Vettore stocastico con un numero finito di componenti

$$\mathcal{J} := \left\{ v \in (\mathbb{R}^n)^* : v_i \geq 0 \ \forall i = 1 \dots n, \ \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \right\}$$

$\mathcal{J}$ è chiuso e limitato (dato che siamo in dimensione finita, questo equivale a $(\mathcal{J}, d_p)$ compatto per successioni, $\forall p \in [1, +\infty]$) Sceglieremo sempre $p=1$

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$\mathcal{J}$ è convesso

P matrice stocastica $n \times n$: ciascuna riga è un vettore stocastico

$\underline{P} : x \in (\mathbb{R}^n)^* \longmapsto xP \in (\mathbb{R}^n)^*$

$\underline{P}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}$ SSE P è una matrice stocastica

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $X : \Omega \to \mathbb{R}$ funzione semplice $X(\Omega) = \{1, \dots n\}$

$\mathbb{P}(X=i) = v_i \quad i = 1 \dots n \quad (v_1, v_2, \dots v_n) \in \mathcal{J}$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discreta con immagine numerabile

$S := X(\Omega) \qquad (\mathbb{N}, \mathbb{Z})$

$\forall i \in S \quad \mathbb{P}(X=i) = v_i \quad v = \{v_i\}_{i \in S}$

$$\forall i \in S \quad v_i \geq 0 \quad \sum_{i \in S} v_i = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{i \in S} \{i\}\right) = \mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$\mathcal{J} = \left\{ v = \{v_i\}_{i \in S} : v_i \geq 0 \ \sum_{i \in S} v_i = 1 \right\}$ insieme dei vettori stocastici indicizzati da S

$P = (P^i_j)_{i,j \in S}$ si dice una matrice stocastica se $\forall i \in S$, $(P^i_j)_{j \in S}$ è un vettore stocastico:

$\forall i \text{ e } \forall j \in S \quad P^i_j \geq 0$

$\forall i \in S \quad \sum_{j \in S} P^i_j = 1$

$$\forall i \in S \quad \sum_{j\in S} P^i_j = 1$$

$$\ell_1 = \{ (v_j)_{j\in S} \; : \; v_j \in \mathbb{R} \quad \sum_{j\in S} |v_j| < +\infty \}$$

per $v = (v_j)_{j\in S} \in \ell_1$ definisco $\|v\|_1 := \sum_{j\in S} |v_j|$

$$vP \qquad \boxed{(vP)_j = \sum_{i\in S} v_i P^i_j \quad j\in S}$$

Richiedo che $\sup_{i\in S} \underbrace{\sum_{j\in S} |P^i_j|}_{\|P^i\|_1} < +\infty$ norma 1 della riga P^i

$$= \sup_{i\in S} \|P^i\|_1 < +\infty$$

$$\sum_{i\in S} |v_i| |P^i_j| < +\infty \quad \forall j$$

$$\sum_{j\in S} \left(\sum_{i\in S} |v_i| |P^i_j| \right) < +\infty$$

$$\hookrightarrow \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} |v_i| |P^i_j| = \sum_{i\in S} |v_i| \Big(\underbrace{\sum_{j\in S} |P^i_j|}_{\|P^i\|_1} \Big) = \sum_{i\in S} |v_i| \, \|P^i\|_1 \le$$

$$\|P^i\|_1 \le \sup_{i\in S} \|P^i\|_1$$

$$\le \sum_{i\in S} |v_i| \sup_{i\in S} \|P^i\|_1 =$$

$$= \sup_{i\in S} \|P^i\|_1 \underbrace{\sum_{i\in S} |v_i|}_{\|v\|_1} = \underbrace{\|v\|_1}_{<+\infty} \cdot \underbrace{\sup_{i\in S} \|P^i\|_1}_{<+\infty} < +\infty$$

$\mathcal{J}$:= insieme dei vettori stocastici indicizzati su S

P := matrice indicizzata su S con $\sup_{i\in S} \sum_{j\in S} |P^i_j| < +\infty$

$$\underline{P} : v \in \mathcal{J} \longmapsto vP \in \ell_1$$

PROPRIETÀ (dim per esercizio) (1) $vP \in \mathcal{J} \quad \forall v \in \mathcal{J}$ SSE P è una matrice stocastica.

