

DISTRIBUZIONE DI BERNULLI

$$\Omega = \{T, C\} \quad \{S, I\}, \{1, 0\}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$X: \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R} \quad X(T) = 1 \quad X(C) = 0$$

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \Rightarrow \mathbb{P}_X = \text{Ber}(p) \quad p = ?$$

$$\{X=1\} = \{T\} \quad p = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{T\}) \in [0, 1]$$

Pensavo le solite monete n volte Tenendo conto dell'ordine dei lanci

$$\Omega = \{T, C\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{T, C\} \forall i=1, \dots, n\}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \leftarrow$$

Per $\omega \in \Omega$ voglio contare il numero di Torte che ci sono in ω
Indico con $X(\omega)$ questa funzione:

$$X(\omega) := \# \text{Torte presenti in } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad \text{e } X \text{ è sicuramente una v.a.}$$

$$\mathbb{P}(X=k) \quad k=1, \dots, n$$

$$\omega \in \Omega \quad X(\omega) = k \quad \text{SSE in } \omega \text{ ci sono } k \text{ Torte} \quad \leftarrow \text{e } n-k \text{ croci}$$

$$\text{Sia } \bar{\omega} \text{ T.c. } X(\bar{\omega}) = k$$

$$\mathbb{P}(\{\bar{\omega}\}) = ?$$

$$\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n)$$

$$\{\bar{\omega}\} = \{\omega : \omega_1 = \bar{\omega}_1\} \cap \{\omega : \omega_2 = \bar{\omega}_2\} \cap \dots$$

$$\cap \{\omega : \omega_n = \bar{\omega}_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{\omega : \omega_i = \bar{\omega}_i\}$$

$$\mathbb{P}(\{\bar{\omega}\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\omega : \omega_i = \bar{\omega}_i\})$$

$$\text{Là ci sono } k \text{ fattori} = p$$

$$n-k \text{ fattori} = 1-p$$

$\uparrow$ n eventi indipendenti

$$\mathbb{P}(\{\bar{\omega}\}) = p^k (1-p)^{n-k}$$

dove $k = \# \text{Torte}^T$ che ci sono nelle componenti $\perp$ di ω

$$\{X=k\} = \{\omega : \omega \text{ contiene } k \text{ Torte ed } (n-k) \text{ croci}\}$$

$$\# \{X=k\} = \binom{n}{k}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE DI PARAMETRI n E p $\text{Bin}(n, p)$

$$E[X] = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^n k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\omega \in \Omega = \{T, C\}^n$$

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_i = T \\ 0 & \text{se } \omega_i = C \end{cases}$$

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n Y_i(\omega)$$

$$i=1, \dots, n$$

Y_i sono indipendenti. $P_{Y_i} = \text{Ber}(p)$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n E[Y_i] = \sum_{i=1}^n p = np \quad \leftarrow$$

$$\rightarrow \text{Var}[X] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[Y_i] = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p)$$

Siano X e Z v.a. indipendenti.

$$\begin{aligned} P_X &= \text{Bin}(n, p) \\ P_Z &= \text{Bin}(m, p) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$P_{X+Z} = \text{Bin}(n+m, p)$$

$$X+Z = \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} Y_i = \sum_{i=1}^{n+m} Y_i \quad Y_i \text{ i.i.d. } P_{Y_i} = B(p)$$

$$\Downarrow \text{Bin}(n+m, p)$$

Fisso $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ spazio probabilizzato

Sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, P)$

Sia Y un'ulteriore v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, P)$

CONVERGENZA IN PROBABILITÀ

Dirò che $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge in probabilità alla v.a. Y se

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{i \rightarrow \infty} P(|X_i - Y| > \delta) = 0$$

CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA (o L^2)

Dico che $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge in media quadratica allo v.a. Y se

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |X_i(\omega) - Y(\omega)|^2 P(d\omega) = 0$$

$$E[(X_i - Y)^2]$$

CONVERGENZA P-QUASI CERTA (P-q.c.)

