

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione.

ESEMPIO $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. discrete

$X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ $\mathcal{I}$ insieme finito o numerabile

$Y(\Omega) = \{y_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ $\mathcal{K}$ insieme finito o numerabile

$$(X, Y): \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$$

$$(X, Y)(\Omega) \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega) \text{ è sicuramente un insieme discreto}$$

$$(x_i, y_k) \in (X, Y)(\Omega)$$

$$p_{ik} := \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_k)$$

DENSITÀ CONGIUNTA

DELLE V.A. X e Y

NEL VALORE (x_i, y_k)

$$\{\omega \in \Omega: (X, Y)(\omega) = (x_i, y_k)\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega \in \Omega: Y(\omega) = y_k\}$$

Osservazione Se conosco $p_{ik} \forall i \in \mathcal{I}$ e $\forall k \in \mathcal{K}$

$$\{X=x_i\} = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} \{X=x_i, Y=y_k\}$$

$\hookrightarrow$ numerabile

$$\{X=x_i, Y=y_k\} \text{ sono disgiunti } 2 \text{ a } 2$$

$$\mathbb{P}(X=x_i) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_k) = \sum_{k \in \mathcal{K}} p_{ik}$$

$$\text{Analogamente } \mathbb{P}(Y=y_k) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_k) = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{ik}$$

Le densità di X e di Y si dicono **DENSITÀ MARGINALI** $m(X, Y)$

OSSERVAZIONE Note le densità marginali non conosco le densità congiunte $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\Omega = [0, 1]$ $\mathcal{E}$ gli insiemi di Borel contenuti in $[0, 1]$

$\mathbb{P}$ è la probabilità l.c. $\mathbb{P}([a, b]) = \mathbb{P}([a, b]) = b-a \quad \forall (a, b) \subseteq [0, 1]$

$$I = [0, \frac{1}{2}] \quad X = \mathbb{1}_I$$

$$J = [\frac{1}{2}, 1] \quad Y = \mathbb{1}_J$$

X e Y sono v.a. con distribuzione di Bernoulli:

$$p := \mathbb{P}(X=1) =$$

$$\mathbb{P}([0, \frac{1}{2}]) = \frac{1}{2} \quad \leftarrow$$

$$q := \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}([\frac{1}{2}, 1]) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$

$$p := \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}\left([0, \frac{1}{2}]\right) = \frac{1}{2} \leftarrow$$

$$q := \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}\left([2, 1]\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \uparrow$$

$$(X, Y): \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$$

$$(X, Y)(\Omega) \subseteq \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = 0 \quad X(\omega) = Y(\omega) = 1 \text{ SSE } \omega \in \text{INF} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{P}(X=1, Y=1) = 0}$$

$$E = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad X = \mathbb{1}_E$$

$$F = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \quad Y = \mathbb{1}_F$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2} \leftarrow$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \leftarrow$$

$$\underline{\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{4}}$$

$$X(\omega) = Y(\omega) = 1 \text{ SSE } \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X_1, X_2, \dots, X_N: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni

$X = (X_1, \dots, X_N): \omega \in \Omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_N(\omega)) \in \mathbb{R}^N$

Dico che X è una v.a. MULTIVARIATA (o una v.a. VETTORIALE) se $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \quad \{X \in A\} \in \mathcal{E}$

Equivalentemente: dico che X è una v.a. multivariata se

$\forall t_1, t_2, \dots, t_N \in \mathbb{R}$

$$\{X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_N \leq t_N\} \in \mathcal{E}$$

PROP Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato - Sia $X = (X_1, \dots, X_N): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$

Allora X è una v.a. multivariata SSE $X_1, \dots, X_N$ sono v.a.

DIN ① $X_1, X_2, \dots, X_N$ sono v.a.