(2) $\mathcal{J}$ è un convesso di ℓ_1

(3) $\mathcal{J}$ non è un chiuso (in particolare non è compatto per successioni)

Per mostrare (3) basta trovare una successione a valori in $\mathcal{J}$ che converge a un $v \in \ell_1$ ma t.c. $v \notin \mathcal{J}$

$$v^k = (v^k_j)_{j\in\mathbb{N}} \qquad (S = \mathbb{N})$$

$$v^1 = (1, 0, \_\_\_\_\_\_) \qquad v^2 = (0, 1, 0 \_\_\_\_\_\_)$$

$$v^k_j = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \ne j \end{cases} \Rightarrow v^k \in \mathcal{J} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$j = 1 \qquad v^k_1 = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases} \qquad \lim_{k\to\infty} v^k_1 = 0$$

$j=2 \qquad v_2^k = \begin{cases} 1 & k=2 \\ 0 & k\neq 2 \end{cases} \qquad \lim_{k\to\infty} v_2^k = 0$

$$\lim_{k\to\infty} v_j^k = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{k\to\infty} v^k = (0 \text{———————}) \in \ell_1 \setminus \mathcal{T}$$

PROCESSI STOCASTICI A TEMPO DISCRETO E STATI DISCRETI

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

S insieme discreto

$n \in \mathbb{N} \qquad X_n : \Omega \to S$ variabile aleatoria

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice un processo stocastico a tempo discreto e a stati discreti

MATRICE DI TRANSIZIONE

$n \in \mathbb{N} \quad \forall i,j \in S \qquad P(n+1)^i_j = \begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n = i) & \text{se } \mathbb{P}(X_n=i)>0 \\ \delta_{ij} & \text{se } \mathbb{P}(X_n=i)=0 \end{cases}$

δ_{ij} delta di Kronecker $= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

PROPRIETÀ $\forall n \in \mathbb{N}$ la matrice $P(n+1) := (P(n+1)^i_j)_{i,j\in S}$ è una matrice stocastica

DIM Sicuramente $P(n+1)^i_j \geq 0 \qquad \forall i,j \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j\in S} P(n+1)^i_j = ?$$

$\mathbb{P}(X_n=i)=0 \qquad \sum_{j\in S} \delta_{ij} = 1 + \sum_{j\neq i} 0 = 1$

$\mathbb{P}(X_n=i)>0 \qquad \sum_{j\in S} \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) =$

$\{X_{n+1}=j\}\ j\in S$ sono eventi disgiunti 2 a 2

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j\in S}\{X_{n+1}=j\} \mid X_n=i\Big) = \mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1}\in S}_{\Omega} \mid X_n=i) = \mathbb{P}(\Omega \mid X_n=i) = 1$$

Supponiamo di conoscere la distribuzione di X_0

$\pi(0) = (\pi(0)_j)_{j\in S} \qquad \pi(0)_j := \mathbb{P}(X_0=j)$

$\pi(1) = (\pi(1)_j)_{j\in S} \qquad \pi(1)_j := \mathbb{P}(X_1=j)$

$$\{X_1=j\} = \{X_1=j, X_0\in S\} = \bigcup_{i\in S}\{X_1=j, X_0=i\}$$

$$\{X_1=j\} = \{X_1=j, X_0\in S\} = \bigcup_{i\in S}\{X_1=j, X_0=i\}$$

$$\pi(1)_j := \mathbb{P}(X_1=j) = \sum_{i\in S}\mathbb{P}(X_1=j, X_0=i) = \sum_{i\in S}\underbrace{\mathbb{P}(X_1=j\mid X_0=i)}_{P(1)_j^i}\underbrace{\mathbb{P}(X_0=i)}_{\pi(0)_i}$$

$$\pi(1)_j = \sum_{i\in S}\pi(0)_i P(1)_j^i \qquad \forall j\in S$$

$$\pi(1) = \pi(0)P(1)$$

$$\pi(n) = (\pi(n)_j)_{j\in S} \qquad \pi(n)_j := \mathbb{P}(X_n=j)$$

$$\pi(n)_j := \mathbb{P}(X_n=j) = \mathbb{P}(X_n=j, X_{n-1}\in S) = \sum_{i\in S}\mathbb{P}(X_n=j, X_{n-1}=i) =$$

