

$$P(s, t)_j^i := \begin{cases} P(X_t=j | X_s=i) & P(X_s=i) > 0 \\ \delta_{ij} & P(X_s=i) = 0 \end{cases}$$

$$P(s, t) = P(0, t-s) \quad \forall 0 \leq s \leq t$$

PROCESSO STOCASTICO CONTINUO DA DESTRA

Significato nel caso in cui S insieme degli stati sia discreto

SPAZIO PROBABILIZZATO COMPATTO

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato - Direi che lo spazio è completo se $\forall N \subseteq \Omega$ T.c. $\exists \Omega_0 \in \mathcal{E}$ $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$, $\Omega_0 \supseteq N$, in che caso $N \in \mathcal{E}$ ($\Rightarrow \mathbb{P}(N) = 0$)

$(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mathcal{L}^N)$ non è completo
 $(\mathbb{R}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^N}, \mathcal{L}^N)$ è completo $\leftarrow$

$(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ a valori in S insieme discreto

$\forall t \geq 0$ X_t è una v.v. $\{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = j \} \in \mathcal{E} \quad \forall j \in S$

$\{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = j \quad \forall t \in [a, b] \} \in \mathcal{E}$
 $\hookrightarrow \bigcap_{t \in [a, b]} \{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = j \}$ non è un'intersezione numerabile

PROPRIETÀ Sia $\mathcal{D} \subset [0, +\infty)$ denso e numerabile

$(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico definito su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e continuo da destra a valori in un insieme discreto S

Per $0 \leq a < b$, $i \in S$ siano

$$E_i = \{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a, b] \}$$

$$E_{\mathcal{D}} := \{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a, b) \cap \mathcal{D} \}$$

N.B. $E_{\mathcal{D}} \supseteq E$

Allora $E_{\mathcal{D}} \cap E$ è contenuto in un evento quasi-impossibile **NO IN**

COROLLARIO Nelle stesse ipotesi della proprietà, se $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ è uno spazio probabilizzato completo, lo che $E_0 \in \mathcal{E}$ è un evento pienamente impossibile e, di conseguenza, $\bar{E} = E_0 \setminus (E_0 \cap \bar{E})$ è un evento e $P(\bar{E}) = P(E_0)$

PROPOSIZIONE Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico definito su $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ spazio probabilizzato e valori in S insieme discreto - Supponiamo che $(X_t)_{t \geq 0}$ sia continuo da destra

Allora $\lim_{t \rightarrow s^+} P(s, t) = Id$ $\left(\lim_{t \rightarrow s^+} P(s, t) = P(s, s) \right)$

DM $\Omega' := \{ \omega \in \Omega \text{ T.c. } t \mapsto X_t(\omega) \text{ è continua da destra} \}$
 $P(\Omega') = 1$

Sia $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ T.c. $t_{n+1} < t_n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$

Se dimostriamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} P(s, t_n) = Id \Rightarrow$ ho provato la Terza

$A := \{ \omega \in \Omega' : X_s(\omega) = i \} =$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \{ \omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i \} =: B$

$\lim_{t \rightarrow s^+} f(t) = L$
 $\updownarrow$

$\forall (t_n) \quad t_{n+1} < t_n$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$

si ha che

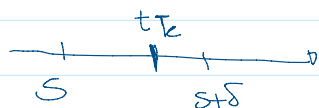
$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = L$

$f(t) = P(s, t)$

DM ① $A \subseteq B$

$\bar{\omega} \in A \quad t \mapsto X_t(\bar{\omega})$ è continua da destra

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ T.c. $X_t(\bar{\omega}) = i \quad \forall t \in [s, s+\delta)$



Sia $\bar{k}$ T.c. $t_{\bar{k}} \in (s, s+\delta)$

$\Rightarrow t_k \in (s, s+\delta) \quad \forall k \geq \bar{k}$

$\Rightarrow X_{t_k}(\bar{\omega}) = i \quad \forall k \geq \bar{k}$

$\Rightarrow \bar{\omega} \in \{ \omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i \quad \forall k \geq \bar{k} \} = \bigcap_{k=\bar{k}}^{\infty} \{ \omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i \}$

