

$(X_t)_{t \geq 0}$ HMC con spazio degli stati finito $\Rightarrow$ la matrice di Transizione $P(t)$ deve essere del Tipo

$$P(t) = e^{tQ} \quad \forall t \geq 0 \quad S = \{1, \dots, N\}$$

con Q una Q -matrice $Q = (Q_{ij}^i)_{i,j \in \{1, \dots, N\}}$

$$\begin{aligned} 1) & Q_{ij}^i \geq 0 \quad j \neq i \\ 2) & Q_{ii}^i = - \sum_{j \neq i} Q_{ij}^i \quad i=1, \dots, N \quad \text{(ovvero } \sum_{j=1}^N Q_{ij}^i = 0) \end{aligned}$$

$$Q = (Q_{ij}^i)_{i,j \in \{1, \dots, N\}}$$

$$\alpha \geq \max \{ -Q_{ii}^i : i=1, \dots, N \} \quad R := Id + \frac{1}{\alpha} Q \text{ è stocastica}$$

$$Q = \alpha(R - Id) \quad e^{tQ} = e^{-\alpha t} e^{\alpha R t}$$

PROPRIETÀ Sia $P(t) = e^{tQ}$, $t \geq 0$ con Q una Q -matrice di dimensione $N \times N$. Siano $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti

- 1) $\exists t_0 > 0$ t.c. $P(t_0)_{ij}^i > 0$
- 2) $P(t)_{ij}^i > 0 \quad \forall t > 0$

U.B. Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ una HMC con spazio degli stati finito $S = \{1, \dots, N\}$ e matrice di Transizione $P(t) = e^{tQ}$

$$P(t_0)_{ij}^i = \mathbb{P}(X_{t_0} = j | X_0 = i) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) > 0 \quad \forall t > 0$$

$$\mathbb{P}(X_{t_0} = j | X_0 = i) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = 0 \quad \forall t > 0$$

DIN $2 \Rightarrow 1$ ovvio

$$1 \Rightarrow 2 \quad \exists t_0 \text{ t.c. } P(t_0)_{ij}^i > 0$$

$$Q = \alpha(R - Id), R \text{ stocastica}$$

$$\text{Per assurdo } \exists \bar{t} > 0 \text{ t.c. } P(\bar{t})_{ij}^i = 0$$

$$P(t_0)_{ij}^i - (e^{t_0 Q})_{ij}^i = e^{-\alpha t_0} \sum_{k \geq 0} \frac{(\alpha t_0)^k}{k!} (R^k)_{ij}^i$$

$$P(\bar{t})_{ij}^i = e^{-\alpha \bar{t}} \sum_{k \geq 0} \frac{(\alpha \bar{t})^k}{k!} (R^k)_{ij}^i = 0 \Rightarrow \sum_{k \geq 0} \boxed{\frac{(\alpha \bar{t})^k}{k!}} \underbrace{(R^k)_{ij}^i}_{\geq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow (R^k)_{ij}^i = 0 \quad \forall k \geq 0 \Rightarrow P(t_0)_{ij}^i = 0 \quad \text{ASSURDO}$$

DISTRIBUZIONI STAZIONARIE

Se $P(t)$ è una matrice stocastica $N \times N$, esiste un vettore stocastico $w \in (\mathbb{R}^N)^*$ T.c. $wP(t) = w$?

Se un tale w esiste, lo chiamo distribuzione stazionaria di $P(t)$ o distribuzione stazionaria di una qualsiasi HMC $(X_t)_{t \geq 0}$ la cui matrice di Transizione sia $P(t)$

LEMMA Sia Q una Q -matrice $N \times N$ e sia $P(t) := e^{tQ}$, $t \geq 0$
Sia $w \in \mathcal{Y} \subset (\mathbb{R}^N)^*$

