

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ STOPPING TIME τ

CICLI RIGENERATIVI

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ HMC con insieme degli stati S discreto

Sia $i_0 \in S$ T.c. $f_{i_0 i_0} := \mathbb{P}(T_{i_0} < +\infty | X_0 = i_0) = 1$

Considero i successivi Tempi di ritorno

$0 =: \tau_0(\omega) < \tau_1(\omega) := T_{i_0}(\omega) < \tau_2(\omega) < \tau_3(\omega) < \dots$ i τ_k sono tutti finiti

Fisso $k \in \mathbb{N}$ e considero il processo prima di τ_k e il processo dopo τ_k :

sono indipendenti e il processo dopo k è una HMC con matrice di Transizione P

$Z_0(\omega) = i_0 \quad \forall \omega \in \Omega$

$Z_n(\omega) := X_{n+\tau_k}(\omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\{X_{\tau_k}, X_{\tau_k+1}, X_{\tau_k+2}, \dots, X_{\tau_{k+1}-1}\}$$

Sì, siccome k -esimo ciclo rigenerativo

Due cicli rigenerativi relativi a diversi valori di k sono stocasticamente indipendenti e identicamente distribuiti

Il Tempo τ_k si dice TEMPO DI RIGENERAZIONE

$(\tau_k - \tau_{k-1})_{k \geq 1}$ è una successione di v.a. i.i.d rispetto a $\mathbb{P}(\cdot | X_0 = i_0)$



COMPORTAMENTO ERGODICO

$f(t, x)$

t Tempo

$x \in \Omega \quad (\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$$F(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt$$

$$\int_{\Omega} F(t, x) \mathbb{P}(dx)$$



PROPOSIZIONE Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ HMC con matrice di Transizione $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$ IRRIDUCIBILE E CON STATI RICORRENTI

Sia $i_0 \in S$ e sia x la misura invariante associata in modo canonico allo stato i_0 :

$$(x_i)_{i \in S} \quad x_i := \mathbb{E}_{i_0} \left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} \mathbb{1}_{\{n \leq T_{i_0}\}} \right]$$

Per $n \in \mathbb{N}$ definisco $\omega^{(n)}(\omega) :=$ il numero di passaggi di ω nello stato i_0 durante i primi n passi cioè

$$\omega^{(n)}(\omega) := \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k = i_0\}}(\omega)$$

Sia $f: i \in S \rightarrow \mathbb{R}$ T.c. $\sum_{i \in S} |f(i)| x_i < +\infty$ (se S è finito, f è ricorsivamente vera)

Sia $f: i \in S \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\sum_{i \in S} |f(i)| x_i < +\infty$ (se S è finito, è sicuramente vero)

Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega^{(n)}(\omega)} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) = \sum_{i \in S} f(i) x_i$ $\mathbb{P}_{i_0}$ -q.c.

DM Lo facciamo nel caso $f \geq 0$.

Nel caso generale, il risultato si recupera usando

$f^+ := \max\{f, 0\}$ $f^- = \max\{-f, 0\}$ e $f = f^+ - f^-$

Considero $0 = \tau_0 < \tau_{i_0} =: \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$

Definisco $U_p(\omega) := \sum_{n=1+\tau_p(\omega)}^{\tau_{p+1}(\omega)} f(X_n(\omega))$

$(U_p)_{p \geq 0}$ sono una successione di v.a. i.i.d. rispetto a $\mathbb{P}_{i_0}(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | X_0 = i_0)$

$\mathbb{E}_{i_0}[U_p] = \mathbb{E}_{i_0}[U_0] = \mathbb{E}_{i_0} \left[\sum_{n=1}^{\tau_{i_0}} f(X_n) \right]$ $f(X_n) = \sum_{i \in S} f(i) \mathbb{1}_{\{X_n=i\}}$

$= \mathbb{E}_{i_0} \left[\sum_{n=1}^{\tau_{i_0}} \sum_{i \in S} f(i) \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \right] =$

$= \sum_{i \in S} f(i) \underbrace{\mathbb{E}_{i_0} \left[\sum_{n=1}^{\tau_{i_0}} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \right]}_{x_i} = \sum_{i \in S} f(i) x_i$ è una quantità finita

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n U_p(\omega) = \mathbb{E}_{i_0}[U_0] = \sum_{i \in S} f(i) x_i$

Ma $\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \sum_{k=1+\tau_p(\omega)}^{\tau_{p+1}(\omega)} f(X_k(\omega)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1+\tau_{i_0}(\omega)}^{\tau_{n+1}(\omega)} f(X_k(\omega)) \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1+\tau_{i_0}(\omega)}^{\tau_{n+1}(\omega)} f(X_k(\omega)) = \sum_{i \in S} f(i) x_i$ $\mathbb{P}_{i_0}$ -q.c.