$$= \sum_{i\in S}\underbrace{\mathbb{P}(X_n=j\mid X_{n-1}=i)}_{P(n)_j^i}\underbrace{\mathbb{P}(X_{n-1}=i)}_{\pi(n-1)_i}$$

$$= \sum_{i\in S}\pi(n-1)_i P(n)_j^i = \big(\pi(n-1)P(n)\big)_j \quad ✪ \qquad \forall j\in S$$

$$\pi(1)_j = \sum_{i\in S}\pi(0)_i P(1)_j^i \qquad \pi(1) = \pi(0)P(1)$$

✪ $$\pi(n) = \pi(n-1)P(n)$$

$$\pi(2) = \pi(1)P(2) = \pi(0)P(1)P(2)$$

$$\pi(3) = \pi(2)P(3) = \pi(0)P(1)P(2)P(3)$$

$$\vdots$$

$$\longrightarrow \quad \pi(n) = \pi(0)P(1)P(2)\dots P(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

DEFINIZIONE Se la matrice di transizione $P(n)$ non dipende da n: $P(n)\equiv P$ $\forall n\in\mathbb{N}$, allora il processo stocastico $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice OMOGENEO

OSSERVAZIONE Se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un processo stocastico omogeneo a tempo discreto e stati discreti, allora

$$\pi(n) = \pi(0)P^n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

CATENE DI MARKOV

Sia $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ spazio probabilizzato, sia S un insieme discreto e sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processo stocastico su $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ a tempo discreto e stati discreti, con S insieme degli stati.

Dico che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov se

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad\forall i_0, i_1, \dots, i_{n-1}\in S$ t.c. $\mathbb{P}(X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \dots, X_0=i_0)>0$

si ha che $\forall j\in S$ $\quad \mathbb{P}(X_n=j\mid X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \dots, X_0=i_0) =$

$$= \mathbb{P}(X_n=j\mid X_{n-1}=i_{n-1})$$

si ha che $\forall j \in S$ $\mathbb{P}(X_n=j \mid X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \ldots, X_0=i_0) =$
$$= \mathbb{P}(X_n=j \mid X_{n-1}=i_{n-1})$$

DEF Se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov e la matrice di transizione non dipende da n, dico che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una CATENA DI MARKOV OMOGENEA.
La matrice $P=(P^i_j)_{i,j\in S}$ t.c. $P^i_j = \mathbb{P}(X_n=j \mid X_{n-1}=i)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ si dice MATRICE DI TRANSIZIONE DELLA CATENA.

PROPRIETÀ (no dim) Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov a tempo discreto e stati discreti con insiemi degli stati S, su uno spazio probabilizzato $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$
Allora $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall B\in\mathcal{E}$ evento rilevabile da $X_0, \ldots X_{n-1}$
$\forall k\in\mathbb{N}$ $\forall A\in\mathcal{E}$ evento rilevabile da $X_{n+1}, \ldots X_{n+k}$
e $\forall i\in S$ si ha
$$\mathbb{P}(A \mid X_n=i) = \mathbb{P}(A \mid X_n=i, B)$$

Sia $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ spazio probabilizzato, $X:\Omega\to\mathbb{R}$
$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{X\in B\}\in\mathcal{E}$
$E\in\mathcal{E}$ t.c. $E=\{X\in B\}$ per qualche $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ si dice un evento rilevato da X

$Y:=(X_0, X_1, \ldots X_{n-1}): \Omega \to S^n \subset \mathbb{R}^n$
$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\{Y\in B\}\in\mathcal{E}$
Se $E\in\mathcal{E}$ $E=\{Y\in B\}$ per qualche $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, si dice che E è un evento rilevato da $X_0, X_1 \ldots X_{n-1}$

— o —

CATENE DI MARKOV OMOGENEE

$\pi(0)$ vettore delle densità discrete di X_0
P matrice di transizione

$\pi(n) = \pi(0)P^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ è il vettore delle densità discrete di X_n

$S=\{1 \ldots N\}$ P si può rappresentare anche graficamente
Un grafo orientato è dato da una coppia (V,K) dove V è un insieme finito i cui elementi si dicono NODI e K è un sottoinsieme di $V\times V$
Se $i,j\in V$ e $(i,j)\in K$ dico che (i,j) è un arco da i a j
$V=$ insieme finito

$$i \xrightarrow{a_{ij}} j$$

$$i \xrightarrow{a_{ij}} j$$

A ciascun arco posso associare $a_{ij} \geq 0$: si chiama peso dell'arco.

