martedì 6 ottobre 2020 16:32

X insieme non vuoto,

$d : X \times X \to \mathbb{R}$

$d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X \qquad d(x,y) = 0$ SSE $x = y$

$d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$

(X,d) spazio metrico

Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in X.
Dico che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy nella metrica d se

$\forall \varepsilon >$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}$ T.c. $\forall n, k > \bar{n} \quad d(x_n, x_k) < \varepsilon$

Dico che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad un pto $\bar{x} \in X$ nella metrica d se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}$ T.c. $\forall n > \bar{n} \quad d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$

Si può dimostrare che ogni successione convergente è di Cauchy.

ESEMPIO $(X,d) = (\mathbb{Q}, d) \qquad d(x,y) = |x-y|$

Il viceversa non è vero come mostra questo esempio

x_n = approssimazione co

$x_1 = 1.4 = \frac{14}{10} \qquad x_2 = 1,41 = \frac{141}{}$ n' n-cifre ~~deci~~decimali di $\sqrt{2}$

$n > K \qquad |x_n - x_k| < 10^{-k}$

$\mathbb{R}^n$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \quad i = 1 \dots n\}$$

Uno spazio metrico (X,d) si dice COMPLETO se ogni successione di Cauchy rispetto alla metrica d converge, in tale metrica, ad un pto di X

(X,d)

Sia $x_0 \in X$ e sia $r > 0$.
PALLA DI CENTRO x_0 E RAGGIO r

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

$$B(x_0, r) = \{ x \in X : d(x_0, x) < r \}$$

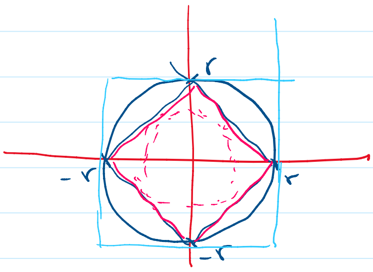
$n = 2$ $\quad B(0, r)$

d_2 $\quad B(0,r) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2 \}$

d_1 $\quad B(0,r) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < r \}$

d_∞ $\quad B(0,r) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < r, |x_2| < r \}$

$x_1 + x_2 < r$



— o —

Sia X uno spazio vettoriale

$N : X \to \mathbb{R}$

$N(x) \geq 0 \quad \forall x \in X \qquad N(x) = 0$ SSE $x = 0_X$

$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$

$N(x+y) \leq N$

La funzione N si dice una NORMA

La coppia (X, N) si dice SPAZIO NORMATO

$N(x)$ si indica anche $\|x\|$

Sia (X, N) uno spazio normato

Definisco $\quad d(x,y) = N(x-y)$

Si verifica che (X, d) è uno spazio metrico.

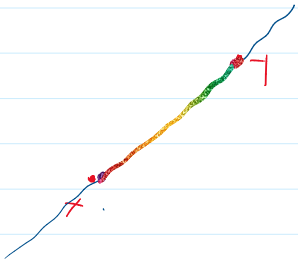
Uno spazio normato si dice SPAZIO DI BANACH se è completo rispetto alla distanza indotta dalla norma

— o —

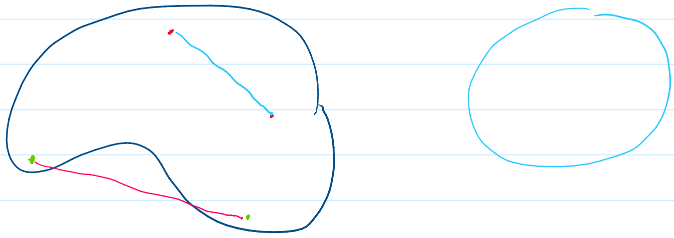
Sia V uno spazio vettoriale

Sia X un sottoinsieme di V.

Dico che X è un insieme CONVESSO se $\forall x, y \in X$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$ si ha $\underline{\lambda x + (1-\lambda) y} \in X$



$y + \lambda(x-y)$

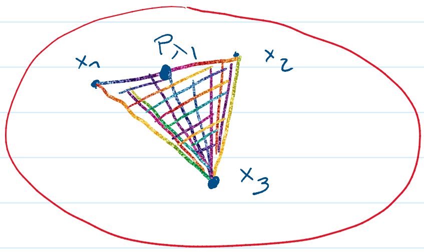


PROPOSIZIONE Sia V uno spazio vettoriale e sia X un insieme convesso di V.
Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$ e $\forall x_1, x_2, \dots x_n \in X$
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \geq 0$ T.c. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in X$$

$\lambda_3 = 0$
$\lambda \geq 0$
$\lambda_2 \geq 0$
$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2 = P_{\lambda_1}$



$\mu_1 P_{\lambda_1} + (1-\mu_1) x_3$

$\mu_1 \in [0,1]$

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 0 \cdot x_3$
$= \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2$

— o —

$V = (\mathbb{R}^n)^*$ $\qquad N_1(x) = \|x\|_1 : \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\mathcal{J} = \{ x \in (\mathbb{R}^n)^* : \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \}$

VETTORI STOCASTICI A n COMPONENTI $\qquad = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilistico
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad X(\Omega) = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

$\forall i = 1 \dots n$ $\quad \mathbb{P}(X = t_i) =: p_i$ $\qquad p_i \in [0,1]$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = t_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X = t_i\} \right) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

$(p_1, p_2, \dots, p_n)$ è un vettore stocastico.

