lunedì 12 ottobre 2020 11:35

VALORE ATTESO di V.A.

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $X: \Omega \to \mathbb{R}$ funzione semplice

$X(\Omega) = \{c_1 \ldots c_N\}$

$i = 1 \ldots n$ $E_i = \{X = c_i\}$ $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{P}(X = E_i)$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. non negative

$$\mathbb{E}[X] := \sup\{\mathbb{E}[f] : f: \Omega \to \mathbb{R} \text{ funzioni semplici } 0 \le f(\omega) \le X(\omega)\ \forall \omega \in \Omega\}$$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. qualsiasi

$X^+(\omega) := \max\{X(\omega), 0\}$ $X^-(\omega) := \max\{-X(\omega), 0\}$

$X = X^+ - X^-$ $|X| = X^+ + X^-$

Se almeno uno tra $\mathbb{E}[X^+]$ e $\mathbb{E}[X^-]$ è finito, dico che la va X è integrabile e pongo $\mathbb{E}[X] := \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$

Se entrambi $\mathbb{E}[X^+]$ e $\mathbb{E}[X^-]$ sono finiti, dico che X è sommabile

PROPRIETÀ (no dim) X è sommabile SSE $\mathbb{E}[|X|]$ è finito

VARIANZA DI UNA V.A.

Sia X v.a. su uno spazio probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste e sia finito.

Definisco VARIANZA di X (e indico col simbolo $\mathrm{Var}[X]$)

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_\Omega (X(\omega) - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}(d\omega)$$

Se $\mathbb{E}[X]$ esiste finito $\Rightarrow$ $\mathrm{Var}[X]$ è sempre ben definita (eventualmente $= +\infty$)

Se $\mathrm{Var}[X]$ è finita, dico che X è una v.a. di quadrato sommabile.

TEOREMA DI COMPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilità

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a., $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-misurabile*

* $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \le t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Allora, se $\mathbb{E}[f \circ X]$ è ben definito, si ha che

$$\mathbb{E}[f \circ X] = \int_\Omega (f \circ X)(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dF_X(t)$$

dove F_X è la legge di X

DIM nel caso in cui f è semplice $\quad f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}(x)$

$E_i=\{x\in\mathbb{R} : f(x)=c_i\}$ $\quad i=1\_n$ $\quad$ sono una partizione di $\mathbb{R}$

$$(f\circ X)(\omega)=\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}(X(\omega)) = c_i \text{ sse } X(\omega)\in E_i$$

$$\int_\Omega f(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \underline{\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(X\in E_i)}$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}(x) \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dF_X(t) = \sum_{t_j\in\mathbb{R}} f(t_j)p_j + \int_{\mathbb{R}} f(s)\,\rho(s)\,ds \qquad \mathbb{R}=\bigcup_{i=1}^{n} E_i ;\ E_i\cap E_j=\emptyset$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t_j\in E_i} \underbrace{f(t_j)}_{c_i \text{ se } t_j\in E_i} p_j + \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} \underbrace{f(s)}_{c_i \text{ se } s\in E_i}\rho(s)\,ds =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t_j\in E_i} c_i p_j + \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} c_i\rho(s)\,ds = \sum_{i=1}^{n} c_i \Big(\underbrace{\sum_{t_j\in E_i} p_j + \int_{E_i}\rho(s)\,ds}_{\mathbb{P}(X\in E_i)}\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbb{P}(X\in E_i)$$

COROLLARIO Sia X v.a. su $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste. Allora $\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}} t\,dF_X(t)$

DIM. Nel Teorema di composizione scelgo $f(t)=t$

$$\mathbb{E}[f\circ X] = \mathbb{E}[X] \qquad \Rightarrow \mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}} t\,dF_X(t)$$

$$\parallel$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dF_X(t) = \int_{\mathbb{R}} t\,dF_X(t)$$

COROLLARIO Sia X v.a. su $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito. Allora $\quad Var[X]=\int_{\mathbb{R}} (t-\mathbb{E}[X])^2\,dF_X(t)$