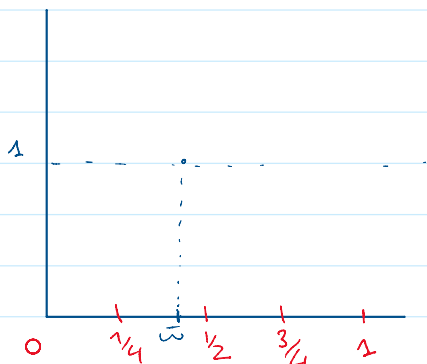
Dico che $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge P-quasi certamente allo v.a. Y se $\exists \Omega_0 \subseteq \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$, i.e. $\forall \omega \in \Omega_0$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i(\omega) = Y(\omega)$$

OSSERVAZIONE Se X_i converge a Y P-quasi certamente o in media quadratica, allora X_i converge a Y anche in probabilità.

$$(\Omega, \mathcal{E}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{L}^1)$$

$\mathcal{L}^1$ restrizione delle misure di Lebesgue
 $\forall A \in \mathcal{B}([0, 1])$
 $\mathcal{L}^1(A) = \mathcal{L}(A \cap [0, 1])$



$\omega \in [0, 1)$

$$X_1(\omega) = 1$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$X_3(\omega) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$P(X_1 = 0) = 0$$

$$\omega \in [0, 1/2)$$

$$\omega \in [1/2, 1]$$

$$P(X_2 = 0)$$

$$\omega \in [0, 1/2)$$

$$\omega \in [1/2, 1]$$

$$P(X_3 = 0)$$

$$1/2$$

$$X_4(\omega) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\omega \in [0, 1/4)$$

$$\omega \in [1/4, 1]$$

$$P(X_4 = 0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$X_5(\omega) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\omega \in [1/4, 1/2)$$

altrimenti

$$P(X_5 = 0) = \frac{3}{4}$$

$$X_6(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P(X_6=0) = \frac{3}{4}$$

$$X_7(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [\frac{3}{4}, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P(X_7=0) = \frac{3}{4}$$

$$P(X_8=0) = P(X_9=0) = \dots = P(X_{15}=0) = \frac{7}{8} \text{ ETC}$$

Costruisco una successione di v.a. X_i $P(X_i=0) \rightarrow 1$

$$P(|X_i - 0| > \delta) = P(X_i > \delta) = P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0)$$

$\rightarrow 1 - 1 = 0$
cioè $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge in probabilità alla v.a. $Y(\omega) \equiv 0$

LEMMA Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di v.a. su uno spazio probab. limitato ($\Omega \in \mathcal{P}$) tali che

- Le X_n sono a due a due scorrelate: $Cov(X_n, X_k) = 0$ $\forall n, k \in \mathbb{N} \quad X_n \neq X_k$
- Le X_n hanno tutte lo stesso valore atteso finito E :

$$E[X_n] = E \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Le varianze delle X_n sono equilimitate: $\exists C \in \mathbb{R}$ t.c. $Var[X_n] \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$

~~$$Var[X_n] = n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$~~

Considero $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$

Allora $P(|\bar{X}_n - E| > \delta) \leq \frac{C}{n\delta^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \delta > 0$

$$\int_{\Omega} |\bar{X}_n(\omega) - E|^2 P(d\omega) \leq \frac{C}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \leftarrow$$

DM $E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[X_k] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E =$
 ~~$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot E$~~ $E[\bar{X}_n] = E$

$$Var[\bar{X}_n] = Var\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n Var[X_k] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \text{Var}[X_k] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{\text{Cov}(X_i, X_j)}_{=0 \text{ per l.p.}} \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}[X_k] \stackrel{\text{A1}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n C = \frac{1}{n^2} n C = \frac{C}{n} \quad \text{Var}[\bar{X}_n] \leq \frac{C}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{C}{n}, \text{Var}[\bar{X}_n] &= \mathbb{E}[(\bar{X}_n - \underbrace{\mathbb{E}[\bar{X}_n]}_{=E})^2] = \mathbb{E}[(\bar{X}_n - E)^2] = \\
&= \int_{\Omega} |\bar{X}_n(\omega) - E|^2 \mathbb{P}(d\omega) \quad \leftarrow \text{come volevamo dimostrare}
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev applicata a $\bar{X}_n$:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \underbrace{\mathbb{E}[\bar{X}_n]}_{=E}| > \delta) \leq \frac{\text{Var}[\bar{X}_n] \leq C/n}{\delta^2}$$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - E| > \delta) \leq \frac{C}{n\delta^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \delta > 0$$

COROLLARIO (LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI)

Nelle stesse ipotesi del lemma precedente, la v.e. $\bar{X}_n$ converge in probabilità allo v.e. costante E e in media quadratica.