Siano $t_1, t_2, \dots, t_N \in \mathbb{R}$

$$\{X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_N \leq t_N\} = \bigcap_{i=1}^N \underbrace{\{X_i \leq t_i\}}_{\in \mathcal{E} \quad \forall i=1, \dots, N} \in \mathcal{E} \Rightarrow X \text{ è v.a. multivariata}$$

② X è v.a. multivariata

$$i=1 \quad \{X_1 \leq t_1\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{X_1 \leq t_1, X_2 \leq n, \dots, X_N \leq n\}}_{\in \mathcal{E} \quad \forall n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E} \Rightarrow X_1 \text{ è una v.a.}$$

Analogo per le altre componenti:

LEGGE CONGIUNTA

Sia $X = (X_1, \dots, X_N)$ v.e. multivariata su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\forall (t_1, \dots, t_N) \quad \{X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_N \leq t_N\} \in \mathcal{E} \Rightarrow$ posso considerare
 $\mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_N \leq t_N)$

La funzione $F: (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_N \leq t_N) \in \mathbb{R}$
 si chiama legge congiunta o funzione di ripartizione congiunta di $X_1, \dots, X_N$

DISTRIBUZIONE CONGIUNTA

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \quad \{X \in A\} \in \mathcal{E} \Rightarrow$ posso considerare $\mathbb{P}(X \in A)$

$$\mathbb{P}_X: A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \in \mathbb{R}$$

Si può dimostrare che $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato

$\mathbb{P}_X$ si chiama DISTRIBUZIONE CONGIUNTA di $X_1, \dots, X_N$

Le distribuzioni di $X_1, X_2, \dots, X_N$ si dicono DISTRIBUZIONI MARGINALI di $X = (X_1, \dots, X_N)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X_1}(C) &= \mathbb{P}(X_1 \in C) \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ \mathbb{P}_{X_2}(C) &= \mathbb{P}(X_2 \in C) \\ &\vdots \\ \mathbb{P}_{X_N}(C) &= \mathbb{P}(X_N \in C) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE Se conosco la distribuzione congiunta, conosco anche le marginali:

$$N=2 \quad (X, Y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mathbb{P}_X(C) &= \mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(X \in C, Y \in \mathbb{R}) = \\ &= \mathbb{P}((X, Y) \in C \times \mathbb{R}) = \\ &= \mathbb{P}_{(X, Y)}(C \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$\{X \in C\} = \{X \in C, Y \in \mathbb{R}\}$ }

$$\begin{aligned} \text{Analogamente} \quad \mathbb{P}_Y(C) &= \mathbb{P}(Y \in C) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}, Y \in C) = \\ &= \mathbb{P}((X, Y) \in \mathbb{R} \times C) = \mathbb{P}_{(X, Y)}(\mathbb{R} \times C) \end{aligned}$$

LEGGI A.C. NEL CASO VETTORIALE

Sia $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ - Dico che F è una funzione A.C. se $\exists f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

f è sommabile e $\forall (t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$

$$F(t_1, t_2, \dots, t_N) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \dots \int_{-\infty}^{t_N} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

t e sommatoria e

$$(t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}$$

$$F(t_1, t_2, \dots, t_N) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \dots \int_{-\infty}^{t_N} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

PROPRIETÀ

Siano $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Allora

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]}$$

DIN

Se $\mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2] = +\infty \Rightarrow$ non c'è niente da dimostrare

Se $\mathbb{E}[X^2] = 0$ o $\mathbb{E}[Y^2] = 0$?

Se $\mathbb{E}[X^2] = 0 \Rightarrow \{X=0\}$ è un evento di probabilità 1

$\Downarrow$
 $\{|XY|=0\}$ è un evento di probabilità 1

$\Downarrow$
 $\mathbb{E}[|XY|] = 0 \Rightarrow$ non c'è niente da dimostrare

Supponiamo $\mathbb{E}[X^2]$ e $\mathbb{E}[Y^2]$ strettamente positivi e finiti.

