. Continuità di funzioni $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Insiemi compatti e funzioni continue, teorema di Weierstrass (senza dimostrazione). Definizione di curva; sostegno e ordinamento indotto. Insiemi connessi per archi. Teorema per il calcolo dei limiti tramite le restrizioni (senza dimostrazione). Uso delle coordinate polari per il calcolo dei limiti. Alcuni esempi ed esercizi sul calcolo dei limiti e sulla continuità.

9 11 ottobre 2007 – 2 ore

Esercizi su linee di livello e sulla determinazione degli estremi assoluti tramite il loro studio (esercizi tratti da scritti di appelli precedenti). Derivate direzionali, derivate parziali, gradiente, funzioni derivabili: esempi. Derivabilità e mancanza di continuità della funzione.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

10 15 ottobre 2007 – 2 ore

Lezione tenuta dal Dott. Lorenzo Fusi

Esercizi relativi a serie di potenze, domini di funzioni di due variabili reali, ricerca di max e min di funzioni di due variabili reali tramite lo studio degli insiemi di livello e alimiti di funzioni di due variabili reali.

11 17 ottobre 2007 – 2 ore

Algebra delle funzioni derivabili. Equivalenza tra derivabilità ed esistenza dell'approssimazione lineare per funzioni di una variabile reale. Differenziabilità. Relazioni tra differenziabilità, derivabilità e continuità in un punto. Teorema del differenziale totale (senza dimostrazione). Iperpiano tangente al grafico; il caso $n = 2$: piano tangente e retta normale al grafico. Derivabilità della composizione tra una curva derivabile ed una funzione differenziabile.

12 18 ottobre 2007 – 2 ore

Teorema del valor medio, derivate direzionali e deerivate parziali di ordine superiore , teorema di Schwarz, polinomio di Taylor e teorema di Peano (dimostrazione solo per l'ordine $m = 2$).

13 22 ottobre 2007 – 3 ore

Lezione tenuta dal Dott. Lorenzo Fusi per 2 ore/3

Massimi e minimi relativi. Condizione necessaria del primo ordine. condizione necessaria e condizione sufficiente del secondo ordine. Forme quadratiche definite e semidefinite.

Esercizi su i polinomi di Taylor, su problemi di massimo e minimo tramite lo studio degli insiemi di livello, e su serie di potenze.

14 25 ottobre 2007 – 2 ore

Criterio algebrico per la (semi–)definitezza di una matrice reale quadrata simmetrica (senza dimostrazione); criterio di Sylvester (senza dimostrazione). Esercizi su max e min assoluti in domini chiusi e limitati.

Curve. Prime definizioni. Vettore, retta e versore tangente. Curve cartesiane. Curve polari.

15 29 ottobre 2007 – 2 ore

Lezione tenuta dal Dott. Lorenzo Fusi

Esercizi su max e min assoluti in domini chiusi e limitati. Esercizi sulla natura dei punti critici di una funzione di due variabili reali

16 31 ottobre 2007 – 2 ore
Curve regolari, curve equivalenti. Spezzata indotta da una suddivisione, lunghezza di una curva. Curve rettificabili. Rettificabilità e lunghezza di una curva $C^1([a,b])$ (senza dimostrazione). Lunghezza di curve equivalenti. Lunghezza di curve cartesiane, curve polari. Esempi ed esercizi (cardioide, elica cilindrica, elica conica).

17 5 novembre 2007 – 2 ore
Curve C^1 a tratti. Integrali curvilinei di prima specie. Forme differenziali e campi vettoriali. Integrali curvilinei di secnda specie. Forme esatte.

18 7 novembre 2007 – 2 ore
Esercizi su curve ed integrali curvilinei.

19 8 novembre 2007 – 2 ore
Forme esatte su aperti connessi: condizioni equivalenti. Forme chiuse. La forma $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$. Curve omotope in un aperto connesso, insiemi semplicemente connessi. Curve omotope ed integrale di una forma chiusa (senza dim.). Equivalenza tra forme chiuse e forme esatte di classe C^1 in aperti semplicemente connessi. Esempio.