DIM Nel Teorema di composizione scelgo $\quad f(t)=(t-\mathbb{E}[X])^2$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[f\circ X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = Var[X]$$

$$\parallel$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dF_X(t) = \int_{\mathbb{R}} (t-\mathbb{E}[X])^2\,dF_X(t)$$

COROLLARIO Se $F_X(t) = \sum_{t_j\le t} p_j + \int_{-\infty}^{t}\rho(s)\,ds \Rightarrow$

$$\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}} t\,dF_X(t) = \sum_{t_j\in\mathbb{R}} t_j p_j + \int_{\mathbb{R}} s\,\rho(s)\,ds$$

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{\mathbb{R}} (t - \mathbb{E}[X])^2 \, dF_X(t) = \sum_{t_j \in \mathbb{R}} (t_j - \mathbb{E}[X])^2 p_j + \int_{\mathbb{R}} (s - \mathbb{E}[X])^2 \varrho(s)\, ds$$

OSSERVAZIONE $\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mathbb{E}[X]X + (\mathbb{E}[X])^2] =$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

ESEMPIO: Sia X v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ di cui conosciamo la legge F_X

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$ $Y := \alpha X + \beta$ $(\varphi(t) = \alpha t + \beta)$

$$F_Y(t) := \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\alpha X + \beta \leq t)$$

1) $\alpha > 0$ $F_Y(t) = \mathbb{P}(\alpha X + \beta \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-\beta}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)$

2) $\alpha < 0$ $F_Y(t) = \mathbb{P}(\alpha X + \beta \leq t) = \mathbb{P}(\alpha X \leq t - \beta) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{t-\beta}{\alpha}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < \frac{t-\beta}{\alpha}\right)$

$$\left\{X < \frac{t-\beta}{\alpha}\right\} = \left\{X \leq \frac{t-\beta}{\alpha}\right\} \setminus \left\{X = \frac{t-\beta}{\alpha}\right\}$$

$$\Rightarrow F_Y(t) = 1 - \left(\mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-\beta}{\alpha}\right) - \mathbb{P}\left(X = \frac{t-\beta}{\alpha}\right)\right) = 1 - F_X\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right) + \mathbb{P}\left(X = \frac{t-\beta}{\alpha}\right)$$

CASO PARTICOLARE F_X è A.C. con densità $f(x)$

1) $\alpha > 0$

$$F_Y(t) = F_X\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{t-\beta}{\alpha}} f(x)\, dx =$$

$x = \frac{y-\beta}{\alpha}$ $dx = \frac{1}{\alpha} dy$

$y = \alpha x + \beta$

$$= \int_{-\infty}^{t} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \frac{1}{\alpha}\, dy$$

$x \to -\infty$ $y \to -\infty$

$x = \frac{t-\beta}{\alpha}$ $y = \cancel{\alpha} \cdot \frac{t-\beta}{\cancel{\alpha}} + \beta = t$

$\Rightarrow F_Y$ è A.C. con densità $\boxed{g(y) := \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)}$ $\alpha > 0$

2) $\alpha < 0$ $\mathbb{P}\left(X = \frac{t-\beta}{\alpha}\right) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ perché F_X è A.C. e dunque continua

$$F_Y(t) = 1 - F_X\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right) = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{t-\beta}{\alpha}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\frac{t-\beta}{\alpha}} f(x)\,dx =$$

$$1 = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

$\frac{t-\beta}{\alpha}$ $\mathbb{R}$

$$= \int_{\frac{t-\beta}{\alpha}}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$x = \frac{y-\beta}{\alpha}$ $y = \alpha x + \beta$ $dx = \frac{1}{\alpha} dy$

$x = \frac{t-\beta}{\alpha}$ $y = t$

$x \to +\infty$ $y \to -\infty$

$$= \int_{t}^{-\infty} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \frac{1}{\alpha}\, dy =$$

$\alpha < 0$

$$= \int_t \dots f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{-\alpha} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) dy \quad \Rightarrow F_Y \text{ è A.C. con densità } g(y) = \frac{1}{-\alpha} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