$$A(\omega) := \frac{X(\omega)}{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}}$$

$$B(\omega) := \frac{Y(\omega)}{\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}}$$

$$\forall \omega \in \Omega \quad 0 \leq (A(\omega) - B(\omega))^2 = A^2(\omega) + B^2(\omega) - 2A(\omega)B(\omega)$$

$$2A(\omega)B(\omega) \leq A^2(\omega) + B^2(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\mathbb{E}[2AB] \leq \mathbb{E}[A^2 + B^2] = \mathbb{E}[A^2] + \mathbb{E}[B^2]$$

$$2 \mathbb{E}\left[\frac{|X|}{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}} \frac{|Y|}{\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{\mathbb{E}[X^2]}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{Y^2}{\mathbb{E}[Y^2]}\right]$$

$$\frac{2}{\sqrt{\mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]}} \mathbb{E}[|XY|] \leq \frac{1}{\cancel{\mathbb{E}[X^2]}} \cancel{\mathbb{E}[X^2]} + \frac{1}{\cancel{\mathbb{E}[Y^2]}} \cancel{\mathbb{E}[Y^2]} = 2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]}$$



Siano X e Y v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$ esistono e sono finiti.

$$X - \mathbb{E}[X] \quad Y - \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{E}[|(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \cdot \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]}$$

$$\mathbb{E}[|(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])|] \leq \sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}$$

$$\sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]}$$

$\Rightarrow$ Se X e Y sono v.a. con varianza finita $\Rightarrow$ la v.a.

$Z := (X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])$ ha valore atteso finito

Definisco COVARIANZA di X e Y questo valore:

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

PROPRIETÀ ① $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY - \mathbb{E}[X]Y - \mathbb{E}[Y]X + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]] =$$

$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \cancel{\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X]} + \cancel{\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Cov}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha \gamma \text{Cov}(X, Y)$$

DA FARE ESERCIZIO

$$\textcircled{3} \quad \text{Cov}(X, X) = \text{Var}[X]$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\mathbb{E}[(X + Y - \mathbb{E}[X + Y])^2] = \mathbb{E}[(\cancel{X - \mathbb{E}[X]} + \cancel{Y - \mathbb{E}[Y]})^2] =$$

$$= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2 + (Y - \mathbb{E}[Y])^2 + 2(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

$$= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] + \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] + 2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

$$= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

$$(5) \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Supponiamo che X e Y siano v.a. con legge congiunta A.C.

$$F(s, t) = P(X \leq s, Y \leq t) = \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^t f(x, y) dx dy \quad f(x, y) \geq 0, f \text{ sommabile}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq s) &= P(X \leq s, Y \in \mathbb{R}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^t f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^s \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx \quad g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \end{aligned}$$

$$F_X(s) = P(X \leq s) = \int_{-\infty}^s g(x) dx \quad \Rightarrow F_X \text{ è una funzione AC associata alla densità } g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$$

Analogamente: F_Y è una funzione AC associata alla densità

$$h(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

V.A. INDIPENDENTI

X, Y v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$

X e Y si dicono indipendenti se

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

$$\text{equivalentemente } P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$$

N.B. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $A = (-\infty, s]$ $B = (-\infty, t]$

$$F_{X,Y}(s, t) = P(X \leq s, Y \leq t) = P(X \leq s)P(Y \leq t) = F_X(s)F_Y(t)$$

PROPRIETÀ $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ v.a. indipendenti su $(\Omega, \mathcal{E}, P)$

$g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$ $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue

Considero le funzioni composte

$$g \circ X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$f \circ Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Considero le funzioni composte

$$g \circ \Lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Sono entrambe v.a. e sono indipendenti

Din ① $g \circ X$ è v.a.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \{g \circ X \in A\} &= \{\omega \in \Omega: g(X(\omega)) \in A\} = \\ &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in \underbrace{g^{-1}(A)}_{\substack{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}}\} = \{X \in g^{-1}(A)\} \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

Analogamente $f \circ Y$ è v.a.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \mathbb{P}(g \circ X \in A, f \circ Y \in B) &= \mathbb{P}(X \in g^{-1}(A), Y \in f^{-1}(B)) \\ &= \mathbb{P}(X \in g^{-1}(A)) \mathbb{P}(Y \in f^{-1}(B)) = \mathbb{P}(g \circ X \in A) \mathbb{P}(f \circ Y \in B) \end{aligned}$$

PROPRIETÀ Il valore atteso del prodotto di v.a. indipendenti è il prodotto dei valori attesi

Se $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, t.c.