20 12 novembre 2007 - 2 ore
Lezione tenuta dal Dott. Lorenzo Fusi Esercizi su integrali di linea di prima e seconda specie. Relazioni tra forme, campi di forze, integrali di linea e lavoro.

21 14 novembre 2007 - 2 ore
Esercizi sulle forma differenziali esatte e chiuse. Suddivisione di un rettangolo. Somma superiore e somma superiore. Integrabilità secondo Riemann su un rettangolo. La funzione $\chi_{\mathbb{Q}^2}$.

22 15 novembre 2007 - 2 ore
Criterio di integrabilità (senza dim.). Linearità e monotonia (senza dim.). Integrabilità di $|f|$ (senza dim.). Teorema della media (senza dim.). Fornmula a di riduzione sui rettangoli. (senza dim.). Esempi. Integrale di una funzione limitata su un insieme limitato. Insiemi misurabili secondo PeanoJordan. Criterio di misurabilit‘ di un insieme limitato. Caratterizzazione degli insiemi a di misura nulla (senza dim.) Misura di un segmento di retta.

23 19 novembre 2007 - 2 ore
Lezione tenuta dal Dott. Lorenzo Fusi
Integrali doppi: baricentro e momento di inerzia per un dominio bidimensionale. Domini del piano definiti da disequazioni.

24 20 novembre 2007 - 3 ore
Misura del grafico di una funzione $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Proprietà delle funzioni integrabili su domini misurabili (senza dim.). Domini ysemplici e domini xsemplici. Teorema di riduzione su domini ysemplici o xsemplici (senza dim.). Esempi. Cambiamento di variabile negli integrali doppi: trasfor- mazione di un rettangolo elementare mediante un diffeomorfismo C^1 . Esempi. Coordinate polari. Esempi.

25 21 novembre 2007 - 2 ore
Esercizi su integrali doppi.

26 22 novembre 2007 - 2 ore
Integrali tripli.

27 26 novembre 2007 - 2 ore
Lezione tenuta dal Dott. Lorenzo Fusi
$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$, cambiamento di variabile negli integrail tripli, coordinate sferiche e cilindriche. Esercizi sugli integrali doppi.

28 28 novembre 2007 - 2 ore
Esercizi sugli integrali tripli. Curve di Jordan, superfici elementari, superfici di rotazione, superfici cartesiane. Esistenza del piano tangente.

29 29 novembre 2007 - 2 ore
Interno e bordo di una superficie. Superfici regolari. Regolarità del grafico, regolarità di una superficie di rotazione. Area di superficie. Integrale di superficie. Esempi ed esercizi.

30 3 dicembre 2007 - 2 ore
Lezione tenuta dal Dott. Lorenzo Fusi
Teorema del gradiente, domini regolari, teorema della divergenza. Esempi ed esercizi.

31 5 dicembre 2007 - 2 ore
Esercizi sul teorema della divergenza. Superfici elementarri orientabili. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie elementare orientabile.

32 6 dicembre 2007 - 2 ore
Teorema di Stokes, volume dei solidi di rotazione, esempi ed esercizi.

33 22 gennaio 2008 – 2 ore
Statistica descrittiva, caratteri qualitativi, quantitativi discreti, quantitativi continui. Campione, modalità, effettivo (o frequenza assoluta), frequenza relativa. Istogrammi, moda, valori modali. Parametri descrittivi dei caratteri numerici: media (aritmetica), varianza e loro proprietà. Quantili, quartili, range e intervallo interquartile.

34 24 gennaio 2008 – 2 ore

Retta di regressione, covarianza e coefficiente di correlazione. Disuguaglianza di Chebyshev. Media geometrica, media armonica, media quadratica. Fenomeni deterministici e fenomeni aleatori. Eventi ed insiemi associati. Leggi di DeMorgan (senza dim.). σ–algebre e loro proprietà. Definizione assiomatica della probabilità. Prime proprietà.