$\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \{ \omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i \} = B$

② $\bar{\omega} \in B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \{ \omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i \} \Rightarrow$

$\exists \bar{n}$ T.c. $\bar{\omega} \in \bigcap_{k \geq \bar{n}} \{ \omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i \} \Rightarrow$

$\exists \bar{n}$ t.c. $X_{t_k}(\bar{\omega}) = i \quad \forall k \geq \bar{n}$ 

$\Rightarrow X_s(\bar{\omega}) = i$ perché $\bar{\omega} \in \Omega'$

$$\{\omega \in \Omega'; X_s(\omega) = i\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \{\omega \in \Omega'; X_{t_k}(\omega) = i\} \quad \leftarrow$$

$$1 = P(s, s)_i^i = P(X_s = i | X_s = i) = \heartsuit$$

$$\{X_s = i\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega'; X_s(\omega) = i\}}_{\substack{\text{con } \tilde{\Omega} \subseteq \Omega - \Omega' \\ P(\tilde{\Omega}) = 0}} \cup \tilde{\Omega}$$

$$B_n := \bigcap_{k \geq n} \{\omega \in \Omega'; X_{t_k}(\omega) = i\} \quad B_{n+1} \subseteq B_n$$

$$\{\omega \in \Omega'; X_s(\omega) = i\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$\heartsuit = 1 = P(X_s = i | X_s = i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k \geq n} \{\omega \in \Omega'; X_{t_k}(\omega) = i\} \mid X_s = i\right)$$

$$P\left(\bigcap_{k \geq n} \{\omega \in \Omega'; X_{t_k}(\omega) = i\} \mid X_s = i\right) \leq P(\{\omega \in \Omega'; X_{t_n}^{(\omega)} = i\} \mid X_s = i)$$

$$= P(X_{t_n} = i \mid X_s = i) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{t_n} = i \mid X_s = i) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow s^+} P(s, t)_i^i = 1$$

$$j \neq i \quad \sum_{j \neq i} P(X_t = j \mid X_s = i) = 1 - \underbrace{P(X_t = i \mid X_s = i)}_{t \rightarrow s^+ \Rightarrow \rightarrow 1}$$

$$\lim_{t \rightarrow s^+} \sum_{j \neq i} P(X_t = j \mid X_s = i) = 0$$

$$\Downarrow \\ \exists \lim_{t \rightarrow s^+} P(X_t = j \mid X_s = i) = 0 \quad \forall j \neq i$$

DEF Sia $(T_n)_{n \geq 1}$ un processo stocastico a Tempo discreto e valori in $[0, +\infty]$
 t.c. ① per qo $\omega \in \Omega$, se $T_n(\omega) < +\infty \Rightarrow 0 < T_n(\omega) < T_{n+1}(\omega)$ **SEMPRE IN CRESCITA**
 ② per qo $\omega \in \Omega$ $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\omega) = +\infty$ **LOCALMENTE FINITA**

N.B. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\omega) = +\infty$ e $[a, b] \subset [0, +\infty) \Rightarrow$ in $[a, b]$ cade al più un numero finito di pti della successione $(T_n(\omega))_{n \geq 1}$

Il processo $(T_n)_{n \geq 1}$ si dice un processo stocastico di punti semplici
 e localmente finito ed è detto successione degli eventi

Dati $0 \leq a \leq b$, considero l'intervallo $(a, b]$ e considero

$$N((a, b])(\omega) := \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{(a, b]}(T_n(\omega))$$