$\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$ esistono finiti $\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$$\Downarrow \\ \text{Cov}(X, Y) = 0$$

PROPRIETÀ Siano $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con X e Y con distribuzione congiunta AC associata alla densità $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$

Sia $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$ la densità di X

e sia $h(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$ la densità di Y

$$\text{Allora} \quad f(x, y) = g(x)h(y)$$

$$\text{Din } s, t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(X \leq s, Y \leq t) = \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^t f(x, y) dx dy$$

$$\mathbb{P}(X \leq s) \mathbb{P}(Y \leq t) = \left(\int_{-\infty}^s g(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^t h(y) dy \right) = \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^t g(x)h(y) dx dy$$

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^t f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^t g(x)h(y) dx dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) h(y) dx dy$$

$$\Rightarrow f(x,y) = g(x)h(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Somma di v.a. indipendenti

X e Y v.a. indipendenti discrete i.c. $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$ sono contenute in $\mathbb{Z}$
 Sianamente $(X+Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad P(X+Y=k) = P\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{X=j, Y=k-j\}\right) =$$

unione numerabile di eventi a 2 a 2
 disgiunti

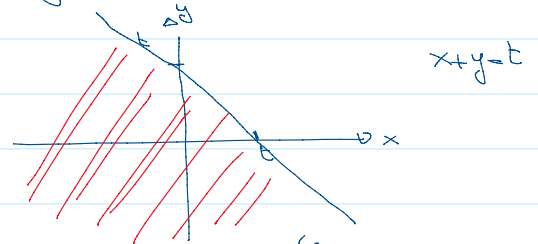
$$\begin{aligned} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} P(X=j, Y=k-j) = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} P(X=j) P(Y=k-j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j q_{k-j} \end{aligned}$$

$$j \in \mathbb{Z} \quad p_j = P(X=j)$$

$$q_j = P(Y=j)$$

Siano $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. con legge congiunta A.C. associata alla densità
 $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$

$$P(X+Y \leq t) = \iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq t\}} f(x,y) dx dy$$



$$\left[P(X \leq s_1, Y \leq s_2) = \int_{-\infty}^{s_1} \int_{-\infty}^{s_2} f(x,y) dx dy \Rightarrow P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y) dx dy \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \right]$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \text{ e } y \leq t-x\}$$

$$P(X+Y \leq t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{t-x} f(x,y) dy \right) dx$$

$$F_{X+Y}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{t-x} f(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{t-x} f(x,y) dy \right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x, t-x) \cdot 1 \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x, t-x) \, dx$$

$$F_{X+Y}'(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t-x) \, dx$$

$X+Y$ che legge A.C. con densità
 $\int_{\mathbb{R}} f(x, t-x) \, dx$

In particolare, se X e Y sono indipendenti, $f(x, y) = g(x)h(y)$ dove g è la densità di X e h è la densità di Y

$\Rightarrow X+Y$ che legge AC con densità $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)h(t-x) \, dx$

ESEMPIO X e Y v.a. indipendenti: $P_X = P_Y = U([a, b])$

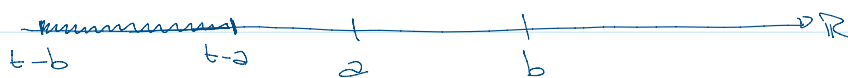
$P_X = U([a, b]) \Rightarrow$ la legge di X è A.C. con densità $\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x) =$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vogliamo calcolare la densità di $X+Y$ - Cerchiamo φ propria densità

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) f(t-x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x) \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(t-x) \, dx \\ &= \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \mathbb{1}_{[a, b]}(t-x) \, dx \end{aligned}$$

$$a \leq x \leq b \quad -b \leq -x \leq -a \quad t-b \leq t-x \leq t-a$$



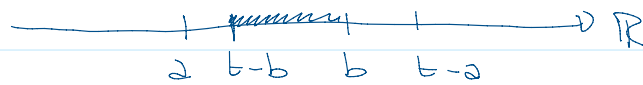
① $t-a < a \Rightarrow \mathbb{1}_{[a, b]}(t-x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \varphi(t) = 0$
 $t < 2a$