35 29 gennaio 2008 – 2 ore

Spazi equiprobabili. Esempi. Disposizioni, permutazioni, combinazioni. Esempi.

36 31 gennaio 2008 – 2 ore

Legge ipergeometrica. Probabilità condizionata. Partizione coerente. Formula di Bayes, formula delle probabilità totali. Eventi indipendenti.

37 1^o febbraio 2008 – 2 ore

Variabili aleatorie. Funzione di ripartizione e densità.

38 7 febbraio 2008 – 2 ore

Variabili aleatorie discrete. Densità discrete. Esempi: densità binomiale, densità geometrica. Densità geometrica modificata. Densità di Poisson.

39 8 febbraio 2008 – 2 ore

Esercizi su variabili aleatorie discrete.

40 14 febbraio 2008 – 2 ore

Variabili aleatorie pluri–dimensionali. Densità congiunta, densità marginali. Esempio di variabili aleatorie bi–dimensionali con medesime densità marginali ma diversa densità congiunta. Indipendenza. Densità multinomiale.

41 15 febbraio 2008 – 2 ore

Densità condizionale. Composizioni e indipendenza. Densità della somma di v.a. discrete indipendenti e non. Densità della somma di v.a. indipendenti di densità di Bernoulli o di Poisson. Funzione di ripartizione del massimo e del minimo di due v.a. discrete indipendenti. Esempi.

42 21 febbraio 2008 – 2 ore

Esempi di calcolo con la densità geometrica modificata. Speranza matematica: composizioni, linearità, prodotto di due v.a. discrete indipendenti. Monotonia. Esempi: speranza matematica di v.a. di Bernoulli, binomiali, ipergeometriche, di Poisson, geometrica modificata.

43 22 febbraio 2008 – 2 ore

Esercizi. Momenti, varianza, covarianza. Proprietà della varianza. Esempi: varianza di v.a. di Bernoulli, binomiali, di Poisson, geometrica modificata.

44 29 febbraio 2008 – 2 ore

Esempi: Varianza delle v.a. di densità ipergeometrica.

Disuguaglianza di Chebyshev, Legge dei grandi numeri, retta di regressione, coefficiente di correlazione e sue proprietà.

45 6 marzo 2008 – 2 ore

Proprietà della funzione di ripartizione. Variabili aleatorie con funzione di ripartizione continua. Densità di una variabile aleatoria. Densità uniforme su un intervallo. Densità esponenziale di parametro λ e proprietà di mancanza di memoria. Quantili. Legge normale $N(0,1)$. Proprietà di $N(0,1)$ e dei suoi quantili.

Densità della v.a. X^2, nota la densità di X

46 7 marzo 2008 – 2 ore

Densità della v.a. $aX+b$, $a \neq 0$ nota la densità di X. Quantli di $aX+b$ noti i quantili di X. Leggi normali $N(\mu, \sigma^2)$.

V.a. indipendenti, funzione di ripartizione congiunta, densità congiunta. Densità marginali. Esempio: distribuzione uniforme su un cerchio: calcolo delle densità marginali. (Per esercizio: calcolo delle densità marginali per una distribuzione uniforma su un rettangolo).

Indipendenza per v.a. che ammettono densità congiunta.

Densità della somma di due v.a. X e Y aventi densità congiunta f (senza dim).

Densità per $Z := \max\{X,Y\}$ e $\widetilde{Z} := \min\{X,Y\}$ dove X e Y sono v.a. indipendenti di densità note.

47 13 marzo 2008 – 2 ore

Speranza matematica per variabili aleatorie continue con densità. Proprietà: linearità, monotonia, composizione (senza dimostrazione). Speranza del prodotto di v.a. indipendenti (senza dimostrazione) Momenti e momenti centrati. Varianza. Speranza matematica e varianza di: v.a. uniforme su un intervallo, v.a. esponenziale, v.a. normali. Esercizi.

48 14 marzo 2008 – 2 ore

Esercizi.