1) Se $\exists t_0 > 0$ T.c. w è l'unico pto fisso dell'applicazione $P(t_0): x \in \mathcal{Y} \mapsto xP(t_0) \in \mathcal{Y}$

allora $wQ = 0$

2) $wQ = 0$ SSE $w = wP(t) \quad \forall t > 0$ ←

DM Sia $t_0 > 0$ e w l'unico $w \in \mathcal{Y}$ T.c. $wP(t_0) = w$
 $P(t_0) = e^{t_0 Q} = e^{n \frac{t_0}{n} Q} = \left(e^{\frac{t_0}{n} Q} \right)^n = \left(P\left(\frac{t_0}{n}\right) \right)^n$

$$P(t_0): x \mapsto xP(t_0) = x \left(P\left(\frac{t_0}{n}\right) \right)^n$$

cioè $P(t_0)$ è l'iterata n -esima dell'applicazione associata a $P\left(\frac{t_0}{n}\right)$
 $\Rightarrow w$ è anche l'unico pto fisso di $P\left(\frac{t_0}{n}\right)$

$$w = wP\left(\frac{t_0}{n}\right) = w e^{\frac{t_0}{n} Q} = w \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t_0}{n} \right)^k \frac{1}{k!} Q^k =$$

$$= w \left(\text{Id} + \frac{t_0}{n} Q + \sum_{k \geq 2} \left(\frac{t_0}{n} \right)^k \frac{1}{k!} Q^k \right)$$

$$\sum_{k \geq 2} \left(\frac{t_0}{n} \right)^k \frac{1}{k!} Q^k = \frac{1}{n^2} \sum_{k \geq 2} \frac{t_0^k}{n^{k-2} k!} Q^k$$

$$\sum_{k \geq 2} \frac{t_0^k}{n^{k-2} k!} \|Q^k\| \leq \sum_{k \geq 2} \frac{t_0^k}{k!} \|Q\|^k \quad n \geq 1$$

$$\leq \sum_{k \geq 0} \frac{t_0^k}{k!} \|Q\|^k = e^{t_0 \|Q\|}$$

$$\textcircled{O} \quad w = w \left(\cancel{\text{Id}} + \frac{t_0}{n} Q + \frac{1}{n^2} A(n) \right)$$

$$\|A(n)\| \leq e^{t_0 \|Q\|} \quad \forall n \geq 1$$

$$0 = t_0 wQ + \frac{1}{n} wA(n)$$

$t_0 > 1$

$$0 = t_0 wQ + \frac{1}{n} wA(n)$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(t_0 wQ + \frac{1}{n} wA(n) \right) = t_0 wQ$$

$$t_0 > 0 \text{ per ipotesi} \Rightarrow wQ = 0$$

$$2) wQ = 0 \quad \text{SSE} \quad w = wP(t) \quad \forall t > 0$$

$$A) wQ = 0 \Rightarrow w = wP(t) \quad \forall t > 0$$

$$wP(t) = w e^{tQ} = w \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} Q^k = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} wQ^k =$$

$$= w + \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} \underbrace{wQ^k}_{=0 \quad \forall k \geq 1} = w$$

$$B) w = wP(t) \quad \forall t > 0 \Rightarrow wQ = 0$$

$$\rightarrow w = wP(t) = w e^{tQ} = w \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} Q^k = w \left(\text{Id} + tQ + \underbrace{\sum_{k \geq 2} \frac{t^k}{k!} Q^k}_{\text{...}} \right)$$

$$\sum_{k \geq 2} \frac{t^k}{k!} Q^k = t^2 \sum_{k \geq 2} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} Q^k$$

$$t \in (0, 1] \quad \sum_{k \geq 2} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \|Q^k\| \leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-2)!} \|Q\|^k \leq$$

$t^{k-2} \leq 1$
 $\|Q^k\| \leq \|Q\|^k$

$$\leq \sum_{k \geq 0} \frac{\|Q\|^k}{k!} = e^{\|Q\|}$$

$$\forall t \in (0, 1] \quad 0 \neq w(\text{Id} + tQ + t^2 A(t)) \quad \text{con } \|A(t)\| \leq e^{\|Q\|}$$

$$0 = t wQ + t^2 A(t)$$

$$0 = wQ + tA(t) \quad \forall t \in (0, 1]$$

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (wQ + tA(t)) = wQ$$

COMPORTAMENTO ASINTOTICO

TEOREMA Sia $P(t) = e^{tQ}$ con Q una Q -matrice ($\Leftrightarrow P(t)$ è stocastica $\forall t \geq 0$)