PROPRIETÀ $\quad \mathcal{J}$ è un convesso di $(\mathbb{R}^n)^*$

DIM. $\quad x = (x_1 \dots x_n) \in \mathcal{J}$
$\quad y = (y_1 \dots y_n) \in \mathcal{J}$

$\lambda \in [0,1]$

$$\lambda x + (1-\lambda) y = (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \dots, \lambda x_n + (1-\lambda) y_n)$$

$\lambda x_i + (1-\lambda) y_i \geq 0$?

$x_i \geq 0 \quad y_i \geq 0$
$\lambda \geq 0 \quad 1-\lambda \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda x_i + (1-\lambda) y_i\right) = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{=1} + (1-\lambda) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i}_{=1} = \lambda + 1 - \lambda = 1$$

$$\mathcal{T} = \left\{ x = (x_1 \_\_ x_n) \in (\mathbb{R}_n)^* : x_i \geq 0 \ \forall i = 1 \_\_, n, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

$x \in \mathcal{T} \implies \forall i = 1 \_\_ n \quad 0 \leq x_i \leq 1 \qquad \mathcal{T} \subset [0,1]^n$

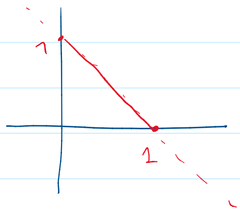
— o —

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA

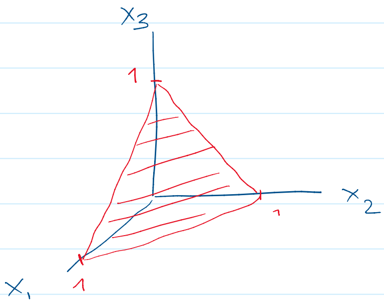
$\{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0 \} \qquad \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0 \}$

$$\mathcal{T} = \{ x : x_1 \geq 0 \} \cap \{ x : x_2 \geq 0 \} \cap \ldots \ldots \cap \{ x : x_n \geq 0 \} \cap$$
$$\left\{ x : \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - 1 \geq 0 \right\} \cap \left\{ x : 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq 0 \right\}$$

$n = 2 \qquad \mathcal{T} = \{ x = (x_1, x_2) : x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_1 + x_2 = 1 \}$
$\qquad = \{ x = (x_1, 1 - x_1) : x_1 \in [0, 1] \}$



$n = 3 \qquad \mathcal{T} = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0,$
$\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \}$



MATRICI STOCASTICHE

P matrice $n \times n$, si dice MATRICE STOCASTICA

MATRICI STOCASTICHE

P matrice $n \times n$, si dice MATRICE STOCASTICA se ogni sua riga è un vettore stocastico.

$$P = (P^i_j)_{i,j=1 \ldots n}$$

$$\forall i \text{ e } \forall j \quad P^i_j \geq 0$$

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} P^i_j = 1$$

$$\underline{P} : x \in (\mathbb{R}^n)^* \longmapsto xP \in (\mathbb{R}^n)^*$$

$$\underline{P} : x \in \mathcal{J} \longmapsto xP \in (\mathbb{R}^n)^*$$

PROPOSIZIONE Sia P matrice $n \times n$.
Allora $xP \in \mathcal{J}$ $\forall x \in \mathcal{J}$ SSE P è una matrice stocastica

cioè $\underline{P}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}$ SSE P è stocastica

DIM. 1 Supponiamo P stocastica.
Sia $x = (x_1 \ldots x_n) \in \mathcal{J}$ $\quad xP \overset{?}{\in} \mathcal{J}$

$$(xP)_j = \sum_{i=1}^{n} \underset{\overset{\vee\!|}{0}}{x_i} \underset{\overset{\vee\!|}{0}}{P^i_j} \geq 0 \quad \forall j = 1 \ldots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} (xP)_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i P^i_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i P^i_j =$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} P^i_j \right)}_{=1 \ \forall i} = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{perché } x \in \mathcal{J}$$

2. Supponiamo $\underline{P}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}$

Sappiamo che $\forall x \in \mathcal{J}$ $\quad xP \in \mathcal{J}$
$x = e_1 = (1, 0, \ldots 0)$

$$e_1 P = \ ? \quad \mathcal{J} \ni (e_1 P)_j = \sum_{i=1}^{n} (e_1)_i P^i_j = P^1_j$$

cioè la prima riga della matrice $\mathcal{J}$

Analogo per le altre righe