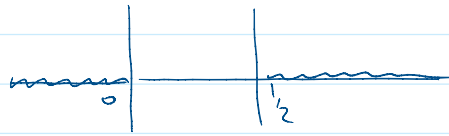


$$\pi = \int_{\mathbb{R}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \mu(dx) \quad \mu = U([0, \frac{1}{2}])$$



$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 5 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

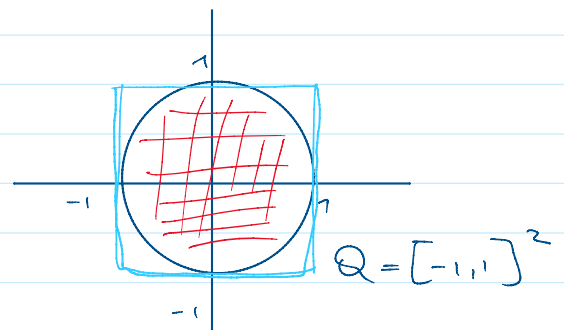
π è l'Area del Cerchio di raggio 1

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$\pi = \text{Area } C = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_C(x, y) dx dy$$

$$= \int_Q \mathbb{1}_C(x, y) dx dy$$

$$\mathcal{L}^2(Q) = 2 \cdot 2 = 4$$



$$= \int_Q 4 \mathbb{1}_C(x, y) \frac{1}{4} dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} 4 \mathbb{1}_C(x, y) \cdot \boxed{\frac{1}{4} \mathbb{1}_Q(x, y)} dx dy$$

$X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Indipendenti, entrambe con distribuzione a.c.

$$\mathbb{P}_X = f(x) dx, \quad \mathbb{P}_Y = g(y) dy$$

Si può dimostrare che le v.a. $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ha anch'essa distribuzione A.C. con densità $\mathbb{P}_{X,Y} = f(x)g(y) dx dy$ cioè

$$\forall A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \quad \mathbb{P}((X, Y) \in A) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) dx dy$$

$$h(x, y) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_Q(x, y) =$$

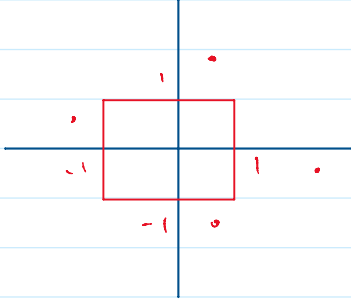
$$\mathbb{1}_Q(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in [-1, 1]^2 \\ 0 & (x, y) \notin [-1, 1]^2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x) \cdot \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1, 1]}(y)$$

Se $(x, y) \in Q = [-1, 1]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x) = 1 \quad \mathbb{1}_{[-1, 1]}(y) = 1$

Se $(x,y) \in Q = [-1,1]^2 \Rightarrow \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) = 1 \mid \mathbb{1}_{[-1,1]}(y) = 1$
 $\Rightarrow h(x,y) = 1 = \mathbb{1}_Q(x,y)$

Se $(x,y) \notin Q = [-1,1]^2$ $\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$
 almeno di uno fa zero
 $h(x,y) = 0 = \mathbb{1}_Q(x,y)$



$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_Q(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}_{\text{densità associata a } U([-1,1])} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)}_{\text{densità associata a } U([-1,1])} dx dy$$

$\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ successioni di v.a. $\sqrt{\text{su } (\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})}$ i.c. le famiglie $\{X_i, Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sia una famiglia di v.a. indipendenti.

identicamente distribuite con $\mathbb{P}_{X_i} = \mathbb{P}_{Y_i} = U([-1,1])$

$n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_Q(X_i(\omega), Y_i(\omega))$ converge $\mathbb{P}$ -q.c.,
 in media quadratica
 e in probabilità a π

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni $f_n : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

DEF. Sia $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dico che $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione f se

$\rightarrow \forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ i.c. } \forall n > \bar{n} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
 $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x)$