Sono fatti equivalenti:

1) $\exists t_0 > 0$ t.c. $P(t_0)$ è irriducibile

2) $\exists w \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\lim_{t \rightarrow +\infty} xP(t) = w \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

N.B. $(X_t)_{t \geq 0}$ HNC assente $P(t)$ come matrice di Transizione
2) vuol dire $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(X_t = i) = w_i \quad \forall \pi_0$ distribuzione di X_0

N.B. $(X_t)_{t \geq 0}$ tnc assente $P(t)$ come matrice di Transizione
 2) vuol dire $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = j) = w_j$ $\forall \pi_0$ distribuzione di X_0

Nel caso in cui valgono i due fatti in che che:

a) w è l'unico vettore stocastico t.c. $wQ = 0$

b) Le componenti di w sono tutte positive

c) $\exists C < 1$ t.c. $\|xP(t) - w\|_1 \leq 2C^{\lfloor t \rfloor} \quad \forall x \in \mathcal{Y} \quad \forall t > 0$

Dim $1 \Rightarrow 2$ $\exists t_0 > 0$ t.c. $P(t_0)$ è irriducibile

$\Rightarrow \exists w \in \mathcal{Y}$ t.c. $\lim_{t \rightarrow \infty} xP(t) = w \quad \forall x \in \mathcal{Y}$

$P(t_0)$ irriducibile : Sia $N \times N$ la dimensione di $P(t_0) \Rightarrow$
 $\forall i, j = 1 \dots N \quad \exists n = n(i, j)$ t.c. $(P(t_0)^n)^i_j > 0$

$$P(t_0)^n = (e^{t_0 Q})^n = e^{n t_0 Q} = P(n t_0)$$

$\Rightarrow \forall i, j = 1 \dots N \quad \exists t_n = n t_0$ t.c. $P(t_n)^i_j > 0$

$\Rightarrow \forall i, j = 1 \dots N \quad \forall t > 0 \quad P(t)^i_j > 0$

Fisso $t > 0$: so che l'applicazione $\underline{P}(t): x \in \mathcal{Y} \mapsto xP(t) \in \mathcal{Y}$
 è una contrazione dello spazio metrico $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_1)$

$\Rightarrow \exists!$ $w(t) \in \mathcal{Y}$ punto fisso per l'applicazione $\underline{P}(t)$

che è anche l'unico pto fisso di $\underline{P}(t) \Rightarrow w(t)Q = 0$

$$\Rightarrow w(t)P(s) = w(t)e^{sQ} = w(t) \quad \forall s > 0$$

Se $s \neq t$, anche $\underline{P}(s): x \in \mathcal{Y} \mapsto xP(s) \in \mathcal{Y}$ è una contrazione

$\Rightarrow \exists!$ $w(s) \in \mathcal{Y}$ punto fisso per l'applicazione $\underline{P}(s)$

che è anche l'unico pto fisso di $\underline{P}(s) \Rightarrow w(s)Q = 0$

$$\Rightarrow w(s)P(t) = w(s)e^{tQ} = w(s) \Rightarrow w(s) \text{ è pto fisso di } \underline{P}(t)$$

Per l'unicità del pto fisso $w(s) = w(t)$ cioè il pto fisso di $\underline{P}(t)$

