mercoledì 7 ottobre 2020 09:54

VARIABILI ALEATORIE

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità

$X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$ funzione

Dico che X è una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ se

$\forall t \in \mathbb{R} \rightarrow \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} \in \mathcal{E}$ $\{X \le t\}$

Equivalentemente $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{E}$

$X^{-1}(B)$ $\{X \in B\}$

$\mathbb{P}_X : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{P}(X \in B) \in \mathbb{R}$

Si dimostra che $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio di probabilità

La misura di probabilità $\mathbb{P}_X$ si dice anche DISTRIBUZIONE DI X

$\mathcal{A}$:= famiglia degli aperti di $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$:= la più piccola σ-algebra di $\mathbb{R}^n$ che contiene tutti gli aperti

Si chiama σ-algebra di Borel

Si può dimostrare che coincide con la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli intervalli $(a, b]$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$

- $\mathbb{P}_X(\emptyset) = 0$

  infatti $\mathbb{P}(X \in \emptyset) = 0$

- $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$ $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) := \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \ne j$

$$\left\{X \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right\} = \left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_i\}}_{B_i \cap B_j = \emptyset}$$

disgiunti due a due

$$\mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{X \in B_i\}\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X \in B_i)$$

- $\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_X(B_i)$

LEGGE o FUNZIONE DI RIPARTIZIONE o FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA

$t \in \mathbb{R}$ $\{X \le t\} = \{X \in (-\infty, t]\} \in \mathcal{E}$

$$F_X : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(X \le t) \in [0, 1]$$

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. e sia

$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ...

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. e sia $F_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua legge.

Allora F_X gode delle seguenti proprietà

1) F_X è una funzione monotona non decrescente cioè
$\forall s,t \in \mathbb{R} \quad s<t \implies F_X(s) \le F_X(t)$

2) $\lim_{t\to -\infty} F_X(t) = \mathbb{P}(X=-\infty)$ $(= 0$ se $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R})$

3) $\lim_{t\to +\infty} F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X=+\infty)$ $(= 1$ se $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R})$

4) F_X è una funzione continua da destra:
$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{s \to t^+} F_X(s) = F_X(t)$

5) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{s\to t^-} F_X(s) = F_X(t) - \mathbb{P}(X=t)$

DIM 1) F_X è monotona non decrescente

$s,t \in \mathbb{R} \quad s<t$ $\quad \rightsquigarrow F_X(s) = \mathbb{P}(X \le s) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le s\})$
$\quad \rightsquigarrow F_X(t) = \mathbb{P}(X\le t) = \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : X(\omega) \le t\})$

$s<t$, se $X(\omega) \le s \implies$ sicuramente $X(\omega) \le t$ ovvero
$\{X \le s\} \subseteq \{X \le t\}$
$\Downarrow$
$$F_X(s) = \mathbb{P}(X\le s) \le \mathbb{P}(X \le t) = F_X(t) \qquad \boxtimes$$

DIM 4) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{s\to t^+} F_X(s) = F_X(t)$

LEMMA DI COLLEGAMENTO
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$
Allora $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$
SSE $\forall \{x_n\} \subset \mathbb{R}$ t.c. $x_{n+1} < x_n$
e $x_n \to x_0$ si ha che $f(x_n) \to L$

Sia $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione decrescente e convergente a t

$E_n := \{X \le s_n\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le s_n\}$
$E_t := \{X \le t\} = \{\omega\in\Omega : X(\omega) \le t\}$

$s_n > s_{n+1} > \dots > t$ $\qquad E_n \supseteq E_{n+1} \supseteq E_t$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \supseteq E_t$
$=$

DIMOSTRO CHE:
$E_t \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$

$\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \iff X(\omega) \le s_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies X(\omega) \le \lim_{n\to\infty} s_n = t$
cioè $\omega \in E_t$

$\implies E_t = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$

$F_X(t) = \mathbb{P}(E_t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$ e $E_n \supseteq E_{n+1}$