$\alpha < 0$

$\Rightarrow$ Posso scrivere che la densità di F_Y è $\boxed{\frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha \neq 0}$

ESEMPIO Sia X v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ di cui è nota la legge F_X

Sia $Y := X^2$

$$t \in \mathbb{R} \qquad \{Y \le t\} = \{X^2 \le t\} = \begin{cases} \emptyset & t < 0 \\ \{X = 0\} & t = 0 \\ \{-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}\} & t > 0 \end{cases}$$

sono eventi $\forall t \in \mathbb{R}$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mathbb{P}(X = 0) & t = 0 \\ \mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) \leftarrow & t > 0 \end{cases}$$

$$\{-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}\} = \{X \le \sqrt{t}\} \setminus \{X < -\sqrt{t}\} \Rightarrow$$

$$t > 0 \quad F_Y(t) = \mathbb{P}(X \le \sqrt{t}) - \mathbb{P}(X < -\sqrt{t}) =$$

$$\{X < -\sqrt{t}\} = \{X \le -\sqrt{t}\} \setminus \{X = -\sqrt{t}\}$$

$$= \mathbb{P}(X \le \sqrt{t}) - \left(\mathbb{P}(X \le -\sqrt{t}) - \mathbb{P}(X = -\sqrt{t})\right) =$$

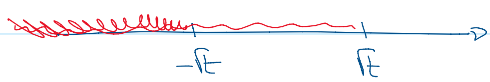
$$= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) + \mathbb{P}(X = -\sqrt{t})$$

CASO PARTICOLARE F_X è A.C. con densità $f(x)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X = -\sqrt{t}) = 0 \quad \forall t \ge 0$

$$t > 0 \qquad F_Y(t) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) = \int_{-\infty}^{\sqrt{t}} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{t}} f(x)\,dx = \int_{-\sqrt{t}}^{+\sqrt{t}} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{t}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\sqrt{t}} f(x)\,dx \quad \longleftarrow$$



① $$\int_{-\sqrt{t}}^{0} f(x)\,dx$$

$x = -\sqrt{y} \qquad x^2 = y$

$dx = \frac{-1}{2\sqrt{y}}\,dy$

$x = 0 \qquad y = 0$

$x = -\sqrt{t} \qquad y = t$

$$= \int^{0} f(-\sqrt{y}) \cdot \frac{-1}{\dots}\,dy = \int^{t} \frac{1}{2\sqrt{y}} f(-\sqrt{y})\,dy$$

$$= \int_t^0 f(-\sqrt{y}) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{y}} f(-\sqrt{y}) dy \qquad \begin{matrix} x=0 \\ x=-\sqrt{t} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y=0 \\ y=t \end{matrix}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} f(x)dx$ $\qquad 0 \longrightarrow \sqrt{t}$

$$x = \sqrt{y} \qquad y = x^2$$
$$dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \qquad \begin{matrix} x=0 & y=0 \\ x=\sqrt{t} & y=t \end{matrix}$$

$$= \int_0^t f(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

$$\Rightarrow F_Y(t) = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{y}} f(-\sqrt{y}) dy + \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y}) dy = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}) \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^t g(y) dy \qquad \boxed{g(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}) \right) & y > 0 \end{cases}}$$

Con g definita in questo modo è vero che

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^t g(y) dy \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

DISUGUAGLIANZA DI CHEBYCHEV (TEO)

Sia X una v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $E[X]$ esiste finito. Sia $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}\left(|X - E[X]| \geq \alpha \right) \leq \frac{Var[X]}{\alpha^2} \qquad \forall \alpha > 0$$