② $a < t-a < b \Rightarrow \mathbb{1}_{[a, b]}(t-x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq t-a \\ 0 & t-a < x \leq b \end{cases}$
 $2a < t < a+b$

$$\varphi(t) = \int_a^{t-a} \frac{1}{(b-a)^2} \, dx + \int_{t-a}^b \frac{1}{(b-a)^2} \, dx$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{(b-a)^2} \left[\int_a^{t-a} 1 \, dx + \int_{t-a}^b 0 \, dx \right] = \frac{1}{(b-a)^2} (t-a)$$

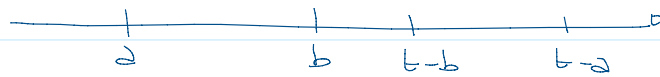


③ $a < t-b < b$
 $a+b < t < 2b$

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(t-x) = \begin{cases} 1 & t-b \leq x \leq b \\ 0 & a \leq x < t-b \end{cases}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{(b-a)^2} \left[\int_a^{t-b} 0 \, dx + \int_{t-b}^b 1 \, dx \right] = \frac{b-(t-b)}{(b-a)^2} = \frac{2b-t}{(b-a)^2}$$

④ $t-b > b$
 $t > 2b$



$$\mathbb{1}_{[a,b]}(t-x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(t) = 0$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t < a \vee t > 2b \\ \frac{t-a}{(b-a)^2} & a < t < a+b \\ \frac{2b-t}{(b-a)^2} & a+b < t < 2b \end{cases}$$

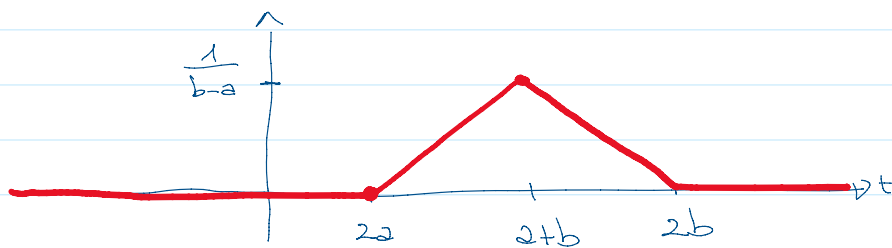
$$t < a \vee t > 2b$$

$$a < t < a+b$$

$$\left. \frac{t-a}{(b-a)^2} \right|_{t=a+b} = \frac{b-a}{(b-a)^2} = \frac{1}{b-a}$$

$$a+b < t < 2b$$

$$\left. \frac{2b-t}{(b-a)^2} \right|_{t=a+b} = \frac{b-a}{(b-a)^2} = \frac{1}{b-a}$$



$$\left(a+b, \frac{1}{b-a} \right)$$

ESEMPIO

X e Y v.a. indipendenti, con distribuzione esponenziale di parametro λ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \leftarrow$$

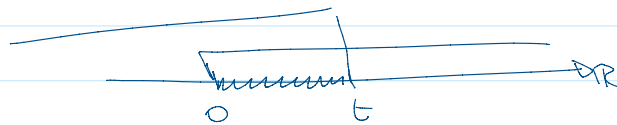
$$Z := X + Y \quad \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) f(t-x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \underbrace{f(t-x)}_{\neq 0} dx$$

$$f(t-x) \neq 0 \quad \text{sse} \quad t-x > 0 \quad \text{sse} \quad x < t$$

① $t \leq 0$ $x < t$, $x \in (0, +\infty)$ non si verifica mai

$$\Rightarrow \varphi(t) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot 0 \, dx = 0$$

② $t > 0$ $x < t$, $x \in (0, +\infty)$



$$\varphi(t) = \int_0^t \cancel{\lambda e^{-\lambda x}} \lambda e^{-\lambda(t-x)} \, dx =$$

$$= \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda t} \, dx = t \lambda^2 e^{-\lambda t}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t} \end{cases}$$

$$t \leq 0$$

$$t > 0$$