DEF Sia $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dico che $\{f_n\}$ converge uniformemente alla funzione f se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ i.c. } \forall n > \bar{n} \quad \sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n > \bar{n} \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$

$$\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n > \bar{n} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E$$

$\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$

PROPRIETÀ Se f_n converge ad f uniformemente, allora f converge ad f puntualmente
 Il viceversa non è vero.

$$E = [0, 1] \quad f_n(x) = x^n$$

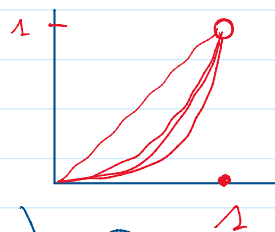
$$\text{Fisso } x \in [0, 1) \quad f_n(1) = 1^n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$$

$$x \in [0, 1) \quad f_n(x) = x^n \quad x \in [0, 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$$f_n \text{ converge puntualmente alla funzione } f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$g_n(x) := |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} |x^n - 0| & x \in [0, 1) \\ |1^n - 1| & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} x^n & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\sup \{g_n(x) : x \in [0, 1]\} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



Non è vero che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

SUCCESSIONI ESTRATTE

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$k_n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$k_n < k_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots$$

$$b_n := a_{k_n}$$

$$k_1 > 1$$

$$k_2 > k_1 \Rightarrow k_2 > 2$$

$$k_3 > k_2 \Rightarrow k_3 > 3$$

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7

$k_1 = 3$

$b_1 = a_3$

$k_2 = 4$

$b_2 = a_4$

$k_3 = 6$

$b_3 = a_6$

$\{b_n\}$ è la sottosuccessione estratta da $\{a_n\}$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE EMPIRICA

Sia X v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ i.i.d. $\mathbb{P}_{X_i} = \mathbb{P}_X$

Fisso $t \in \mathbb{R}$ $Y_i(\omega) = \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(X_i(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i(\omega) \leq t \\ 0 & \text{se } X_i(\omega) > t \end{cases}$

$Y_i(\omega, t)$

$s \in \mathbb{R} \quad s < 0 \quad \{Y_i \leq s\} = \emptyset \in \mathcal{E}$

$s \in [0, 1) \quad \{Y_i \leq s\} = \{Y_i = 0\} = \{X_i > t\} \in \mathcal{E}$

$s > 1 \quad \{Y_i \leq s\} = \Omega \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow$ Y_i sono v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\Rightarrow$ La distribuzione $\mathbb{P}_{Y_i}$ è la distribuzione di Bernoulli $\text{Ber}(p)$ per un qualche valore del parametro $p = \mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i \leq t) = F_{X_i}(t) = F_X(t)$

$\Rightarrow$ Le Y_i sono identicamente distribuite - Sono anche indipendenti.

$\mathbb{E}[Y_i] = p = F_X(t)$

$\text{Var}[Y_i] = p(1-p) = F_X(t)(1-F_X(t))$

Applico la legge dei grandi numeri a $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$

$\bar{Y}_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(\omega)$ converge $\mathbb{P}$ -q.c. in media quadratica e in probabilità a $\mathbb{E}[Y_i] = p = F_X(t)$

$\sum_{i=1}^n Y_i(\omega) = ?$

$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i(\omega) \leq t \\ 0 & \text{se } X_i(\omega) > t \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^n Y_i(\omega) = \# \{ j \in \{1, \dots, n\} : X_j(\omega) \leq t \}$$

$$\mathbb{P} \left(\left| \bar{Y}_n - F_X(t) \right| > \delta \right) \leq \frac{F_X(t)(1 - F_X(t))}{n\delta^2} \quad \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall \delta > 0 \\ t \in \mathbb{R} \end{array}$$

