

STATI ACCESSIBILI A PARTIRE DA UNO STATO

$$i \rightarrow j \quad \text{sse} \quad \exists n \quad T_c. (P^n)^i_j > 0$$

MATRICE STOCASTICA IRREDUCIBILE sse $\forall i, j \in S \quad \exists n = n(i, j) \quad T_c. (P^n)^i_j > 0$

$$\pi = (\pi_j)_{j \in S} \quad T_c. \pi = \pi P$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ HMC a valori in S insieme finito $S = \{1, \dots, N\}$
 $\Rightarrow$ la matrice di Transizione è una matrice $N \times N$

Considero il polinomio caratteristico di P $P_N(\lambda) := \det(P - \lambda I) = \sum_{k=0}^N a_k \lambda^k$
 $a_N = (-1)^N$

TEOREMA DI HAMILTON-CAYLEY

L'espressione $P_N(A) := \sum_{k=0}^N a_k A^k$ è ben definita $\forall A \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$.
 Si ha che $P_N(P) = 0_{N \times N}$

$$(-1)^N P^N + a_{N-1} P^{N-1} + \dots + a_1 P + a_0 I = 0 \quad \times (-1)^N$$

$$P^N + (-1)^N (a_{N-1} P^{N-1} + \dots + a_1 P + a_0 I) = 0 \quad (-1)^N \cdot (-1)^N = (-1)^{2N} = 1$$

$$P^N = (-1)^{N+1} (a_{N-1} P^{N-1} + \dots + a_1 P + a_0 I)$$

Supponiamo che $(P^k)^i_j = 0 \quad \forall k=0, \dots, N-1 \Rightarrow$

$$(P^N)^i_j = (-1)^{N+1} (a_{N-1} (P^{N-1})^i_j + \dots + a_1 (P)^i_j + a_0 \delta_{ij}) = 0$$

$$P^{N+1} = (-1)^{N+1} (a_{N-1} P^N + \dots + a_1 P^2 + a_0 P)$$

$$(P^{N+1})^i_j = (-1)^{N+1} (a_{N-1} (P^N)^i_j + \dots + a_1 (P^2)^i_j + a_0 P^i_j) = 0$$

Per induzione si dimostra che $(P^k)^i_j = 0 \quad \forall k=0, \dots, N-1$
 allora

$$(P^k)^i_j = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

PROPRIETÀ Se $S = \{1, \dots, N\} \Rightarrow i \rightarrow j$ sse $\exists k \in \{0, \dots, N-1\}$
 $T_c. (P^k)^i_j \neq 0$

1.c. $(\tau^+)_j \neq 0$

DISTRIBUZIONI STATIONARIE, S finito

$S = \{1, \dots, N\}$, $\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)^*$ T.c. $\pi = \pi P$

Considero $P: \nu \in \mathcal{P} \mapsto \nu P \in \mathcal{P}$ perché P è matrice stocastica

Sappiamo che $\mathcal{P}$ è chiuso, limitato e convesso

Inoltre P è continua:

$\forall \nu \in \mathcal{P}$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ T.c. $\forall \nu, w \in \mathcal{P}$ con $\|\nu - w\|_1 < \delta$ si ha $\|P\nu - Pw\|_1 < \varepsilon$

$\forall \nu \in \mathcal{P}$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ T.c. $\forall \nu, w \in \mathcal{P}$ con $\|\nu - w\|_1 < \delta$ si ha $\|(\nu - w)P\|_1 < \varepsilon$

TEOREMA DI BROUWER (no dim)

Sia X un insieme chiuso, limitato e convesso di $(\mathbb{R}^N)^*$ e sia

$f: X \rightarrow X$ una mappa continua.

Allora $\exists x \in X$ T.c. $f(x) = x$ (p.t.o. fisso per f)

COROLLARIO (TEOREMA DI FROBENIUS)

Sia P una matrice stocastica $N \times N$.

Allora $\exists$ un vettore stocastico w di $(\mathbb{R}^N)^*$ T.c. $wP = w$.

STOPPING TIME

Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processo stocastico a tempo discreto definito su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Sia $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ($\mathbb{N}$) una v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dico che τ è uno stopping time per il processo $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{\tau \leq n\}$ è misurabile dalle v.a. $X_0, X_1, \dots, X_n$

$\forall n \in \mathbb{N} \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ T.c.

$\{\tau \leq n\} = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in B\}$

TEMPI DI RITORNO

Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una HMC a tempo discreto e stati discreti, S insieme degli stati.