P matrice stocastica $N \times N$ si può rappresentare con un grafo pesato

$V = \{1, 2, \text{—}, N\}$

$$i \xrightarrow{P^i_j} j$$

Dico che $(i,j) \in K$
se $P^i_j > 0$
e gli attribuisco peso $a_{ij} = P^i_j$

VICEVERSA Supponiamo che (V, K) sia un grafo pesato e sia
$V = \{1 \text{—} N\}$

Definisco A matrice $N \times N$ come segue:

$$A^i_j = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } (i,j) \in K \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin K \end{cases}$$

Per ogni $i = 1 \text{—} N$ $\quad \alpha^i : \sum_{j=1}^{N} A^i_j \geq 0$

Se $\alpha^i = 0$ pongo $P^i_j = \delta_{ij}$ $\quad \forall j = 1 \text{—} N$

Se $\alpha^i > 0$ pongo $P^i_j = \dfrac{A^i_j}{\alpha_i}$ $\quad \forall j = 1 \text{—} N$

Considero la matrice $P = (P^i_j)_{i,j=1 \text{—} N}$

Sicuramente P è una matrice stocastica:

DIM $\quad P^i_j \geq 0 \quad \forall i,j = 1 \text{—} N$

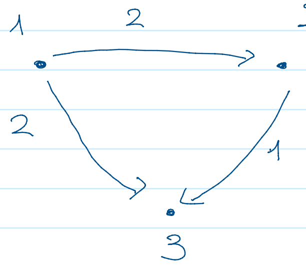
Fisso $i = 1 \text{—} N$ $\quad \sum_{j=1}^{N} P^i_j = \begin{cases} \text{se } \alpha_i = 0 & \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} = 1 \\ \text{se } \alpha_i > 0 & \sum_{j=1}^{N} \dfrac{A^i_j}{\alpha_i} = ? \end{cases}$

$$\sum^{N} \frac{A^i_j}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i} \sum^{N} A^i_j = \frac{1}{\alpha_i} \alpha_i = 1$$

$\sum_{j=1} \alpha_i$

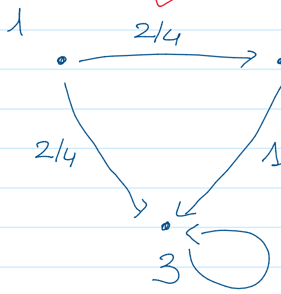
$$\sum_{j=1}^{N} \frac{A_j^i}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i}\sum_{j=1}^{N} A_j^i = \frac{1}{\alpha_i}\alpha_i = 1$$

$V = \{1, 2, 3\}$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to 4 \\ \to 1 \\ \to 0 \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0, & 2/4, & 2/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



TEOREMA Sia $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. i.i.d. definite su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.
Sia S insieme discreto $f: S\times\mathbb{R} \to S$
Sia $X_0 : \Omega \to S$ v.a. t.c. $\{X_0, (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ è una famiglia di v.a. indipendenti
Definisco, per ricorrenza

$$X_{n+1} := f(X_n, Z_{n+1}) \quad n\in\mathbb{N}$$

Allora $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una CATENA DI MARKOV OMOGENEA (a tempo discreto e spazio degli stati S).