DIN Abbiamo visto che $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - E| > \delta) \leq \frac{C}{n\delta^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \delta > 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - E| > \delta) = 0 \quad \forall \delta > 0$$

Abbiamo visto che $\int_{\Omega} |\bar{X}_n(\omega) - E|^2 \mathbb{P}(d\omega) \leq \frac{C}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\bar{X}_n(\omega) - E|^2 \mathbb{P}(d\omega) = 0$$

TEOREMA (LEGGE FORTE DEI GRANDI NUMERI)

Nelle stesse ipotesi del lemma si può dimostrare che la v.e. $\bar{X}_n$ converge $\mathbb{P}$ -q.c. alla v.e. costante E (NO DIN)

ESEMPIO Sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ successione di v.e. i.i.d. =
independent:
identical:
distribution:

independent:
identically
distributed

ESEMPIO Sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ successione di v.a. i.i.d. =
con $P_{X_i} = U([0,1])$
Si può dimostrare che $P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq 1\right) = \frac{1}{n!}$

Voglio calcolare la probabilità che servano esattamente n addendi per raggiungere o superare il valore 1

$$\left\{ \sum_{i=1}^n X_i > 1, \sum_{i=1}^{n-1} X_i < 1 \right\} = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^n X_i > 1 \right\}}_A \setminus \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i > 1 \right\}}_B$$

$B \subseteq A$

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n X_i > 1, \sum_{i=1}^{n-1} X_i < 1\right) &= \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i > 1\right) - P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i > 1\right) = \\ &= \left(1 - P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq 1\right)\right) - \left(1 - P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i \leq 1\right)\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n!}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n-1)!}\right) = \cancel{1} - \frac{1}{n!} - \cancel{1} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{-1 + n}{n!} \\ &= \frac{n-1}{(n-2)! \cdot \cancel{(n-1)} \cdot n} = \frac{1}{n(n-2)!} \quad n > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{serve 1 addendo}) &= \\ &= P(X_1 = 1) = 0 \end{aligned}$$

E' la probabilità che servano esattamente n addendi per raggiungere o superare il valore 1

$$\begin{aligned} E\left[\# \text{ addendi necessari ad ottenere somma } > 1\right] &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(\text{servano esattamente } n \text{ addendi}) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{n(n-2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e \quad j = n-2 \end{aligned}$$

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} + R_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x=1 \Rightarrow e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

$$\{X_i^j\}_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ j=1-N}} \quad \text{i.i.d} \quad \mathbb{P}_{X_i^j} = U([0,1])$$

Per ogni $j=1-N$ $T_j(\omega) := \min\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n X_i^j(\omega) \geq 1\}$

$\{T_j\}_{j=1-N}$ sono indipendenti e $\mathbb{E}[T_j] = e$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_j^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathbb{P}(T_j=n) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \mathbb{P}(T_j=n) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot \frac{1}{(n-2)! \cdot n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-2)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} \frac{n}{(n-2)!} &= 2 + \sum_{n \geq 3} \frac{n-2+2}{(n-2)!} = 2 + \sum_{n \geq 3} \left(\frac{n-2}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-2)!} \right) \\ &= 2 + \sum_{\substack{n \geq 3 \\ j=n-3}} \frac{1}{(n-3)!} + 2 \sum_{n \geq 3} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} + 2 \left(1 + \sum_{\substack{n \geq 3 \\ j=n-2}} \frac{1}{(n-2)!} \right) \end{aligned}$$

$$= e + 2 \left(1 + \sum_{\substack{j \geq 1 \\ \frac{1}{0!}}} \frac{1}{j!} \right) = e + 2 \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} = e + 2e = 3e$$

$$\text{Var}[T_j] = \mathbb{E}[T_j^2] - (\mathbb{E}[T_j])^2 = 3e - e^2 = e(3-e) \quad \text{e} < \infty$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T_j(\omega)$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T_j - e\right| > \delta\right) \leq \frac{e(3-e)}{N\delta^2}$$

APPLICAZIONI DELLA LEGGE DEI GRANDI NUMERI

$(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ μ misura di probabilità su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