è un unico vettore stocastico da indicare w

$\exists! w \in \mathcal{Y}$ t.c. $\forall t > 0$ e $\forall x \in \mathcal{Y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} xP(t)^k = 0$

$$t > 0 \quad C(t) := \frac{1}{2} \max \{ \|R^i(t) - R^j(t)\|_1 \quad i, j = 1 \dots N \}$$

$$R^i(t) := \text{riga } i\text{-esima di } P(t) \quad P(t) = e^{tQ}$$

$\Rightarrow C(t)$ è una funzione continua e $C(t) < 1 \quad \forall t > 0$

$\Rightarrow C(t)$ è una funzione continua e $C(t) < 1 \quad \forall t > 0$

Considero $C(t)$, per $t \in [1, 2]$, $C(t) < 1$
 È una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato
 $\Rightarrow$ per il Teorema di Weierstrass ammette MAX e min
 Sia $C_M := \max \{C(t) : t \in [1, 2]\}$ - $C_M < 1$

$$\rightarrow \|x P(t)^k - w\|_1 \leq C(t)^k \text{diam}(\mathcal{A}) \leq 2 C_M^k \quad t \in [1, 2]$$

$$s \geq 1$$

$$\frac{s}{\lfloor s \rfloor}$$

$$s \geq 1 \Rightarrow \lfloor s \rfloor \geq 1$$

$$\underbrace{\lfloor s \rfloor} \leq s < 1 + \underbrace{\lfloor s \rfloor} \leq \lfloor s \rfloor + \lfloor s \rfloor = 2 \lfloor s \rfloor$$

$$1 \leq \frac{s}{\lfloor s \rfloor} \leq 2$$

$$s \geq 1 \quad \|x P\left(\frac{s}{\lfloor s \rfloor}\right)^k - w\|_1 \leq 2 C_M^k \quad \leftarrow$$

$$P(s) = e^{sQ} = e^{\lfloor s \rfloor \frac{s}{\lfloor s \rfloor} Q} = \left(e^{\frac{s}{\lfloor s \rfloor} Q} \right)^{\lfloor s \rfloor} = P\left(\frac{s}{\lfloor s \rfloor}\right)^{\lfloor s \rfloor}$$

$$k = \lfloor s \rfloor \quad \|x P(s) - w\|_1 \leq 2 C_M^{\lfloor s \rfloor}$$

$(X(t))_{t \geq 0}$ HMC a stati finiti con matrice di Transizione $P(t) = e^{tQ}$

Q una Q -matrice $Q_{ij}^i = 0 \quad \forall j = 1 - N$ per uno stato
 riga i

$$(Q^2)_{ij}^i = \sum_{k=1}^N \underbrace{Q_{ik}^i}_{=0 \quad \forall k} Q_{kj}^k = 0$$

$$(Q^3)_{ij}^i = (Q \cdot Q^2)_{ij}^i = \sum_{k=1}^N \underbrace{Q_{ik}^i}_{=0 \quad \forall k} (Q^2)_{kj}^k = 0$$

$$\Rightarrow (Q^k)_{ij}^i = 0 \quad \forall j \in \{1 - N\} \text{ e } \forall k \geq 1$$

$$(e^{tQ})_{ij}^i = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} (Q^k)_{ij}^i = (Id)_{ij}^i = \delta_{ij}$$

$$P(X_t = j | X_0 = i) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \quad \forall t > 0$$

Se $Q_j^i = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$, lo stato i si dice uno STATO PERMANENTE, altrimenti si dice uno STATO ESSENZIALE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio probabilizzato completo sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo stocastico definito su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a valori in un insieme discreto S continuo da destra

$\forall i \in S$ chiamiamo TEMPO DI SOGGIORNO IN i

$$S_j^i(\omega) := \inf \{ t > 0 : X_t(\omega) \neq i \}$$

Se $X_0(\omega) \neq i \Rightarrow \exists \varepsilon(\omega) > 0$ t.c. $X_t(\omega) \neq i \quad \forall t \in [0, \varepsilon(\omega))$
 $\Rightarrow \inf \{ t > 0 : X_t(\omega) \neq i \} = 0$ cioè $S_j^i(\omega) = 0$