$N((a, b])$ è una v.a. non negativa $N((a, b]) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Per $t \geq 0$ definisco $N_t(\omega) := N((0, t])(\omega)$

n.b. $N_0(\omega) = N(\emptyset)(\omega) = 0$

$$N((a, b]) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{(a, b]}(T_n(\omega)) = \sum_{n \geq 1} \left(\mathbb{1}_{(a, b]}(T_n(\omega)) - \mathbb{1}_{(0, a]}(T_n(\omega)) \right)$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{(a, b]} = \mathbb{1}_{(0, b]} - \mathbb{1}_{(0, a]}}$$

$$= \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{(0, b]}(T_n(\omega)) - \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{(0, a]}(T_n(\omega)) = N((0, b])(\omega) - N((0, a])(\omega)$$

$$= N_b(\omega) - N_a(\omega) \quad \text{cioè} \quad N((a, b]) = N_b(\omega) - N_a(\omega)$$

PROPRIETÀ Per q.o. $\omega \in \Omega$ la mappa $t \in [0, +\infty) \mapsto N_t(\omega) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
 è continua da destra (il processo $(N_t)_{t \geq 0}$ è continuo da destra)

DIM Devo dimostrare che $\forall t \in [0, +\infty) \quad \lim_{s \rightarrow t^+} N_s(\omega) = N_t(\omega)$

$\forall t \in [0, +\infty), \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $\forall s \in [t, t+\delta)$ si ha

$$N_t(\omega) - \varepsilon < N_s(\omega) \leq N_t(\omega) + \varepsilon$$

sempre vale perché $s > t \Rightarrow (0, s] \supset (0, t] \Rightarrow N((0, s]) \geq N((0, t])$ cioè $N_s \geq N_t$

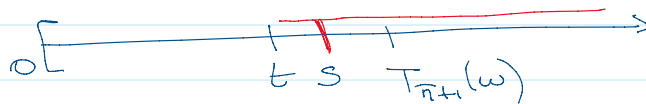
$$N_s(\omega) := \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{(0, s]}(T_n(\omega)) = \max \{n \in \mathbb{N} : T_n(\omega) \leq s\}$$

$$\max \{n \in \mathbb{N} : T_n(\omega) \leq s\} \xrightarrow[s \rightarrow t^+]{\text{???}} \max \{n \in \mathbb{N} : T_n(\omega) \leq t\}$$

" $N_s(\omega)$ " $N_t(\omega)$

$$\text{Sia } \bar{n} := N_t(\omega) \quad \Rightarrow \quad T_{\bar{n}}(\omega) \leq t < T_{\bar{n}+1}(\omega)$$

$$\text{Sia } \bar{n} := N_t(\omega) \quad \Rightarrow \quad T_{\bar{n}}(\omega) \leq t < T_{\bar{n}+1}(\omega)$$



$$\forall s \in (t, T_{\bar{n}+1}(\omega)) \quad \text{si ha} \quad N_s(\omega) = \bar{n} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow t^+} N_s(\omega) = \bar{n} = N_t(\omega)$$

Considero quindi il processo stocastico $(N_t)_{t \geq 0}$

- prende valori in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ma è q.c. finito
- per q.o. $\omega \in \Omega$, se $0 \leq s \leq t \Rightarrow N_s(\omega) \leq N_t(\omega)$
- per q.o. $\omega \in \Omega$, $N_t(\omega)$ è costante a tratti e aumenta di 1 unità in corrispondenza di ogni evento $T_n(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$

Il processo $(N_t)_{t \geq 0}$ si dice **PROCESSO DI CONTEGGIO** del processo di punto $(T_n)_{n \geq 1}$

$$T_1(\omega) = \min \{t > 0 \text{ t.c. } N_t(\omega) \text{ è discontinua in } t\}$$

$$T_2(\omega) = \min \{t > T_1(\omega) \text{ t.c. } N_t(\omega) \text{ è discontinua in } t\}$$

:

$$T_k(\omega) = \min \{t > T_{k-1}(\omega) \text{ t.c. } N_t(\omega) \text{ è discontinua in } t\}$$

$$T_1(\omega) = \min \{t > 0 \text{ t.c. } N_t(\omega) = 1\}$$

$$T_k(\omega) = \min \{t > 0 \text{ t.c. } N_t(\omega) = k\}$$

$$(N([a, b]))_{0 \leq a \leq b}$$

La famiglia $(N([a, b]))_{0 \leq a \leq b}$ si dice un **PROCESSO DI POISSON ORDINATO** se:

- ① $\forall k \geq 1$ e $\forall [a_j, b_j]$ $0 \leq a_j \leq b_j$, $j = 1, \dots, k$ intervalli a due a due disgiunti le v.e. $N([a_1, b_1]), N([a_2, b_2]), \dots, N([a_k, b_k])$ sono v.e. indipendenti. $\leftarrow$
- ② $\forall [a, b] \subset [0, +\infty)$, $0 \leq a < b$, $N([a, b])$ è una v.e. con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda(b-a)$, $\lambda > 0$

λ si dice **INTENSITÀ** DEL PROCESSO

$$X \sim \text{Poisson}(\mu)$$

X che valori in $\mathbb{N}$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X=k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

$$E[X] = \text{Var}[X] = \mu$$

$$(N_t)$$

$$E[X] = \text{Var}[X] = \mu \quad k!$$

$$(N_t)_{t \geq 0}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow a_1 = 0 \quad a_2 = b_1 \quad a_3 = b_2 \quad \dots \quad a_{k+1} = b_k$$

$$N((0, b_1]) = N_{b_1} \quad N((a_2, b_2]) = N_{b_2} - N_{a_2} = N_{b_2} - N_{a_1}$$

$N_{b_1}, N_{b_2} - N_{b_1}, N_{b_3} - N_{b_2}, \dots, N_{b_k} - N_{b_{k-1}}$ sono v.e. indipendenti

$$\textcircled{2} \Rightarrow N((0, b]) = N_b \text{ è una v.e. con distribuzione di Poisson di parametro } \lambda b$$

$$P(N_b = k) = e^{-\lambda b} \frac{(\lambda b)^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$T_0(\omega) = 0$$

$$n \geq 1 \quad S_n(\omega) = T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)$$

$(S_n)_{n \geq 1}$ successione delle attese associate alla successione degli eventi

TEOREMA (NO DIN)

Le successione delle attese di un processo di Poisson omogeneo di intensità $\lambda > 0$ è una successione di v.e. i.i.d. con $P_{S_n} = \exp(-\lambda)$

$$\text{In particolare } E[S_n] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}[S_n] = \frac{1}{\lambda^2}$$

N.B. $P_X = \exp(-\lambda)$ vuol dire che X è una v.e. con distribuzione A.C. e derivata

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

CATENE DI MARKOV A TEMPO CONTINUO

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ spazio probabilizzato completo e ne $(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico definito su $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ e valori in S insieme denso. T.c. il processo $(X_t)_{t \geq 0}$ è continuo da destra

Dico che $(X_t)_{t \geq 0}$ è una catena di Markov a tempo continuo se:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall 0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \quad \text{e} \quad \forall i_0, i_1, \dots, i_n \in S \quad \text{t.c.}$$

$$P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$$

in che da $\forall t > t_n$ e $\forall j \in S$

$$P(X_t = j \mid X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_t = j \mid X_{t_n} = i_n)$$

La catena si dice omogenea se $P(X_t = j \mid X_{t_n} = i_n) = P(X_{t-t_n} = j \mid X_0 = i_n)$

La catena si dice omogenea se $P(X_t=j | X_{t_n}=i_n) = P(X_{t-t_n}=j | X_0=i_n)$
 $\forall 0 \leq t_n < t, \forall i_n, j \in S$

EQUAZIONI DI CHAPMAN-KOLMOGOROV

Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ catena di Markov a Tempo continuo con insieme degli stati S
e $\forall 0 \leq s \leq t$ considero $P(s, t)$ matrice di Transizione
Allora $\forall z \in [s, t]$ si ha $P(s, t) = P(s, z)P(z, t)$