Fisso $i \in S$

$$T_i(\omega) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \forall n \geq 1 \text{ T.c. } X_n(\omega) \neq i \\ \min \{n \geq 1 : X_n(\omega) = i\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\uparrow$ $n > 0$

Supponiamo $T_i(\omega) < +\infty$

$$Z_i(\omega) = \begin{cases} +\infty & \text{se } X_n(\omega) \neq i \quad \forall n > T_i(\omega) \\ \min \{n > T_i(\omega) : X_n(\omega) = i\} & \text{se } \exists n > T_i(\omega) \text{ T.c. } X_n(\omega) = i \end{cases}$$

$$\infty \quad \left| \min \{n > T_1(\omega) : X_n(\omega) = i\} \right. \quad \text{se } \exists n > T_1(\omega) \text{ T.c. } X_n(\omega) = i$$

Se $T_1(\omega) = +\infty$ pongo $\tau_2(\omega) = +\infty$

$$\tau_k(\omega) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \tau_{k-1}(\omega) = +\infty \\ +\infty & \text{se } \nexists n > \tau_{k-1}(\omega) \text{ T.c. } X_n(\omega) = i \\ \min \{n > \tau_{k-1}(\omega) : X_n(\omega) = i\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\tau_0(\omega) := 0 \quad \tau_1(\omega) := T_i(\omega)$$

finché e da $\tau_k(\omega) < +\infty \quad 0 = \tau_0(\omega) < \tau_1(\omega) < \tau_2(\omega) < \dots < \tau_k(\omega)$

PROPRIETÀ I Tempi $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sono degli stopping Time per la catena $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\{\tau_0 = n\} = \begin{cases} \Omega & n = 0 \\ \emptyset & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\{\tau_1 = n\} = \{T_i = n\} = \begin{cases} \emptyset & n = 0 \\ \{X_1 \neq i, X_2 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = i\} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$\{T_i = n\}$ è ricavato dalle vie $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e quindi da $(X_0, X_1, \dots, X_n)$

$$\{\tau_k = n\} = \left\{ X_n = i, \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_\ell = i\}} = k-1 \right\} \quad \text{è ricavato da } X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$$

Sia $j \in S$ uno stato della HPC $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 Considero il numero di visite nello stato j effettuate dopo il parto iniziale
 Conto quante volte si ha che $X_n(\omega) = j \quad n \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}(\omega) =: N_j(\omega)$$

È una v.a. sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ su cui è definita la catena.

$$N_j(\Omega) = \bar{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathbb{P}(N_j = r) \quad r \in \bar{\mathbb{N}}$$

$$\mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) \quad \leftarrow$$

$$\mathbb{P}(N_j = r) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) \mathbb{P}(X_0 = i)$$

$$\mathbb{P}(N_j = 1) \quad i \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}(N_j = r) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) \mathbb{P}(X_0 = i)$$

TEOREMA Sia $f_{ij} := \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = i)$ -

Allora

$$\mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) = \begin{cases} f_{ij} f_{jj}^{r-1} (1 - f_{jj}) & \text{se } r \geq 1 \\ 1 - f_{ij} & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

D11 $r=0$ $\mathbb{P}(N_j = 0 | X_0 = i) = \mathbb{P}(T_j = +\infty | X_0 = i) = 1 - f_{ij}$ $\{N_j = 0\} = \{T_j = +\infty\}$

$r \geq 1$ Dimostrare che $\mathbb{P}(N_j \geq r | X_0 = i) = f_{ij} f_{jj}^{r-1}$

$r=1$ $\mathbb{P}(N_j \geq 1 | X_0 = i) = \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = i) = f_{ij}$ $\{N_j \geq 1\} = \{T_j < +\infty\}$

$r \geq 1$: Per induzione su r

$$\{N_j \geq r\} = \bigcup_{h=1}^{\infty} \left\{ T_j = h, \sum_{n \geq h+1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \geq r-1 \right\}$$

unione disgiunta

contando il numero di passaggi nello stato j dal passo $h+1$ in poi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_j \geq r | X_0 = i) &= \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_j = h, \sum_{n \geq h+1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \geq r-1 | X_0 = i) = \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_h = j, X_{h+1} \neq j, X_{h+2} \neq j, \dots, X_{h-1} \neq j, \sum_{n \geq h+1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \geq r-1 | X_0 = i) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{n \geq h+1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \geq r-1, X_h = j, X_{h+1} \neq j, \dots, X_{h-1} \neq j, X_0 = i) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{n \geq h+1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \geq r-1 | X_h = j, X_{h-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = i) \cdot \\ &\quad \cdot \mathbb{P}(X_h = j, X_{h-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = i) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{n \geq h+1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \geq r-1 | X_h = j) \mathbb{P}(T_j = h | X_0 = i)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \geq r-1 | X_0 = j) \mathbb{P}(T_j = h | X_0 = i) =$$