DIM Abbiamo posto $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ $n\in\mathbb{N}$

$\forall \omega\in\Omega$ $\quad X_{n+1}(\omega) = f(X_n(\omega), Z_{n+1}(\omega))$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$n=0$ $\quad X_1(\omega) = f(X_0(\omega), Z_1(\omega))$

$n=1$ $\quad X_2(\omega) = f(X_1(\omega), Z_2(\omega)) = f\big(f(X_0(\omega), Z_1(\omega)), Z_2(\omega)\big)$
$= g(X_0(\omega), Z_1(\omega), Z_2(\omega))$

$n=2$ $\quad X_3(\omega) = f(X_2(\omega), Z_3(\omega)) =$
$= f(g(X_0(\omega), Z_1(\omega), Z_2(\omega)), Z_3(\omega))$
$=$ funzione di $X_0(\omega), Z_1(\omega), Z_2(\omega), Z_3(\omega)$

$n\in\mathbb{N}$ $\quad X_n(\omega) =$ funzione di $X_0(\omega), Z_1(\omega), Z_2(\omega), \dots, Z_n(\omega)$

$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)$ con

$i, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S$ t.c. $\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$

$i, i_{n-1}, \dots i_0 \in S$ t.c. $\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots X_0 = i_0) > 0$

$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$

$= \mathbb{P}\left(f(i, Z_{n+1}) = j \mid \underbrace{X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0}_{\text{dipende da } X_0, Z_1, \dots Z_n}\right) = \mathbb{P}\left(f(i, Z_{n+1}) = j\right)$

$=$

$X_0, Z_1 \dots, Z_n, Z_{n+1}$ è una famiglia di v.a. indipendenti

$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(f(i, Z_{n+1}) = j \mid \underbrace{X_n = i}_{\text{dipende solo da } X_0, Z_1 \dots Z_n}) = \mathbb{P}(f(i, Z_{n+1}) = j)$

$\Rightarrow$ Ho una catena di Markov con

$P(n+1)^i_j = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(f(i, Z_{n+1}) = j)$ non dipende da n perché le $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono i.i.d.

TEOREMA Sia S insieme discreto. Sia $P = (P^i_j)_{i,j \in S}$ matrice stocastica indicizzata su S. Allora esiste una catena di Markov omogenea la cui matrice di transizione è proprio P.

DIM 1) Se S è numerabile, lo posso identificare con $\mathbb{N}$
2) Se S è finito, lo posso identificare con $\{1, 2, \dots N\}$, $N := |S|$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ i.i.d. con $\mathbb{P}_{Z_n} = U([0,1])$
e sia $X_0 : \Omega \to S$ v.a. t.c. $\{X_0, (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ sono indipendenti
Pongo, per ricorrenza,

$U([0,1])$ è la distribuzione A.C. con densità
$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$

$X_{n+1}(\omega) = j$ se

$$\sum_{k=0}^{j-1} P_k^{X_n(\omega)} \leq Z_{n+1}(\omega) < \sum_{k=0}^{j} P_k^{X_n(\omega)}$$

$$\sum_{k=0}^{\boxed{j-1}} P_k^{X_0(\omega)} \leq Z_1(\omega) < \sum_{k=0}^{j} P_k^{X_0(\omega)} \Rightarrow X_1(\omega) = j$$

$$X_{n+1}(\omega) = \min\left\{j \in S : \sum_{k \leq j} P_k^{X_n(\omega)} > Z_{n+1}(\omega)\right\}$$

È come scegliere

$$f(i, x) := \min\left\{j \in S : \sum_{k \leq j} P^i_k > x\right\} \qquad X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$$

nel Teorema precedente $\Rightarrow$ sicuramente ho una catena di Markov omogenea

$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(f(i, Z_{n+1}) = j) =$

$\{\omega \in \Omega : f(i, Z_{n+1}(\omega)) = j\} = \{\omega \in \Omega : \sum P^i_k < Z_{n+1}(\omega) < \sum P^i_k\}$

$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \mathbb{P}(f(i,Z_{n+1})=j)$

$$\{\omega\in\Omega : f(i,Z_{n+1}(\omega))=j\} = \{\omega\in\Omega : \sum_{k\le j-1} p_k^i \le Z_{n+1}(\omega) < \sum_{k\le j} p_k^i\}$$

$$= \{\omega\in\Omega : Z_{n+1}(\omega)\in \underbrace{\left[\sum_{k\le j-1} p_k^i, \sum_{k\le j} p_k^i\right)}_{\subseteq [0,1]}\}$$

$$= \mathbb{P}(f(i,Z_{n+1})=j) = \left(\sum_{k\le j} p_k^i\right) - \left(\sum_{k\le j-1} p_k^i\right) = p_j^i$$