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\tau_{i_0}(\omega)} f(X_k(\omega)) \rightarrow 0$

Sia n t.c. $\tau_{(n)}(\omega) \leq n < \tau_{(n)+1}(\omega)$

$\frac{\sum_{k=1}^{\tau_{(n)}(\omega)} f(X_k(\omega))}{\omega^{(n)}(\omega)} \leq \frac{\sum_{k=1}^n f(X_k(\omega))}{\omega^{(n)}(\omega)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{\tau_{(n)+1}(\omega)} f(X_k(\omega))}{\omega^{(n)}(\omega)} \rightarrow \sum_{i \in S} f(i) x_i$

$$i_0 \text{ ricorrente} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \omega^{(n)}(i_0) = N_{i_0}(i_0) = +\infty$$

$\Rightarrow \omega^{(n)}$ è una successione estratta da n

TEOREMA ERGODICO Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ HMC con insieme degli stati, matrice di Transizione $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$ irriducibile, con stati positivamente ricorrenti. Sia $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$ la distribuzione stazionaria. Sia $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ f.c. $\sum_{i \in S} |f(i)| \pi_i < +\infty$

$$\text{Allora } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) = \sum_{i \in S} f(i) \pi_i \quad \mathbb{P}_{i_0}\text{-q.c.}$$

media temporale media spaziale

DIM Applico il risultato precedente alla funzione $g: i \in S \mapsto 1 \in \mathbb{R}$
 $\sum_{i \in S} |g(i)| \pi_i = \sum_{i \in S} \pi_i = \mathbb{E}_{i_0}[T_{i_0}] < +\infty$ perché gli stati sono positivamente ricorrenti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\omega^{(n)}(\omega)} = ?$$

$$\omega^{(n)}(\omega) := \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k = i_0\}}(\omega)$$

$$n = \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n g(X_k(\omega))$$

per il risultato precedente

$$\frac{n}{\omega^{(n)}(\omega)} = \frac{1}{\omega^{(n)}(\omega)} \sum_{k=1}^n g(X_k(\omega)) \xrightarrow{\text{risultato}} \sum_{i \in S} g(i) \pi_i = \sum_{i \in S} \pi_i = \mathbb{E}_{i_0}[T_{i_0}]$$

$$\sum_{i \in S} |f(i)| \pi_i$$

$$\pi_i = \frac{\pi_i}{\sum_{i \in S} \pi_i}$$

$$\text{Per ipotesi } \sum_{i \in S} |f(i)| \pi_i < +\infty \Rightarrow$$

$$\sum_{i \in S} |f(i)| \pi_i < +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega^{(n)}(\omega)} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) = \sum_{i \in S} f(i) \pi_i \quad \mathbb{P}_{i_0}\text{-q.c.}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) = \underbrace{\frac{\omega^{(n)}(\omega)}{n}}_{\frac{1}{\mathbb{E}_{i_0}[T_{i_0}]}} \underbrace{\left(\frac{1}{\omega^{(n)}(\omega)} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) \right)}_{\sum_{i \in S} f(i) \pi_i}$$

1 1 $\frac{1}{n}$ $\omega^{(n)}(\omega)$ 1 $\sum_{k=1}^n f(X_k(\omega))$ $\frac{1}{\omega^{(n)}(\omega)}$ $\sum_{k=1}^n f(X_k(\omega))$ $\frac{1}{n}$

UOL 100

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}[T_{i_0}]} \sum_{i \in S} f(i) \pi_i = \sum_{i \in S} f(i) \pi_i \quad \mathbb{P}_{i_0-qc}.$$

$\sum_{i \in S} \pi_i$

$$\mathbb{P}_{i_0-qc}. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) = \sum_{i \in S} f(i) \pi_i \quad \forall i_0$$

$\Rightarrow$ il limite è vero $\mathbb{P}$ -qc.