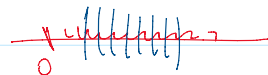
PROPOSIZIONE Se $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è completo e se il processo $(X_t)_{t \geq 0}$ è continuo da destra, allora $S_j^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

DIM $\mathcal{D} \subset [0, +\infty)$ denso e numerabile



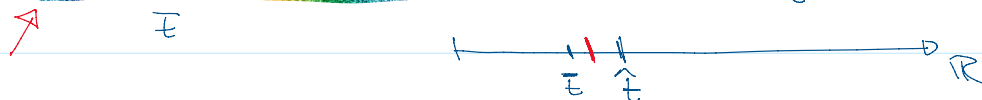
$$S_j^i(\omega) := \inf \{ t > 0 : X_t(\omega) \neq i \} \leftarrow$$

$$S_{\mathcal{D}}^i(\omega) := \inf \{ t > 0 : t \in \mathcal{D} \text{ e } X_t(\omega) \neq i \}$$



$$\Rightarrow S_j^i(\omega) \leq S_{\mathcal{D}}^i(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\{ t > 0 : t \in \mathcal{D} \text{ e } X_t(\omega) \neq i \} \subset \{ t > 0 : X_t(\omega) \neq i \}$$

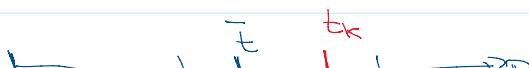


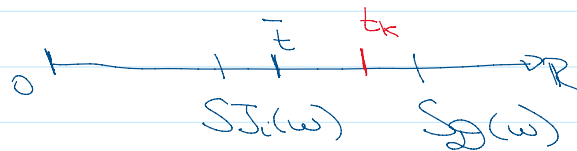
TESI $\exists \Omega_0 \subset \Omega \quad P(\Omega_0) = 1$ t.c. $S_j^i(\omega) = S_{\mathcal{D}}^i(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_0$

Sia $\Omega_0 \subset \Omega$ l'evento quasi certo t.c.

$\forall \omega \in \Omega_0 \quad t \mapsto X_t(\omega)$ è continua da destra

Per assurdo supponiamo $S_j^i(\omega) < S_{\mathcal{D}}^i(\omega) \quad \omega \in \Omega_0$





$$\Rightarrow \exists \bar{t} \in [0, +\infty) \setminus \mathcal{D} \quad \text{T.c.} \quad X_{\bar{t}}(\omega) \neq i$$

The $\mathcal{D}$ is dense in $[0, +\infty) \Rightarrow \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad t_k > t_{k+1} \quad \text{T.c.}$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \bar{t} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} X_{t_k}(\omega) = X_{\bar{t}}(\omega)$

The $\bar{t} < S_D(\omega) \Rightarrow \exists \bar{t} \quad \text{T.c.} \quad \forall k > \bar{t} \quad t_k < S_D(\omega)$

The $t_k \in \mathcal{D} \Rightarrow X_{t_k}(\omega) = i \quad \forall k > \bar{t}$

$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{t_k}(\omega) = i \Rightarrow X_{\bar{t}}(\omega) = i$
 ASSURÉ

So $t > 0 \quad \{S_{Ji} > t\} = \{\omega \in \Omega : S_{Ji}(\omega) > t\} =$
 $= \{\omega \in \Omega_0 : S_{Ji}(\omega) > t\} \cup \{\omega \in \Omega \setminus \Omega_0 : S_{Ji}(\omega) > t\}$
 $= \underbrace{\{\omega \in \Omega_0 : S_D(\omega) > t\}}_{\text{EST UN EVENTO}} \cup \underbrace{\{\omega \in \Omega \setminus \Omega_0 : S_{Ji}(\omega) > t\}}$

$$S_D(\omega) = \inf \{t > 0 : t \in \mathcal{D} \text{ et } X_t(\omega) \neq i\}$$

$$\{\omega \in \Omega_0 : S_D(\omega) > t\} = \{\omega \in \Omega_0 : X_s(\omega) = i \quad \forall s \in \mathcal{D} \cap [0, t]\}$$