DIM $\quad Var[X] = \displaystyle\int_\Omega \underline{(X(\omega) - E[X])^2} \, \mathbb{P}(d\omega)$

$$\Omega_\alpha = \{ \omega \in \Omega : |X(\omega) - E[X]| \geq \alpha \} = \{ |X - E[X]| \geq \alpha \} \in \mathcal{E}$$

$$Var[X] \geq \int_{\Omega_\alpha} \underbrace{(X(\omega) - E[X])^2}_{\geq \alpha^2 \ \forall \omega \in \Omega_\alpha} \mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega (X(\omega) - E[X])^2 \mathbb{1}_{\Omega_\alpha}(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

$$\geq \alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \mathbb{P}(d\omega) = \alpha^2 \mathbb{P}(\Omega_\alpha) = \alpha^2 \mathbb{P}(|X - E[X]| \geq \alpha)$$

Divido per $\alpha^2 > 0$ $\qquad \mathbb{P}\left(|X - E[X]| \geq \alpha \right) \leq \frac{1}{\alpha^2} Var[X] \qquad \forall \alpha > 0$

PROPRIETÀ VARIAZIONALE DEL VALORE ATTESO

Sia X v.a. T.c. $E[X]$ e $E[X^2] < +\infty$

PROPRIETÀ VARIAZIONALE DEL VALORE ATTESO

Sia X v.a. t.c. $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$

Considero $\psi(s) := \mathbb{E}[(X-s)^2]$ $s \in \mathbb{R}$

Allora $\mathbb{E}[X]$ è l'unico p.to di minimo di ψ e $\mathrm{Var}[X]$ è il minimo di ψ

DIM

$$\psi(s) = \mathbb{E}[X^2 - 2sX + s^2]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - 2s\,\mathbb{E}[X] + s^2$$
$$\psi'(s) = -2\mathbb{E}[X] + 2s = 2(s - \mathbb{E}[X])$$

$\psi'(s) < 0$ $\psi'(s) > 0$

$\psi \searrow$ $\mathbb{E}[X]$ $\nearrow$ s

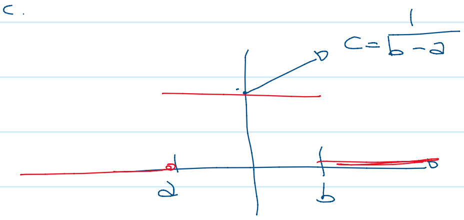
$\bar{s} := \mathbb{E}[X]$ è l'unico p.to di minimo

$$\psi(\bar{s}) = \psi(\mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathrm{Var}[X]$$

V.A. CON DISTRIBUZIONE UNIFORME SU UN INTERVALLO $[a,b]$

Sono v.a. t.c. $F_X(t)$ ha densità $f(x)$ t.c.

$$f(x) = \begin{cases} c & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$



$$\lim_{t\to+\infty} F_X(t) - \lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b c\,dx = c(b-a) \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}$$

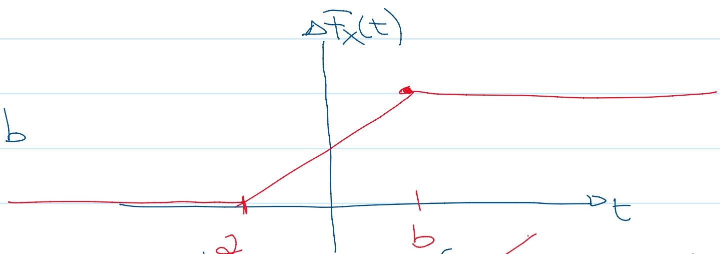
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x)\,dx =$$

$t < a \Rightarrow F_X(t) = 0$

$t \in [a,b] \Rightarrow F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a \underbrace{\cancel{f(x)}}_{=0}\,dx + \int_a^t \underbrace{\cancel{f(x)}}_{=\frac{1}{b-a}}\,dx = \frac{t-a}{b-a}$

$t > b$ $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a 0\,dx + \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx + \int_b^t 0\,dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t < b \\ 1 & t \ge b \end{cases}$$



$\mathbb{E}[X]$ ... $\frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b}$ ... $\frac{b^2-a^2}{}$ ... $\cancel{(b-a)}(b+a)$ ... $\frac{a+b}{}$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)} x^3\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(a^2+ab+b^2)}{3\cancel{(b-a)}}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ESEMPIO Sia X v.a. distribuita uniformemente sull'intervallo $[0,1]$