Se $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una HMC con matrice di Transizione $P = (P_{ij}^1)_{i,j \in S}$ e se $\pi(0)$ è il vettore delle densità di X_0 ovvero

$$\pi(0) = (\pi(0)_j)_{j \in S} \quad \pi(0)_j = \mathbb{P}(X_0 = j)$$

Abbiamo visto che $\mathbb{P}(X_n = j) = (\pi(0)P^n)_j \quad \forall j \in S$
 $\pi(n) = (\pi(n)_j)_{j \in S}$ vettore delle densità di X_n è $\pi(0)P^n$

$$\pi(0)P^n = \pi(0) \underbrace{P \dots P}_{n \text{ volte}}$$

$$P: x \in \mathcal{Y} \mapsto xP \in \mathcal{Y} \quad \Rightarrow \pi(0)P^n = \pi(0)P \circ P \circ \dots \circ P(\pi(0))$$

MAPPE CONTINUE E ITERATE

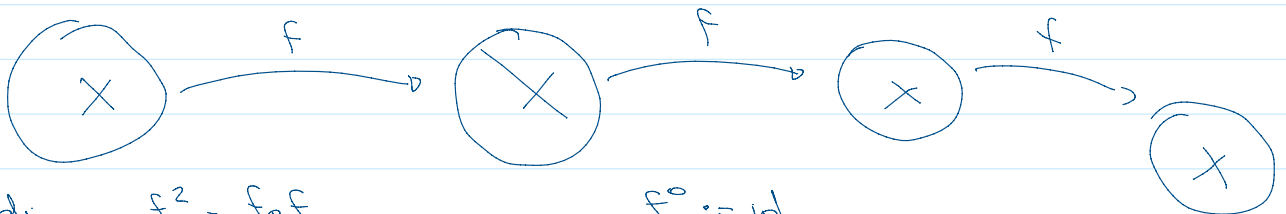
$(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_1)$ sp. metrico
completo $\Rightarrow$
nel caso finito dimensionale

Sia (X, d) spazio metrico e sia $f: X \rightarrow X$

Sia $x_0 \in X$ - Allora f si dice **CONTINUA** NEL PTO x_0

rispetto alla metrica d se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in X \quad d(x_0, x) < \delta \quad \text{t.h.e.} \quad d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$



Indico

$$f^2 = f \circ f$$

$$f^3 = f \circ f \circ f$$

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ volte}}$$

$$f^0 := \text{id}$$

$$f^1 := f$$

Per ogni $x \in X$ $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ si dice **CADUTTO** in x

Dico che $x_0 \in X$ è un **punto** di f se $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x_0 \quad \forall x \in X$

Def: $x_0 \in X$ è un pto fisso di f se $f(x_0) = x_0$

PROPRIETÀ

- 1) Se p è pto fisso di f , allora p è pto fisso di $f^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
 $f^2(p) = f(f(p)) = f(p) = p$ e poi per induzione
- 2) Sia $n \geq 1$ T.c. p è pto fisso di f^n
Allora anche i pti $f(p), f^2(p), \dots, f^{n-1}(p)$ sono pti fissi di f^n
 $f^n(\underline{f^k(p)}) = f^{n+k}(p) = f^k(f^n(p)) = \underline{f^k(p)}$
- 3) Se $\exists x \in X$ T.c. $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$, allora p è pto fisso di f

$$f(p) \leftarrow f(\underbrace{f^k(x)}_p) = f^{k+1}(x) \rightarrow p \quad \Rightarrow \quad f(p) = p$$

- 4) Se f ammette punto $p \in X$, allora p è l'unico $\hat{p}$ fissato da f .
Supponiamo che $q \neq p$ sia un $\hat{p}$ fissato

$$q = f^k(q) \rightarrow \nabla p \Rightarrow \text{ASSURED}$$

- 5) Esistono mappe che hanno 1° pto fisso ma che non ammettono punto

$$X = [-1, 1] \quad d(x, y) = |x - y|$$

$$f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \quad f(x) = -x$$

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad -x = x \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 0}$$