$$= \mathbb{P}(N_j \geq r-1 | X_0 = j) \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_j = h | X_0 = i)$$

$$= \mathbb{P}(N_j \geq r-1 | X_0 = j) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_j = k | X_0 = i)}_{\mathbb{P}(\bigcup_{k \geq 1} \{T_j = k\} | X_0 = i) = \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = i) = f_{ij}}$$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k \geq 1} \{T_j = k\} | X_0 = i) = \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = i) = f_{ij}$$

$$\mathbb{P}(N_j \geq r | X_0 = i) = \underbrace{\mathbb{P}(N_j \geq r-1 | X_0 = j)}_{\text{per induzione}} \cdot f_{ij}$$

$$= f_{jj} \cdot f_{jj}^{r-2} \cdot f_{ij} = f_{ij} \cdot f_{jj}^{r-1} \quad \leftarrow$$

$$\mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) = \{N_j = r\} = \{N_j \geq r\} \setminus \{N_j \geq r+1\}$$

$$\mathbb{P}(N_j \geq r | X_0 = i) - \mathbb{P}(N_j \geq r+1 | X_0 = i) \quad \{N_j \geq r+1\} \subseteq \{N_j \geq r\}$$

$$= f_{ij} f_{jj}^{r-1} - f_{ij} f_{jj}^r = f_{ij} f_{jj}^{r-1} (1 - f_{jj}) \quad \square$$

$$\mathbb{P}(N_j < +\infty | X_0 = i) = \{N_j < +\infty\} = \bigcup_{r \geq 0} \{N_j = r\}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) = \mathbb{P}(N_j = 0 | X_0 = i) + \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i)$$

$$= (1 - f_{ij}) + \sum_{r=1}^{\infty} f_{ij} f_{jj}^{r-1} \underbrace{(1 - f_{jj})}_{f_{jj} = \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j)}$$

$$\text{Se } f_{jj} < 1 \quad (1 - f_{ij}) + f_{ij} (1 - f_{jj}) \sum_{r=1}^{\infty} f_{jj}^{r-1} = (1 - f_{ij}) + f_{ij} (1 - f_{jj}) \sum_{s=0}^{\infty} f_{jj}^s$$

$$\text{se } x \in (-1, 1) \quad \sum_{s=0}^{\infty} x^s = \frac{1}{1-x} \quad \left| \quad = (1 - f_{ij}) + f_{ij} \cancel{(1 - f_{jj})} \cdot \frac{1}{\cancel{1 - f_{jj}}} = 1 - f_{ij} + f_{ij} = 1 \right.$$

$$\text{Se } \underbrace{\mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j)}_{f_{jj}} < 1 \Rightarrow \mathbb{P}(N_j < +\infty | X_0 = i) = 1 \quad \text{ovvero } \mathbb{P}(N_j = +\infty | X_0 = i) = 0 \quad \leftarrow$$

$$\text{Se } f_{jj} = 1 \quad \mathbb{P}(N_j = 0 | X_0 = i) = 1 - f_{ij} \quad \mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) = 0 \quad \forall r \geq 1$$

$$\mathbb{P}(N_j = +\infty | X_0 = i) = 1 - \mathbb{P}(N_j = 0 | X_0 = i) = \cancel{1} - \cancel{(1 - f_{ij})} = f_{ij} \quad \leftarrow$$

$$\mathbb{P}(N_j < +\infty | X_0 = i) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) = \mathbb{P}(N_j = 0 | X_0 = i) + \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i)}_{=0}$$

$$\text{Se } \underbrace{\mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j)}_{f_{jj}} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(N_j < +\infty | X_0 = i) = 1 - f_{ij}$$

$$\text{Se } \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j) = 1 \stackrel{f_{jj}}{\Rightarrow} \mathbb{P}(N_j < +\infty | X_0 = i) = 1 - f_{ij} \\ \mathbb{P}(N_j = +\infty | X_0 = i) = f_{ij}$$

In particolare, se scelgo $i = j$

$$\text{Se } \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j) < 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(N_j < +\infty | X_0 = j) = 1 \\ \mathbb{P}(N_j = +\infty | X_0 = j) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(N_j < +\infty | X_0 = j) = 0 \\ \mathbb{P}(N_j = +\infty | X_0 = j) = 1 \end{cases}$$

Abbiamo provato che

$$\mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) = \begin{cases} 1 - f_{ij} & r = 0 \\ f_{ij} f_{jj}^{r-1} (1 - f_{jj}) & r \geq 1 \end{cases}$$