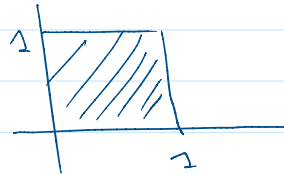
$f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-misurabile e limitata $|f(t)| \leq M$
 $\forall t \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(t) \mu(dt)$$

$$t = (t_1, \dots, t_N)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(t_1, \dots, t_N) \mu(dt_1, \dots, dt_N)$$

$$Q = [0, 1]^N$$



$$\int_Q f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = \text{integrate di Lebesgue su } Q$$

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \quad \mu(A) := \mathcal{L}^N(A \cap Q)$$

La misura di Lebesgue

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ successione di v.a.

$$X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \text{ sono i.i.d.} \quad \mathbb{P}_{X_i} = \mu$$

$$Y_i := f \circ X_i \quad Y_i \text{ è una v.a.} \quad Y_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

le Y_i sono i.i.d.

$$\mathbb{E}[|Y_i|] = \int_{\Omega} |f \circ X_i(\omega)| \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} |f(t)| \underbrace{\mathbb{P}_{X_i}(dt)}_{\mu(dt)}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} M \mu(dt) = M \int_{\mathbb{R}^N} 1 \mu(dt) =$$

$$= M \mu(\mathbb{R}^N) = M \cdot 1 = M$$

$$\mathbb{E}[Y_i] = \int_{\Omega} f \circ X_i(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t) \underbrace{\mathbb{P}_{X_i}(dt)}_{\mu(dt)} = \int_{\mathbb{R}^N} f(t) \mu(dt)$$

Pongo $I := \int_{\mathbb{R}^N} f(t) \mu(dt)$, so che $\mathbb{E}[Y_i] = I$

$$\text{Var}[Y_i] = \int_{\Omega} |Y_i(\omega) - I|^2 \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} |f \circ X_i(\omega) - I|^2 \mathbb{P}(d\omega)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (f(t) - I)^2 \underbrace{\mathbb{P}_{X_i}(dt)}_{\mu(dt)} = \int_{\mathbb{R}^N} (f(t) - I)^2 \mu(dt)$$

$$|f(t) - I|^2 = f^2(t) - 2f(t)I + I^2 \leq M^2 + 2|f(t)||I| + I^2$$

$$\leq M^2 + 2M|I| + I^2 \leq M^2 + 2M \cdot M + M^2 = 4M^2$$

$$|I| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(t) \mu(dt) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(t)| \mu(dt) = M$$

$$\text{Var}[Y_i] \leq 4M^2$$

$$S_n := \sum_{i=1}^n Y_i \quad \bar{Y}_n := \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

$\bar{Y}_n$ converge $\mathbb{P}$ -qc, in media quadratica e in probabilità
a $\mathbb{E}[Y_i] = I := \int_{\mathbb{R}^N} f(t) \mu(dt)$

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - I| \geq \delta) \leq \frac{4M^2}{n\delta^2} \quad \forall \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - I| < \delta) \geq 1 - \frac{4M^2}{n\delta^2} \quad \forall \delta > 0$$

p.es. $\delta = 10^{-2}$ $\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - I| < \delta) \geq 2 \in (0, 1)$

Devo scegliere n in modo che $1 - \frac{4M^2}{n\delta^2} \geq 2$

$$1 - \alpha \geq \frac{4M^2}{n\delta^2} \quad n\delta^2 \geq \frac{4M^2}{1-\alpha} \quad n \geq \frac{4M^2}{\delta^2(1-\alpha)}$$

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0) = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{(0, 1/2)}(x) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2 \mathbb{1}_{(0, 1/2)}(x) dx \quad \text{densità di } U([0, 1/2])$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \mu(dx) \quad \mu = U([0, 1/2])$$

$$\frac{\pi}{6} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \mu(dx) \quad \mu = U([0, 1/2])$$

$$\pi = \int_{\mathbb{R}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \mu(dx) \quad \mu = U([0, \frac{1}{2}])$$

$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ successione di v.a. i.i.d su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
 con $\mathbb{P}_{X_i} = U([0, \frac{1}{2}])$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{3}{\sqrt{1-X_i^2(\omega)}} \text{ converge } \mathbb{P}\text{-q.c. in media quadratica e in probabilità a } \pi$$