$\Rightarrow F_X(t)$ è A.C. con densità è $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$

Calcolare la densità di $Y := \alpha X + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$

Abbiamo visto che F_Y è AC. con densità $g(y) = \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{|\alpha|} & 0 \leq \frac{y-\beta}{\alpha} \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\alpha > 0$ $\quad 0 \leq \frac{y-\beta}{\alpha} \leq 1 \qquad 0 \leq y-\beta \leq \alpha \qquad \beta \leq y \leq \alpha+\beta$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \beta \leq y \leq \alpha+\beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\alpha =$ lunghezza di $[\beta, \alpha+\beta]$

$\Rightarrow Y$ è distribuita uniformemente sull'intervallo $[\beta, \alpha+\beta]$

$\alpha < 0$ $\quad 0 \leq \frac{y-\beta}{\alpha} \leq 1 \qquad \alpha \leq y-\beta \leq 0 \qquad \alpha+\beta \leq y \leq \beta$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha} & y \in [\alpha+\beta, \beta] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$-\alpha = \beta - (\alpha+\beta)$

$\Rightarrow Y$ è distribuita uniformemente sull'intervallo $[\alpha+\beta, \beta]$

V.A. CON DISTRIBUZIONE GAUSSIANA DI PARAMETRI μ E σ^2 $(\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0)$

V.A. CON DISTRIBUZIONE GAUSSIANA DI PARAMETRI μ E σ ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$)

Sono v.a. con legge F_X A.C. e associate alla densità

$$\longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, dico che la distribuzione è gaussiana standard.

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ — sì $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2\right) dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} = y \qquad x = \mu + y\sigma\sqrt{2} \qquad dx = \sigma\sqrt{2}\,dy$$

$x \to -\infty \quad y \to -\infty$

$x \to +\infty \quad y \to +\infty$

$$= \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{\cancel{2}\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2)\,\cancel{\sigma}\cancel{\sqrt{2}}\,dy = \qquad \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\exp(-y^2)}_{\text{pari}}\,dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-y^2)\,dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 1$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Nel caso particolare della gaussiana standard ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) otteniamo

$$F_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx =: \Phi(t)$$

LEGGE GAUSSIANA STANDARD

PROPRIETÀ $\quad \Phi(t) + \Phi(-t) = 1$

DIM

$$\rightarrow \Phi(-t) = \int_{-\infty}^{-t} f(x)\,dx = \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \leftarrow$$

è una funzione pari: $f(-x) = f(x)$

$$= \int_{-\infty}^{-t} f(-x)\,dx \qquad y = -x \qquad x = -y \qquad dx = -1\,dy$$

$= \int_{-\infty} f(-x)\,dx$ $y=-x$ $x=-y$ $f(-x) = f(x)$

$dx = -1\,dy$

$x \to -\infty$ $y \to +\infty$

$x = -t$ $y = t$

$$= \int_{+\infty}^{t} f(y)(-1)\,dy = \int_{t}^{+\infty} f(y)\,dy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy}_{1} - \underbrace{\int_{-\infty}^{t} f(y)\,dy}_{\Phi(t)} = 1 - \Phi(t)$$

cioè $\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$

X v.a. con legge gaussiana standard $f(x)$

$\sigma > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$ costanti $Y := \sigma X + \mu$

Abbiamo visto che se $f(x)$ è la densità di $F_X \Rightarrow$

F_Y ha densità $g(y) = \frac{1}{|\sigma|} f\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

$$g(y) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Se X è una v.a. con legge gaussiana standard, allora la v.a. $Y := \sigma X + \mu$ $(\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R})$ è una v.a. con legge gaussiana di parametri μ e σ^2

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sigma X + \mu] = \sigma \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{??} + \mu$$

?? li calcoliamo mercoledì

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Var}[\sigma X + \mu]^2 = \sigma^2 \underbrace{\mathrm{Var}[X]}_{??}$$