Se $x_0 \neq 0$

$$f^k(x_0) = \begin{cases} x_0 & k \text{ pari} \\ -x_0 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x_0)$$

- 6) Sia $n \geq 1$. Allora per X è posto di f SSE è posto di f^n

- Ⓐ Supponiamo che p sia punto di f e sia $x \in X$
 $(f^n)^k(x) = f^{nk}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p \Rightarrow p$ è punto di f^n

- (B) Supponiamo che p sia p di f^n
 $k \in \mathbb{N} : \exists! q \in \mathbb{N}, \exists! r \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ t.c. } k = qn + r$ $k \rightarrow \infty \implies q \rightarrow \infty$

$$f^k(x) = f^{q(n)}(x) = f^n(f^n(x)) = (f^n)^q(\underbrace{f^n(x)}_{\in X}) \rightarrow p \text{ k-ao}$$

=> p è punto di f

DEF Sia (X, d) spazio metrico e sia $f: X \rightarrow X$

f si dice una CONTRAZIONE in X con costante di contrazione L se $L \in [0, 1)$ e $d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall x, y \in X$

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X, d) spazio metrico completo e sia $f: X \rightarrow X$ una contrazione con costante di contrazione $L \in [0, 1)$ -

Allora f ammette punto e

$$\forall x \in X \quad d(f^n(x), p) \leq \frac{L^n}{1-L} d(f(x), x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$d(f^n(x), p) \leq L^n d(x, p)$$

Corollario Sia (X, d) spazio metrico completo con

$$\text{diam}(X) := \sup \{d(x, y) : x, y \in X\} < +\infty$$

Sia $f: X \rightarrow X$ una funzione continua e supponiamo che $\exists n \geq 1$

T.c. f^n è una contrazione di (X, d) con fattore di contrazione

$L \in [0, 1)$ - Allora f ammette punto p e

$$d(f^k(x), p) \leq L^{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor} \text{diam}(X) \quad \forall x \in X \text{ e } \forall k \in \mathbb{N}$$

Dim So che $\exists! q \in \mathbb{N} \exists! r \in \{0, \dots, n-1\}$ T.c. $k = qn + r$ $q = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$

$$\begin{aligned} d(f^k(x), p) &= d(f^{qn+r}(x), p) = d(f^n(f^r(x)), p) = d((f^n)^q(f^r(x)), p) \\ &\leq L^q d(f^r(x), p) = L^{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor} \text{diam}(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{Y}, d_1) \quad \mathcal{Y} &= \{x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^N)^+ : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^N x_i = 1\} \\ d_1(x, y) &= \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| \end{aligned}$$

$\text{diam}(\mathcal{Y})$ è finito? $\text{diam}(\mathcal{Y}) = 2$

$\mathcal{Y}$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $(\mathbb{R}^N)^+$

$\Rightarrow \mathcal{Y}$ è un sottoinsieme compatto di $(\mathbb{R}^N)^+$

$(\mathbb{R}^N)^+, d_1$ è uno spazio metrico completo

$\Rightarrow (\mathcal{Y}, d_1)$ è uno spazio metrico completo

$$P : x \in \mathcal{Y} \mapsto xP \in \mathcal{Y}$$

PROPOSITIONE Sia P matrice stocastica $N \times N$ e siano $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^N$
le sue righe e sia

PROPOSIZIONE Sia T matrice stocastica $N \times N$ e siano $K, K_1, \dots, K_r$ le sue righe e ne

$$C := \frac{1}{2} \max_{1 \leq i < j \leq N} \|R^i - R^j\|_1 \quad 1 \leq i < j \leq N$$

Allora

- ① $C \leq 1$
- ② $\|P_x - P_y\|_1 \leq C \|x - y\|_1 \quad \forall x, y \in \mathcal{P}$
- ③ Se tutti gli elementi $P_{ij}^i, i, j = 1, \dots, N$ delle matrici sono diversi da zero, allora $C < 1$ e dunque $P: x \in \mathcal{P} \mapsto xP \in \mathcal{P}$ è una contrazione di $(\mathcal{P}, d_1)$

DEF Sia $P = (P_{ij}^i)_{i,j \in S}$ una matrice stocastica.
Dico che P è una matrice stocastica regolare se
 $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $(P^n)^i_j > 0 \quad \forall i, j \in S$

irriducibile $\forall i, j \in S \quad \exists n = n(i, j) \quad (P^n)^i_j > 0$

OSS Se P è regolare $\Rightarrow$ è irriducibile
Il viceversa in generale non è vero

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{2k} = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{2k+1} = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE Se $P = (P_{ij}^i)_{i,j=1,\dots,N}$ è una matrice stocastica irriducibile e se esiste almeno un elemento diagonale $P_{ii}^i \neq 0$, allora P è regolare.