$F_X(t) \in [0, 1]$ $F_X(t)(1 - F_X(t)) = 2(1/2 - 2)$
 $= -2^2 + 2 = -2^2 + 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
 $= \frac{1}{4} - (2 - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$

$$\mathbb{P} \left(\left| \bar{Y}_n - F_X(t) \right| > \delta \right) \leq \frac{1}{4n\delta^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \delta > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{P} \left(\left| \bar{Y}_n - F_X(t) \right| > \delta \right) \leq \frac{1}{4n\delta^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \delta > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{P} \left(\left| \bar{Y}_n - F_X(t) \right| > \delta \right)}_{g(t)} = 0 \quad \forall \delta > 0$$

$g(t)$ converge uniformemente a 0

LEGGI DEI GRANDI NUMERI

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
• le X_i correlate due a due • $\mathbb{E}[X_i] = \bar{E} \in \mathbb{R}$ • $\exists C \in \mathbb{R} : \text{Var}[X_i] \leq C \quad \forall i \in \mathbb{N}$	• a due a due indipendenti + • $\mathbb{E}[X_i] = \bar{E}$ finito • identicamente distribuite

Successione $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di v.a. nonnegative per la quale valga la legge forte dei grandi numeri

Considero

$$T_n(\omega) := \sum_{k=1}^n S_k(\omega)$$

$S_k(\omega) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \omega \in \Omega \quad T_n(\omega)$ è una successione monotona crescente cioè $T_n(\omega) \leq T_{n+1}(\omega) \quad \leftarrow$
 $\forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \omega \in \Omega$

Fisso $t > 0$ e definisco

Fisso $t > 0$ e definisco

$$N_t(\omega) := \sup \{n \in \mathbb{N} : T_n(\omega) \leq t\}$$

$$N_t(\omega) \leq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

$$\text{Se } T_n(\omega) < t \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow \\ N_t(\omega) := +\infty$$

$$\text{Sia } E := \mathbb{E}[S_n] \in [0, +\infty)$$

$$\text{Allora } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_t(\omega)}{t} = \frac{1}{E} \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

N.B. Se $E=0$
 $\frac{1}{E}$ significa $+\infty$

DM (1) $T_n(\omega)$ è una successione convergente cioè $\sum_{k=1}^{\infty} S_k(\omega)$
è una serie convergente
Sia $\sum_{k=1}^{\infty} S_k(\omega) =: z \in [0, +\infty)$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad T_n(\omega) \leq z$$

$$\text{Considero solo } t > z \Rightarrow T_n(\omega) \leq z < t \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow N_t(\omega) = +\infty \quad \forall t > z$$

$$\frac{N_t(\omega)}{t} = \frac{+\infty}{t} = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_t(\omega)}{t} = +\infty$$

$$\rightarrow \frac{T_n(\omega)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(\omega) \text{ converge } \mathbb{P}\text{-q.c. ad } E \leftarrow$$

Se provo che $E=0$ ho dimostrato il Teorema

$$0 = \frac{0 \leq T_n(\omega) \leq z}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n(\omega)}{n} = 0 \quad \leftarrow \Rightarrow E=0$$

$\downarrow$
0

$$(2) \quad T_n(\omega) \text{ diverge a } +\infty \quad \sum_{k=1}^{\infty} S_k(\omega) = +\infty$$

$$N_t(\omega) := \sup \{n \in \mathbb{N} : T_n(\omega) \leq t\}$$

$$t \rightarrow +\infty \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} N_t(\omega) = +\infty \quad \Rightarrow \text{posso lavorare con } N_t(\omega) \geq 2$$

$$\rightarrow a_t(\omega) := N_t(\omega) - 1 \quad b_t(\omega) := N_t(\omega) + 1 \quad \rightarrow N_t(\omega)$$

$$T_{a_t(\omega)}(\omega) \leq t < T_{b_t(\omega)}(\omega)$$

$$\frac{T(w)}{2_t(w)} \leq t < T_{b_t(w)}(w)$$

$$\frac{1}{T_{b_t(w)}} < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{T_{2_t(w)}} \quad \checkmark$$