DIM Siano $i, j \in S$ $P(s, t)_j^i = P(X_t=j | X_s=i) =$

$$= \frac{1}{P(X_s=i)} P(X_t=j, X_s=i) \quad \{X_t=j, X_s=i\} = \{X_t=j, X_z \in S, X_s=i\}$$

$$= \frac{1}{P(X_s=i)} \sum_{k \in S} P(X_t=j, X_z=k, X_s=i) \quad = \bigcup_{k \in S} \{X_t=j, X_z=k, X_s=i\}$$

$$= \sum_{k \in S} \left(\frac{P(X_t=j, X_z=k, X_s=i)}{P(X_z=k, X_s=i)} \cdot \frac{P(X_z=k, X_s=i)}{P(X_s=i)} \right)$$

$$= \sum_{k \in S} P(X_t=j | X_z=k, X_s=i) P(X_z=k | X_s=i)$$

$$= \sum_{k \in S} P(z, t)_j^k P(s, z)_k^i = \sum_{k \in S} P(s, z)_k^i P(z, t)_j^k = \left(P(s, z)P(z, t) \right)_j^i$$

$$\Rightarrow P(s, t)_j^i = \left(P(s, z)P(z, t) \right)_j^i \quad \forall i, j \in S \Rightarrow P(s, t) = P(s, z)P(z, t)$$

Supponiamo che la catena $(X_t)_{t \geq 0}$ sia omogenea

$$P(t-s) = P(s, t) = P(s, z)P(z, t) = P(z-s)P(t-z)$$

$$z-s =: \theta_1, \quad t-z =: \theta_2 \Rightarrow t-s = t-z+z-s = \theta_1 + \theta_2$$

$$P(\theta_1 + \theta_2) = P(\theta_1)P(\theta_2)$$

$$P(\theta_2 + \theta_1) = P(\theta_2)P(\theta_1)$$

$$\Rightarrow P(\theta_1)P(\theta_2) = P(\theta_2)P(\theta_1)$$

$$\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$$

Le equazioni:
$$\begin{cases} P(s,t) = P(s,z)P(z,t) & 0 \leq s \leq z \leq t \\ P(s,s) = Id \end{cases}$$

Si dicono EQUAZIONI DI CHAPMAN-KOLMOGOROV

ESempi

Sia N un processo di Poisson omogeneo di intensità λ

Considero $N_t := N([0,t])$

Allora $(N_t)_{t \geq 0}$ è un HMC a Tempo continuo con $P(t) = (P(t))_j^i$ è data da

$$P(t)_j^i = \begin{cases} 1 & j=i \\ e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & j \geq i \\ 0 & j < i \end{cases}$$

$i=0$	$j=0$ $e^{-\lambda t}$	$j=1$ $e^{-\lambda t} \lambda t$	$j=2$ $e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^2}{2!}$	$j=3$ $e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^3}{3!}$	...
$i=1$	0	$e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t} \lambda t$	$e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^2}{2!}$	...
$i=2$	0	0	$e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t} \lambda t$	...
	0				
	0				
	0				

DIM

$$0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < s < t$$

$$\begin{aligned} & P(N_t = j \mid N_s = i, N_{s_k} = i_k, \dots, N_{s_1} = i_1) = \\ & = \frac{P(N_t = j, N_s = i, N_{s_k} = i_k, \dots, N_{s_1} = i_1)}{P(N_s = i, N_{s_k} = i_k, \dots, N_{s_1} = i_1)} = \text{(e)} \end{aligned}$$

$$\{N_t = j, N_s = i\} = \{N_s = i, N((s,t]) = j-i\}$$

$$N_t - N_s = N((s,t]) \quad \begin{matrix} N_t = j \\ N_s = i \end{matrix} \quad N_t = N_s + N((s,t])$$

$$\text{(e)} = \frac{P(N((s,t]) = j-i, N_s = i, N_{s_k} = i_k, \dots, N_{s_1} = i_1)}{P(N_s = i, N_{s_k} = i_k, \dots, N_{s_1} = i_1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N((s,t]) = j-i) \cancel{\mathbb{P}(N_s = i, N_{s_k} = i_k, \dots, N_{s_r} = i_r)}}{\cancel{\mathbb{P}(N_s = i, N_{s_k} = i_k, \dots, N_{s_r} = i_r)}} \\ = \mathbb{P}(N((s,t]) = j-i) \leftarrow$$

