1. Spazi metrici e spazi normati

1.1 Spazi metrici

Definizione 1.1.1. Una coppia (X, d) si dice uno *spazio metrico* se x è un insieme non vuoto e $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{array}{lll} d(x,y) \geq 0 & \forall x, y \in X, & d(x,y) = 0 \text{ se e solo se } x = y, \\ d(x,y) = d(y,x) & \forall x, y \in X, & \text{(simmetria)} \\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,x) & \forall x, y, z \in X. & \text{(disuguaglianza triangolare)} \end{array}$$

La funzione d si dice *distanza* o *metrica* sull'insieme X.

Definizione 1.1.2. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X e sia $\overline{x} \in X$. Dico che x_n converge a $\overline{x}$ nella metrica d (o nello spazio metrico (X, d)) se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n \overline{x}) = 0.$$

Dico che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una *successione di Cauchy* in (X, d) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n}\colon \forall k, n \geq \overline{n} \qquad d(x_n, x_k) < \varepsilon.$$

Proposizione 1.1.1. *Sia (X, d) uno spzio metrico e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente in (X, d). Allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in (X, d).*

Il viceversa in generale non è vero. Si dà dunque la seguente definizione.

Definizione 1.1.3. Uno spazio metrico (X, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy in (X, d) è convergente in (X, d).

Esempio 1.1.1.
1. Sia $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x - y|$. Allora (X, d) è uno spazio metrico completo.

2. Sia $X = \mathbb{R}^N$, $d_2(x,y) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$, allora (X, d_2) è uno spazio metrico completo. Più in generale, se $p \in [1, +\infty)$, posto $d_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^p \right)^{1/p}$, allora $(\mathbb{R}^N, d_p)$ è uno spazio metrico completo.
   Inoltre, posto $d_\infty(x,y) = \max\limits_{i=1,\dots,N} |x_i - y_i|$, anche $(\mathbb{R}^N, d_\infty)$ è uno spazio metrico completo.

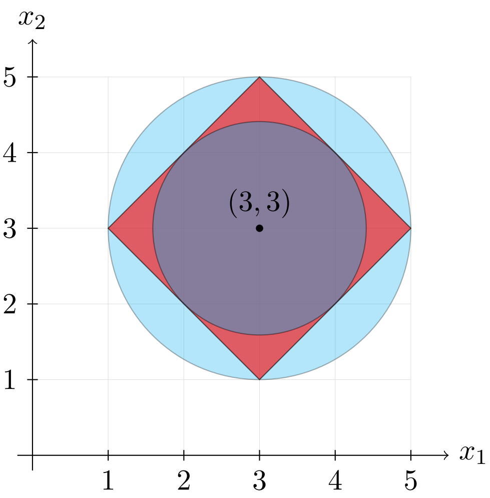

Figura 1.1: In azzurro chiaro la palla $B_2((3,3))$ nella metrica euclidea, in blu la palla $B_{\sqrt{2}}((3,3))$ nella metrica euclidea. In rosso la palla $B_2((3,3))$ nella metrica d_1

3. Sia $I = [a,b]$. Per $f, g \in C^0(I)$, insieme delle funzioni continue in I, definisco $d_\infty(f,g) = \max_{x\in I} |f(x) - g(x)|$. Allora $(C^0(I), d_\infty)$ è uno spazio metrico completo.

Definizione 1.1.4. Sia (X,d) uno spazio metrico e siano $x_0 \in$, $r > 0$. L'insieme

$$B_r(x_0) := \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$$

si dice *palla di centro x_0 e raggio r.*

Un sottoinsieme $A \subset X$ si dice un *aperto di X* se per ogni $x_0 \in A$ esiste un $r = r(x_0) > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset A$.
Un sottoinsieme $C \subset X$ si dice un *chiuso di X* se il suo complementare in X, $X \setminus C$ è un aperto di X.