$$\frac{N_t(w)}{T_{b_t(w)}(w)} < \frac{N_t(w)}{t} \leq \frac{N_t(w)}{T_{2_t(w)}(w)} \quad \checkmark$$

$$\frac{b_t(w)-1}{T_{b_t(w)}(w)} < \frac{N_t(w)}{t} \leq \frac{2_t(w)+1}{T_{2_t(w)}(w)}$$

$$\left[\frac{b_t(w)-1}{b_t(w)} \right] \cdot \left[\frac{1}{\frac{T_{b_t(w)}(w)}{b_t(w)}} \right] < \frac{N_t(w)}{t} \leq \left[\frac{2_t(w)+1}{2_t(w)} \right] \cdot \left[\frac{1}{\frac{T_{2_t(w)}}{2_t(w)}} \right]$$

$b_t(w) = N_t(w) + 1 \xrightarrow{+\infty}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$
 $2_t(w) = N_t(w) - 1 \xrightarrow{+\infty}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$

$\frac{T_{b_t(w)}(w)}{b_t(w)} \rightarrow E$
 solo alcuni valori di $\frac{T_n(w)}{n} \rightarrow E$
 legge dei grandi numeri
 $\frac{T_{2_t(w)}}{2_t(w)} \rightarrow E$
 solo alcuni valori di $\frac{T_n(w)}{n} \rightarrow E$

$\Rightarrow$ Per il Teorema dei due carabinieri: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_t(w)}{t} = \frac{1}{E}$

METRICIA (o DISTANZA)

Sia X insieme non vuoto e sia $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ T.c.

- 1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ e $d(x, y) = 0$ SSE $x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

d si dice una METRICA o una DISTANZA sull'insieme X e la coppia (X, d) si dice uno SPAZIO METRICO

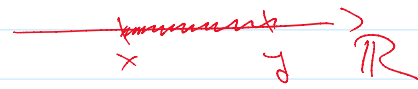
ESEMPIO

$$X = \mathbb{R}$$

$$d(x, y) = |x - y|$$

$$X = \mathbb{Q}$$

$$d(x, y) = |x - y|$$

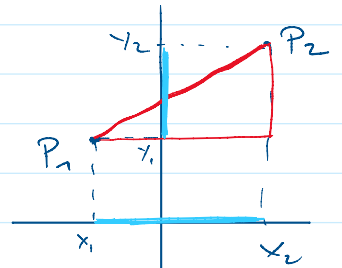


$$X = \mathbb{R}^2$$

$$P_1 = (x_1, y_1)$$

$$P_2 = (x_2, y_2)$$

$$d_2(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



$$d_1(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

$$\forall p \in [1, +\infty) \quad d_p(P_1, P_2) = \left(|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p \right)^{1/p}$$
$$d_\infty(P_1, P_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

DEF Sia (X, d) spazio metrico e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione a valori in X . Sia $\bar{x} \in X$.

Dico che x_n converge a $\bar{x}$ nella metrica d se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \bar{x}) = 0$$

DEF Sia (X, d) spazio metrico e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione a valori in X . Dico che $\{x_n\}$ è una successione di CAUCHY NELLA METRICA d se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ t.c. } \forall k, n > \bar{n} \quad d(x_k, x_n) < \varepsilon$$

PROPRIETÀ Ogni successione convergente nella metrica d , è di Cauchy rispetto alla stessa metrica

OSSERVAZIONE Esistono spazi metrici in cui esistono successioni di Cauchy che non sono convergenti.

$$(X, d) \quad X = \mathbb{Q} \quad d(x, y) = |x - y|$$

$$\pi = 3,14159265 \dots$$

$$a_1 = 3,1$$

$$a_2 = 3,14$$

$$a_3 = 3,141$$

$$a_4 = 3,1415$$

a_n = Troncamento di π con n cifre decimali

$$a_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$k > n \quad |a_k - a_n| < 10^{-n} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \text{ T.s. } \forall k, n > \bar{n} \quad |a_k - a_n| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi \notin \mathbb{Q}$$