TEOREMA Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una HMC con insieme degli stati finito $S = \{1, \dots, N\}$ e con matrice di Transizione P regolare.
Allora qualsiasi sia la distribuzione di X_0 , abbiamo che il vettore delle densità $\pi(n)$ di X_n converge al vettore delle densità della distribuzione stazionaria
 $\pi = (\pi_j)_{j=1,\dots,N} \quad \pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_j[T_j]} \quad P_j(\cdot) = P(\cdot | X_0 = j)$

CLASSI CHIUSE

Sia $P = (P_{ij}^i)_{i,j \in S}$ matrice stocastica indecomposta su S

Siano $i, j \in S$

Dico che j è accessibile da i se $\exists n > 0$ t.c. $(P^n)^i_j > 0$

Sia $C \subseteq S$. Dico che C è una classe chiusa (per la matrice P) se
 $\forall i \in C \quad \text{e} \quad \forall j \in S \setminus C \quad i \not\rightarrow j$

Sia $C \subseteq S$. Dico che C è una classe chiusa (per la natura P) se
 $\forall i \in C \text{ e } \forall j \in S \text{ i} \not\rightarrow j$

N.B. Ovviamente S è una classe chiusa

L'unione di due classi chiuse è una classe chiusa

L'intersezione di due classi chiuse (se non è vuota) è una classe chiusa

DIN PER
ESERCIZIO

DEF Sia $C \subseteq S$ T.c. C è una classe chiusa e non esiste nessun sottoinsieme proprio e non vuoto D di C T.c. D ha anche una classe chiusa.

Allora C si dice una CLASSE CHIUSA MINIMALE

PROPRIETÀ Sia $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$ una matrice booleana indicata su S
e sia $C \subseteq S$ una classe chiusa per P .

Allora C è una classe chiusa minimale SS tutti gli elementi di C
sono tra loro comunicanti.

DIN ① Supponiamo che gli elementi di C siano a due a due comunicanti.
Devo dimostrare che C è minimale tra le classi chiuse.

Per assurdo: $\exists D \neq \emptyset \quad D \subsetneq C$ T.c. D è una classe chiusa

Sia $i \in D$ e $j \in C \setminus D$. Siccome D è classe chiusa

$\Rightarrow i \not\rightarrow j$. Ma $i, j \in C$ e quindi $i \leftrightarrow j$: ASSURDO

② Supponiamo che C sia una classe chiusa minimale; dimostro che
tutti i suoi stati sono comunicanti

Sia $j \in C \quad D_j := \{i \in C : i \leftrightarrow j\}$

La Terza è vera se $D_j = \emptyset \quad \forall j$. $D_j \neq C$ perché $j \notin D_j$
 $\Rightarrow D_j \subsetneq C$

Per assurdo $D_j \neq \emptyset$ e va $i \in D_j$ e va $k \notin D_j$

Dimostro che $i \not\rightarrow k$ cioè dimostro che D_j è classe chiusa: ASSURDO

1° caso $k \notin C$

$i \in D_j \subset C$

$k \notin C$

C è classe chiusa

2° caso $k \in C \setminus D_j$

$k \in C \setminus D_j$

$k \rightarrow j$

Se fosse $i \rightarrow k \Rightarrow$

$i \rightarrow k \rightarrow j \Rightarrow i \rightarrow j$

ASSURDO

perché $i \in D_j$

S insieme degli stati

$C_1, C_2, \dots, C_k$ classi chiuse minimali (disgiunte a due a due)

$$S = (C_1 \cup C_2 \dots \cup C_k) \cup T$$

PROPRIETÀ Se P è una matrice stocastica indirizzata su S insieme finito, allora uno stato j è ricorrente SSE appartiene ad una classe chiusa minimale. (NO DN)