PER PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ DELLE MISURE

$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(s_n) \Rightarrow F_X(t) = \lim_{s\to t^+} F_X(s)$

— o —

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E} \quad A_n \cap A_k = \emptyset \quad h \neq k \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

CONTINUITÀ DELLA MISURA (TEOREMA)

1) $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ famiglia di eventi t.c. $E_n \supseteq E_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n)$$

2) $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ famiglia di eventi t.c. $F_n \subseteq F_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(F_n)$$

DIM 5) $\lim_{s\to t^-} F_X(s) = F_X(t) - \mathbb{P}(X=t)$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ sse per ogni successione x_n crescente e convergente a x_0 si ha che $f(x_n)$ converge a L

$s_n < s_{n+1} \qquad \lim s_n = t$

$E_n = \{X \leq s_n\} \quad n\in\mathbb{N}$

$E_t = \{X \leq t\} \qquad \tilde{E}_t := \{X < t\}$

$s_n < s_{n+1} < t \qquad E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \tilde{E}_t \qquad X(\omega) \leq s_n < s_{n+1}$

$\omega \in E_n \Rightarrow \omega \in E_{n+1}$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq E_t \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \tilde{E}_t$

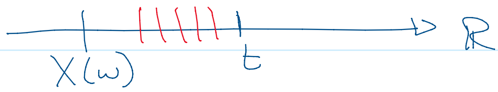
$\to s_n < t$

$X(\omega) \leq s_n \Rightarrow X(\omega) < t$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq \tilde{E}_t \Leftarrow E_n \subset \tilde{E}_t \quad \forall n$

Devo provare che $\tilde{E}_t \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$

$\omega \in \tilde{E}_t \qquad X(\omega) < t$



$\exists \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n} \quad s_n \geq X(\omega)$ cioè $\omega \in E_n \quad \forall n > \bar{n}$

$\Downarrow$

$\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \qquad \boxtimes$

$\mathbb{P}(\tilde{E}_t) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n)$

$$\mathbb{P}(\tilde{E}_t) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

$$\mathbb{P}(X<t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X\le s_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(s_n)$$

$$\mathbb{P}(X<t) = \mathbb{P}(X\le t) - \mathbb{P}(X=t), \quad \mathbb{P}(X\le t) = F_X(t)$$

cioè $\lim_{n\to\infty} F_X(s_n) = F_X(t) - \mathbb{P}(X=t)$ $\boxtimes$

Sia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
1) monotona non decrescente
2) continua da destra
3) limitata

$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad (a,b]$ $\quad \mu_F((a,b]) := F(b) - F(a)$

$\mu_F(\phi) = 0$

La funzione μ_F può essere estesa in uno ed un solo modo ad una misura definita su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\mu_F(\mathbb{R}) = 1$ SSE $\left(\lim_{x\to+\infty} F(x)\right) - \left(\lim_{x\to-\infty} F(x)\right) = 1$

Viceversa: Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ spazio di misura con $\mu(\mathbb{R})$ finito

Pongo $F(t) = \mu((-\infty, t])$ e ottengo una funzione con le proprietà:
1) limitata
2) monotona non decrescente
3) continua da destra

DIMOSTRARE PER ESERCIZIO

FUNZIONI A SALTI

$t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_N$ numeri reali

$p_1, p_2, \dots, p_N > 0$

$$F(t) := \sum_{j: t_j \le t} p_j$$

$F(t)$ è
- monotona non decrescente
- continua da destra
- limitata

$\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ successione di numeri reali distinti

$\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\quad p_i > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$ $\quad \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i$ converge

$$F(t) := \sum_{i: t_i \le t} p_i$$

1) F è limitata

$$0 \le F(t) \le \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i < +\infty$$

$F(t) := \sum_{i: t_i \le t} p_i$ 1) F è limitata

$$0 \le F(t) \le \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i < +\infty$$

$$F(t) \in \left[0, \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\right]$$