$$\mathbb{P}(N_t = j | N_s = i) = \frac{\mathbb{P}(N_t = j, N_s = i)}{\mathbb{P}(N_s = i)} = \frac{\mathbb{P}(N((s,t]) = j-i, N_s = i)}{\mathbb{P}(N_s = i)} \\ = \frac{\mathbb{P}(N((s,t]) = j-i) \cancel{\mathbb{P}(N_s = i)}}{\cancel{\mathbb{P}(N_s = i)}} = \mathbb{P}(N((s,t]) = j-i) \leftarrow \\ e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!}$$

ESEMPIO PROCESSI FLIP-FLOP

Sia X_0 v.a. definita su uno spazio probabilistico completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in $\{-1, 1\}$

Sia N un processo di Poisson omogeneo di intensità λ , che sia indipendente da X_0

Per $t \geq 0$ definisco $X_t(\omega) := X_0(\omega) \cdot (-1)^{N_t(\omega)}$

Altre $(X_t)_{t \geq 0}$ è una HRC a Tempo discreto con spazio degli stati $S = \{-1, 1\}$ con matrice di transizione

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+e^{-2\lambda t}}{2} & \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2} \\ \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2} & \frac{1+e^{-2\lambda t}}{2} \end{pmatrix}$$

Verificare per esercizio che $(X_t)_{t \geq 0}$ è una catena di Markov

$$\mathbb{P}(X_t = 1 | X_s = -1) = ?$$

$$\{X_t = 1, X_s = -1\} = \{X_t = 1, X_s = -1, X_0 = 1\} \cup \{X_t = 1, X_s = -1, X_0 = -1\} \\ = \{X_0 = 1, N_s \text{ dispari}, N_t \text{ pari}\} \cup \{X_0 = -1, N_s \text{ pari}, N_t \text{ dispari}\}$$

$$\mathbb{P}(X_t = 1 | X_s = -1) = \frac{1}{\mathbb{P}(X_s = -1)} \mathbb{P}(X_t = 1, X_s = -1) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = -1)} \left\{ \mathbb{P}(N_t \text{ pari}, N_s \text{ dispari}, X_0 = 1) + \mathbb{P}(N_t \text{ dispari}, N_s \text{ pari}, X_0 = -1) \right\}$$

$$= \frac{1}{P(X_S = -1)} \left\{ P(N_t \text{ pair}, N_S \text{ dispar}, X_0 = 1) + P(N_t \text{ dispar}, N_S \text{ pair}, X_0 = -1) \right\}$$

$$= \frac{1}{P(X_S = -1)} \left\{ P(N((s, t]) \text{ dispar}, N_S \text{ dispar}, X_0 = 1) + P(N((s, t]) \text{ pair}, N_S \text{ pair}, X_0 = -1) \right\}$$

$N_t = N_s + N((s, t])$
 pair dispar
 dispar pair

$$= \frac{1}{P(X_S = -1)} \left\{ P(X_0 = 1) P(N((s, t]) \text{ dispar}, N_S \text{ dispar}) + P(X_0 = -1) P(N((s, t]) \text{ pair}, N_S \text{ pair}) \right\}$$

$N_S = N(0, s]$

$$= \frac{1}{P(X_S = -1)} \left\{ P(X_0 = 1) P(N((s, t]) \text{ dispar}) P(N_S \text{ dispar}) + P(X_0 = -1) P(N((s, t]) \text{ pair}) P(N_S \text{ pair}) \right\}$$

$$= \frac{1}{P(X_S = -1)} P(N((s, t]) \text{ dispar}) \left\{ P(X_0 = 1) P(N_S \text{ dispar}) + P(X_0 = -1) P(N_S \text{ pair}) \right\}$$

$P(X_S = -1)$

$$P(X_t = 1 \mid X_S = -1) = P(N((s, t]) \text{ dispar})$$