Voglio calcolare il valore atteso della v.a. può non rispetto a $\mathbb{P}$ ma rispetto a $\mathbb{P}(\cdot | X_0 = i) =: \mathbb{P}_i$

$$\mathbb{E}_i[N_j] := \int_{\Omega} N_j(\omega) \mathbb{P}_i(d\omega) = (+\infty) \underbrace{\mathbb{P}(N_j = +\infty | X_0 = i)}_{\text{se } = 0} + \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) \cdot r \\ \text{"} +\infty \cdot 0 \text{"} = 0$$

Se $f_{jj} = 1$ e $f_{ij} \neq 0$

$$\mathbb{E}_i[N_j] = +\infty$$

Se $f_{jj} < 1$ e $f_{ij} \neq 0$

$$\mathbb{E}_i[N_j] = \sum_{r=0}^{\infty} r \mathbb{P}(N_j = r | X_0 = i) =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} r f_{ij} f_{jj}^{r-1} (1 - f_{jj}) = f_{ij} (1 - f_{jj}) \sum_{r=1}^{\infty} r f_{jj}^{r-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad x \in (-1, 1) \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \leftarrow$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \stackrel{TEOREMA (no mn)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_i[N_j] = f_{ij} (1 - f_{jj}) \frac{1}{(1 - f_{jj})^2} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} \quad \text{se } \begin{matrix} f_{jj} < 1 \\ f_{ij} \neq 0 \end{matrix}$$

NEL CASO PARTICOLARE $i = j$

$$\text{Se } f_{jj} := \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_j[N_j] = +\infty$$

NEL CASO PARTICOLARE $i=j$

Se $f_{jj} := \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_j[N_j] = +\infty$

Se $f_{jj} := \mathbb{P}(T_j = +\infty | X_0 = j) < 1 \Rightarrow \mathbb{E}_j[N_j] = \frac{f_{jj}}{1-f_{jj}}$

(Esercizio: controllare cosa succede quando $f_{ij} = 0$)

DEFINIZIONE Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una HMC con insieme degli stati S discreto e con matrice di transizione P .

Sia $j \in S$: dico che j è uno STATO RICORRENTE se

$$f_{jj} := \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j) = 1$$

dico che j è uno STATO TRANSIENTE se

$$f_{jj} := \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j) < 1$$

Se $j \in S$ è uno stato ricorrente, dico che j è POSITIVAMENTE RICORRENTE se, posto $\mathbb{P}_j(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | X_0 = j)$ si ha che

$$\mathbb{E}_j[T_j] := \int_{\Omega} T_j(\omega) \mathbb{P}_j(d\omega) \text{ è finito}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}_j(T_j = k) + (+\infty) \mathbb{P}_j(T_j = +\infty)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(T_j = k | X_0 = j)$$

~~$\mathbb{P}_j(T_j = +\infty) = 0$ perché j è ricorrente~~

Uno stato ricorrente j si dice RICORRENTE Nullo se $\mathbb{E}_j[T_j] = +\infty$

TEOREMA Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una HMC su uno spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a valori nell'insieme discreto S e sia $P = (P_{ij}^n)_{i,j \in S}$ la sua matrice di Transizione. Sia $j \in S$:

j è RICORRENTE SSE $\sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{jj}$ diverge

Dim $\sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{jj} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = j) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_j[\mathbb{1}_{\{X_n = j\}}] =$

$$= \mathbb{E}_j \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \right] = \mathbb{E}_j \left[\mathbb{1}_{\{X_0 = j\}} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \right] =$$

$$= \mathbb{E}_j[\mathbb{1}_{\{X_0 = j\}}] + \mathbb{E}_j \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \right] = \mathbb{P}(X_0 = j | X_0 = j) + \mathbb{E}_j[N_j]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{jj} = 1 + \mathbb{E}_j[N_j] = \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_j^j = +\infty \quad \text{SSE} \quad \mathbb{E}_j[N_j] = +\infty \quad \text{così SSE} \quad f_{jj} = 1$$

che è la definizione di stato ricorrente -

ESEMPIO Passeggiatore aleatorio su $\mathbb{Z}$

$$S = \mathbb{Z} \quad P = (P_{ij}^i)_{i,j \in \mathbb{Z}} \quad \begin{cases} P_{i+1}^i = p \in [0,1] \\ P_{i-1}^i = 1-p \\ P_j^i = 0 \quad j \neq i+1, i-1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = j) = \begin{cases} 0 & n = 2k+1 \\ \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k & n = 2k \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (P^n)_j^j = \sum_{k=0}^{\infty} (P^{2k})_j^j = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k \quad \text{SARTEMI ANIMATO}$$