2) $s < t$ se i è t.c. $t_i \le s \Rightarrow t_i \le t$

$$F(t) = \sum_{i: t_i \le t} p_i = \sum_{i: t_i \le s} p_i + \underbrace{\sum_{i: s < t_i \le t} p_i}_{\ge 0} \ge \sum_{i: t_i \le s} p_i = F(s)$$

3) s_n successione monotona decrescente e convergente a t

$$F(s_n) = \sum_{i: t_i \le s_n} p_i = \sum_{i: t_i \le t} p_i + \sum_{\cancel{i: t < t_i \le s_n}} p_i \to 0 = F(t)$$

$i: t_i \in (t, s_n]$

Abbiamo posto $\mu_F((a,b]) := F(b) - F(a) = \sum_{i: t_i \le b} p_i - \sum_{i: t_i \le a} p_i =$

$$= \sum_{i: a < t_i \le b} p_i$$

$$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mu_F(B) = \sum_{i: t_i \in B} p_i$$

FUNZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE

$c \in \mathbb{R}$ $\quad \varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON NEGATIVA E SOMMABILE SECONDO LEBESGUE

$$\int_{\mathbb{R}} \varrho(x)\,dx < +\infty$$

Definisco $F(t) := c + \int_{t_0}^{t} \varrho(x)\,dx$
- limitata
- monotona non decrescente
- continua

Se ϱ è continua in un pto $\bar{t}$, allora $\exists F'(\bar{t}) = \varrho(\bar{t})$

Una funzione F che si può esprimere nella forma indicata si dice una funzione ASSOLUTAMENTE CONTINUA

Se una funzione è derivabile, con derivata continua, allora è assolutamente continua;
Se una funzione è assolutamente continua, allora è continua.

$$\mu_F((a,b]) := F(b) - F(a) = \left(\cancel{c} + \int_{t_0}^{b} \varrho(x)\,dx\right) - \left(\cancel{c} + \int_{t_0}^{a} \varrho(x)\,dx\right) =$$

$$= \int_a^b \varrho(x)\,dx$$

TEOREMA (no dim) Sia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monotona non decrescente, limitata e continua da destra. Allora F si può rappresentare come somma di una funzione a salti, di una funzione assolutamente continua e di una funzione continua ma non assolutamente continua (detta parte singolare):

$\exists$ f funzione a salti
g funzione assolutamente continua
h funzione continua ma non assolutamente continua

t.c. $F = f+g+h$

OSSERVAZIONE Ci limitiamo a considerare funzioni F senza parte singolare $\Rightarrow$ $F(t)$ si può scrivere come:

$$F(t) := \sum_{i:\,t_i\le t} p_i + c + \int_{-\infty}^{t} \varphi(s)\,ds$$

$\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ successione di reali e $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di reali positivi t.c. $\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i$ converge

$c\in\mathbb{R}$ $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funzione non negativa t.c. $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$ converge

La misura μ_F associata a F si dice MISURA DI LEBESGUE-STIELTJES

INTEGRALE RISPETTO ALLA MISURA μ_F ASSOCIATA A F

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}$ $a<b$

$$\int_a^b f(t)\,d\mu_F(t) \left(=\int_a^b f(t)\,dF(t)\right) := \sum_{i:\,t_i\in(a,b]} f(t_i)\,p_i + \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

PROPRIETÀ (NO DIM)

1. $$\int_a^b \big(k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t)\big)\,dF(t) = k_1\int_a^b f_1(t)\,dF(t) + k_2\int_a^b f_2(t)\,dF(t)$$

$\forall f_1, f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\forall k_1,k_2\in\mathbb{R}$

2. F_1 e F_2 funzioni della classe prescelta

$$\int_a^b f(t)\,d\,(k_1F_1+k_2F_2)(t) = k_1\int_a^b f(t)\,dF_1(t) + k_2\int_a^b f(t)\,dF_2(t)$$

3. Se esiste $\int_a^b f(t)\,dF(t)$ e se $c\in[a,b]$, allora esistono $\int_a^c f(t)\,dF(t)$ e $\int_c^b f(t)\,dF(t)$ e

$\int_a^c f(t)\,dF(t)$ e $\int_c^b f(t)\,dF(t)$ e

$$\int_a^b f(t)\,dF(t) = \int_a^c f(t)\,dF(t) + \int_c^b f(t)\,dF(t)$$

— o —

VALORE ATTESO DI UNA V.A.