$$\subseteq \text{ et } \supseteq$$

1) $\{\omega \in \Omega_0 : S_D(\omega) > t\}$

$$S_D(\omega) > t$$

$$\inf \{s > 0 : s \in \mathcal{D} : X_s(\omega) \neq i\} > t$$

$$\Rightarrow \forall s \in \mathcal{D}, s < t, X_s(\omega) = i \quad \text{car } X_s(\omega) = i \quad \forall s \in \mathcal{D} \cap [0, t]$$

$$\Rightarrow \omega \in \{\omega \in \Omega_0 : X_s(\omega) = i \quad \forall s \in \mathcal{D} \cap [0, t]\}$$

2) $\{\omega \in \Omega_0 : X_s(\omega) = i \quad \forall s \in \mathcal{D} \cap [0, t]\}$

$$\omega \in \Omega_0 \quad X_s(\omega) = i \quad \forall s \in \mathcal{D} \cap [0, t] \Rightarrow$$

$$\text{So } X_s(\omega) \neq i \text{ et } s \in \mathcal{D} \Rightarrow s > t \Rightarrow$$

$$S_D(\omega) := \inf \{s > 0 : s \in \mathcal{D}, X_s(\omega) \neq i\} > t$$

$$\{\omega \in \Omega_0 : S_D(\omega) > t\} = \bigcap_{\substack{s \in \mathcal{D} \cap [0, t] \\ \text{in } \mathcal{D} \text{ et } s \leq t}} \underbrace{\{\omega \in \Omega_0 : X_s(\omega) = i\}}_{\in \mathcal{E} \quad \forall s} \in \mathcal{E}$$

$$\{\omega \in \Omega \setminus \Omega_0 : SJ_i(\omega) > t\} \subset \Omega \setminus \Omega_0$$

$P(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ - Sono in uno spazio probabilizzato completo
 $\Rightarrow \{\omega \in \Omega \setminus \Omega_0 : SJ_i(\omega) > t\} \in \mathcal{E}$ e ha probabilità nulla

Supponiamo che da $(X_t)_{t \geq 0}$ sia una MMC con spazio degli stati S finito -

$$\omega \in \Omega \quad SJ_i(\omega) = \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \neq i\}$$

$$P(t) = e^{tQ} \quad \text{con } Q \text{ una } Q\text{-matrice} = (Q_{ij}^i)_{i,j=1-N}$$

$$\text{Se } Q_{ij}^i = 0 \quad \forall j = 1-N \quad P(X_t = j \mid X_0 = i) = \delta_{ij}$$

$$\rightarrow \text{Se } Q_{ij}^i = 0 \quad \forall j = 1-N \quad P(X_t = i \mid X_0 = i) = 1$$

$$\text{Per } P\text{-q.o. } \omega \in \Omega : X_0(\omega) = i \text{ si ha } X_t(\omega) = i \quad \forall t > 0$$

$$\text{N.B. } Q_{ij}^i = 0 \quad \forall j = 1-N \quad \text{equivale a dire } Q_{ii}^i = 0$$

TEOREMA Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ MMC su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ a stati finiti $S = \{1-N\}$ e con matrice di Transizione $P(t) = e^{tQ}$
 Se $Q_{ii}^i \neq 0$, allora SJ_i è una v.c. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = -Q_{ii}^i$ rispetto a $P(\cdot \mid X_0 = i)$

DM

$$P(SJ_i \leq t \mid X_0 = i) \quad t \in \mathbb{R}$$

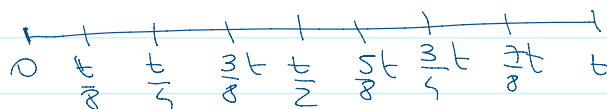
$$P(SJ_i > t \mid X_0 = i)$$

$$\{SJ_i > t\} = \Omega \setminus \{SJ_i \leq t\}$$

$$P(SJ_i \leq t \mid X_0 = i) = 1 - P(SJ_i > t \mid X_0 = i)$$

Costruiamo un insieme $\mathcal{D}$ denso e numerabile nell'intervallo $[0, t]$

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{j \cdot t}{2^n} \quad j = 0, \dots, 2^n, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{è denso in } [0, t] \\ \text{è numerabile}$$