Esempio 1.1.2. Consideriamo $(\mathbb{R}^2)^*$ con la distanza $d_1(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Per $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in (\mathbb{R}^2)^*$ e $r > 0$ si ha dunque

$$B_r(x^0) := \left\{x = (x_1,x_2) \in (\mathbb{R}^2)^* : \left|x_1 - x_1^0\right| + \left|x_2 - x_2^0\right| < r\right\}.$$

Osservazione 1.1.1. Osserviamo che in $\mathbb{R}^N$ o, equivalentemente, in$(\mathbb{R}^N)^*$, tutte le metriche d_p sono equivalenti, ovvero le famiglie dei chiusi e degli aperti coincidono. Infatti, se $A \subset \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in A$, allora A contiene una palla centrata in x_0 della metrica d_p se e solo se A contiene una palla euclidea centrata in x_0 (vedi Figura 1.1.2)

1.2 Spazi normati

Definizione 1.2.1. Dico che la coppia (X,N) è uno *spazio normato* se X è uno spazio vettoriale e se $N : X \to \mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà

$$\begin{aligned} &N(x) \geq 0 && \forall x \in X \text{ e } N(x) = 0 \text{ se e solo se } x = 0,\\ &N(\lambda x) = |\lambda|\, N(X) && \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\\ &N(x+y) \leq N(x) + N(y) && \forall x,y \in X. \qquad \text{(disuguaglianza triangolare)} \end{aligned}$$

Lemma 1.2.1. *Sia (X, N) è uno spazio normato. Per $x, y \in X$ sia $d(x, y) := N(x - y)$. allora d è una metrica su X. d è detta metrica indotta dalla norma N.*

Definizione 1.2.2. Sia (X, N) è uno spazio normato. Se X è uno spazio metrico completo rispetto alla metrica indotta dalla norma, allora (X, N) si dice *spazio di Banach*.

Esempio 1.2.1.

1. Sia $X = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$. Allora (X, N) è uno spazio di Banach.
2. Sia $X = \mathbb{R}^N$, $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2}$ è una norma su $\mathbb{R}^N$, detta *norma euclidea* e induce la distanza d_2, detta appunto *distanza euclidea.*
   Più in generale, se $p \in [1, +\infty)$, si chiama *norma-p di un vettore* $x \in \mathbb{R}^N$ $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p}$. La distanza indotta è d_p
   Inoltre, posto $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,N} |x_i|$, anche $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato che induce la distanza d_∞.
3. Sia $I = [a, b]$. Per $f \in C^0(I)$, definisco $\|f\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x)|$. Allora $(C^0(I), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato. La metrica indotta è d_∞.

1.3 Insiemi convessi

Definizione 1.3.1. Sia V uno spazio vettoriale e sia $X \subset V$. Dico che X è un insieme convesso se

$$\lambda v_1 + (1 - \lambda) v_2 \in X \qquad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall v_1, v_2 \in X.$$

Proposizione 1.3.1. *Sia X insieme convesso in uno spazio vettoriale V e siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in X$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$, e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Allora il vettore $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ appartiene a X.*

Dimostrazione. Se $n = 2$ non c'è niente da dimostrare. Procediamo per induzionesupponendo che sia vero fino a $n - 1$. Sia $\overline{\lambda} := \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$, cosicché $\overline{\lambda} \in [0, 1]$ e $\lambda_n = 1 - \overline{\lambda}$. Considero

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i\right) + \lambda_n v_n = \overline{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\overline{\lambda}} v_i\right) + \lambda_n v_n = \overline{\lambda} w_{n-1} + (1 - \overline{\lambda}) v_n$$

dove $w_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\overline{\lambda}} v_i \in X$ per l'ipotesi induttiva. Di conseguenza $\overline{\lambda} w_{n-1} + (1 - \overline{\lambda}) v_n \in X$ per definizione di insieme convesso. $\square$

Proposizione 1.3.2. *Sia V uno spzio vettoriale e siano $v_1, v_2, \dots v_n \in V$. L'insieme*

$$X := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \colon \lambda_1, \dots \lambda_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

è un insieme convesso. X è detto involucro convesso dei vettori $v_1, \dots, v_n$.

Definizione 1.3.2. Sia X insieme convesso in uno spazio vettoriale V. Un vettore $v \in X$ si dice *punto estremo di* X se non esistono $\lambda \in (0,1)$ e $v_1, v_2 \in X$, $v_1 \neq v_2$ tali che $v = \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2$.

Esempio 1.3.1. Sia $\mathcal{I}$ l'insieme dei vettori stocastici di $(\mathbb{R}^N)^*$. Allora $\mathcal{I}$ è un insieme convesso. I suoi punti estremi sono i vettori della base canonica e $\mathcal{I}$ è il loro involucro convesso.