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. $X:\Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

Supponiamo che X assuma solo un numero finito di valori (Si dice che X è una funzione semplice)

$X(\Omega) = \{c_1, c_2, \ldots c_N\} \subset \mathbb{R}$

Per ogni $i = 1 \ldots N$ $\quad E_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = c_i\} = \{X = c_i\}$

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \quad \Leftarrow$$

$\Omega \quad A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

FUNZIONE CARATTERISTICA DI A

$\omega \in \Omega$: $X(\omega)$ è uno e uno solo dei valori $c_1 \ldots c_N$ $\Rightarrow$ ω appartiene a uno e uno solo degli eventi E_i

Supponiamo $X(\omega) = c_1 \Rightarrow \omega \in E_1$, $\omega \notin E_i \ \forall i = 2, \ldots n$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) = c_1 \underbrace{\mathbb{1}_{E_1}(\omega)}_{=1} + c_2 \underbrace{\mathbb{1}_{E_2}(\omega)}_{=0} + \ldots + c_N \underbrace{\mathbb{1}_{E_N}(\omega)}_{=0}$$

$$= c_1 = X(\omega)$$

Pongo, per definizione $\quad \mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) := \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{P}(E_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{P}(X = c_i) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{P}_X(\{c_i\})$$

— o —

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\quad X:\Omega \to \mathbb{R}$ v.a. non negativa

$$\mathbb{E}[X] := \sup \left\{ \mathbb{E}[\varphi] : \varphi \text{ funzioni semplici t.c. } 0 \le \varphi(\omega) \le X(\omega) \ \forall \omega \in \Omega \right\}$$

$$\mathbb{E}[X] \overset{..}{=} \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

— o —

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\quad X:\Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

PARTE POSITIVA DI X $\quad X^+(\omega) := \max\{X(\omega), 0\}$

$X^+(\omega) \ge 0 \ \forall \omega \in \Omega$: X^+ è una v.a.

PARTE NEGATIVA di X $\qquad X^-(\omega) := \max\{-X(\omega), 0\}$

$X^-(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$: X^- è una v.a.

ESERCIZIO : Supponendo di conoscere F_X, calcolare F_{X^+} e F_{X^-}

Osserviamo che (1) $X^+ - X^- = X$ e (2) $X^+ + X^- = |X|$

DIM (1) $\omega \in \Omega$ $\qquad$ Se $X(\omega) > 0 \Rightarrow$

$$\frac{\begin{array}{l} X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\} = X(\omega) \\ X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\} = 0 \end{array}}{X^+(\omega) - X^-(\omega) = X(\omega)}$$

Se $X(\omega) = 0 \Rightarrow X^+(\omega) = X^-(\omega) = 0 \Rightarrow X^+(\omega) - X^-(\omega) = X(\omega)$

Se $X(\omega) < 0 \Rightarrow$

$$\frac{\begin{array}{l} X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\} = 0 \\ X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\} = -X(\omega) \end{array}}{X^+(\omega) - X^-(\omega) = 0 - (-X(\omega)) = X(\omega)}$$

DIM (2) PER ESERCIZIO

Se almeno uno tra $\mathbb{E}[X^+]$ e $\mathbb{E}[X^-]$ è finito, pongo

$$\mathbb{E}[X] := \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$$

ovvero

$$\int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) := \int_\Omega X^+(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega X^-(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$