$$\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{j \cdot t}{2^n} \quad j = 0, \dots, 2^n \right\}$$

$$\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{jt}{2^n} \quad j=0, \dots, 2^n \right\}$$

$$\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D}_{n+1} \supseteq \mathcal{D}_n$$

$$\frac{jt}{2^{n+1}} \begin{cases} j \text{ pair} & \frac{2kt}{2^{n+1}} \\ j \text{ dispar} & \frac{(2k+1)t}{2^{n+1}} \end{cases}$$

$$j=0 \dots 2^{n+1} \quad 0 \leq 2k \leq 2^{n+1} \quad 0 \leq k \leq 2^n \Rightarrow \frac{2kt}{2^{n+1}} \in \mathcal{D}_n$$

$$\mathbb{P}(S_j > t \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(S_{2^n} > t \mid X_0 = i) =$$

$$= \mathbb{P}\left(X_{\frac{jt}{2^n}} = i \quad \forall j=0 \dots 2^n, \forall n \in \mathbb{N} \mid X_0 = i \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ X_{\frac{jt}{2^n}} = i \quad \forall j=0 \dots 2^n \right\} \mid X_0 = i \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ X_t = i, X_{\frac{(2^{n-1})t}{2^n}} = i, \dots, X_{\frac{t}{2^n}} = i \right\} \mid X_0 = i \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(X_t = i, X_{\frac{(2^{n-1})t}{2^n}} = i, \dots, X_{\frac{t}{2^n}} = i \mid X_0 = i \right) \leftarrow$$

$$t > s > 0 \quad \mathbb{P}(X_t = i, X_s = i \mid X_0 = i) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \frac{\mathbb{P}(X_t = i, X_s = i, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_s = i, X_0 = i)} \mathbb{P}(X_s = i, X_0 = i)$$

$$= \mathbb{P}(X_t = i \mid X_s = i, \cancel{X_0 = i}) \mathbb{P}(X_s = i \mid X_0 = i)$$

$$= \mathbb{P}(X_t = i \mid X_s = i) \mathbb{P}(X_s = i \mid X_0 = i)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{P}\left(X_{\frac{t(j+1)}{2^n}} = i \mid X_{\frac{tj}{2^n}} = i \right) = \frac{\frac{t(j+1)}{2^n} - \frac{tj}{2^n}}{\frac{t}{2^n}} = \frac{t}{2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{2^n-1} \left(\mathbb{P}\left(\frac{t}{2^n} \right) \right)_i^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{P}\left(\frac{t}{2^n} \right)_i \right)^{2^n}$$

$$n \rightarrow \infty \quad \frac{t}{2^n} \rightarrow 0^+ \quad \mathbb{P}(s) = e^{sQ} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} Q^k$$

$$= \text{Id} + sQ + s^2 A(s) \quad \text{con} \quad \|A(s)\| \leq e^{\|Q\|} \quad \forall s \in (0,1]$$

$$= Id + sQ + s^2 A(s) \quad \text{con} \quad \|A(s)\| \leq e^{\|Q\|} \quad \forall s \in (0,1]$$

$$\left(\underbrace{1 + \frac{t}{2^n} Q_i^i + O(2^{-2n})}_x \right)^{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{t Q_i^i} t Q_i^i}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{1 + \frac{t}{2^n} Q_i^i + O(2^{-2n})}_{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{t Q_i^i} t Q_i^i} \right)^{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{t Q_i^i} t Q_i^i} = e^{t Q_i^i}$$

$$\mathbb{P}(SJ_i > t) = e^{t Q_i^i} = e^{-(-Q_i^i)t}$$

$$F_{SJ_i}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(-Q_i^i)t} & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$$

Quella è la legge della distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = -Q_i^i$.