

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \quad \text{con } X \text{ v.a. su sp. probabilit  (}\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\text{)}$$

Se $X \in \mathcal{L}^1$, $\mathbb{P}(X=+\infty) = \mathbb{P}(X=-\infty) = 0$, allora $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$

$$\text{dove } \mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X \in A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{l.c.} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

prende f v.a. su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$

FUNZIONE DI BOREL
FUNZIONE BOREL-MISURABILE

Se f   non negativa $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$,

ed   di Borel $\Rightarrow$   ben definito $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{P}_X(dx)$

Sia X v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funzione di Borel

Allora $f \circ X: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   una v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Supponiamo che f sia non negativa $\Rightarrow f \circ X$   una v.a. non negativa su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \Rightarrow$   ben definito

$$\mathbb{E}[f \circ X] := \int_{\Omega} f(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{P}_X(dx) \quad \leftarrow$$

si pu  dimostrare

$$\bullet \quad f(x) = x^+ := \max\{x, 0\} \quad f \circ X = X^+$$

$$\mathbb{E}[X^+] = \int_{\mathbb{R}} \max\{x, 0\} \mathbb{P}_X(dx)$$

$$\bullet \quad f(x) = x^- = \max\{-x, 0\} \quad f \circ X = X^-$$

$$\mathbb{E}[X^-] = \int_{\mathbb{R}} \max\{-x, 0\} \mathbb{P}_X(dx)$$

$$\text{Se } X \text{   integrabile} \Rightarrow \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-] = \int_{\mathbb{R}} \max\{x, 0\} \mathbb{P}_X(dx) - \int_{\mathbb{R}} \max\{-x, 0\} \mathbb{P}_X(dx)$$

$$\mathbb{E}[X] := \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-] = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(\max\{x, 0\} - \max\{-x, 0\})}_{= x} \mathbb{P}_X(dx)$$

$$E[X] := E[X^+] - E[X^-] = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(\max\{x, 0\} - \max\{-x, 0\})}_{=x \quad \forall x \in \mathbb{R}} P_X(dx)$$

Se X è integrabile $\Rightarrow E[X] = \int_{\mathbb{R}} x P_X(dx)$

V.A. A DISTRIBUZIONE DISCRETA

Sono v.a. X T.c. la distribuzione P_X è concentrata su un insieme discreto cioè $\exists \{t_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ con $\mathcal{J}$ finito $= \{1, \dots, N\}$
o numerabile $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$

$$P_X\left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\}\right) = 1$$

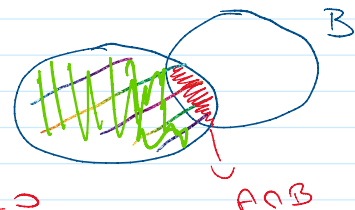
$$P\left(X \in \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\}\right) = 1$$

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P_X(A) = P_X\left(A \cap \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\}\right) + \underbrace{P_X\left(A \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\}\right)}_{=0}$$

$$A = \left(A \cap \left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\}\right)\right) \cup \left(A \setminus \left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\}\right)\right)$$

$$A \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\}$$

$$P_X\left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\}\right) = 1 \quad P_X\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\}\right) = 0$$



$$\begin{aligned} P_X(A) &= P_X\left(A \cap \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{t_j\}\right) = P_X\left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} (A \cap \{t_j\})\right) = \sum_{j \in \mathcal{J}} P_X(A \cap \{t_j\}) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{J}: t_j \in A} P_X(\{t_j\}) \end{aligned}$$

$$p_j := P_X(\{t_j\}) = P(X = t_j)$$

$$\begin{cases} p_j > 0 \\ \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j = 1 \end{cases}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = P_X((-\infty, t]) = \sum_{j \in \mathcal{J}: t_j \leq t} P_X(\{t_j\}) = \sum_{j \in \mathcal{J}: t_j \leq t} p_j$$

CASO PARTICOLARE: $\mathcal{J}$ è un insieme finito $= \{1, \dots, N\}$ $\Rightarrow$ la v.a. X è una funzione semplice $\Rightarrow E[X] := \sum_{j=1}^N t_j P(X = t_j) = \sum_{j=1}^N t_j p_j \leftarrow$

Se $\mathcal{J}$ è numerabile $= \mathbb{N}$ e X è integrabile $\Rightarrow E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} t_j p_j$
In che $E[|X|] = \sum_{j=1}^{\infty} |t_j| p_j$

$$\text{Si ha } E[|X|] = \sum_{j=1}^{\infty} |t_j| p_j$$

$$j=1, \dots, \infty$$

Inoltre, se $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione di Borel non negativa,

$$E[\varphi \circ X] = \sum_{j \in J} \varphi(t_j) p_j$$

CASO FINITO

$$p_1, p_2, \dots, p_N \quad p_j \geq 0 \quad \sum_{j=1}^N p_j = 1$$

$(p_1, p_2, \dots, p_N) \leftarrow$ vettore delle densità

CASO NUMERABILE ($\mathbb{N}$)

$$\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}} \quad p_j \geq 0 \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j = 1$$

V.A. CON DISTRIBUZIONE ASSOLUTAMENTE CONTINUA (A.C.)

Una v.a. X si dice avere distribuzione P_X assolutamente continua se $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ sommissibile secondo Lebesgue T.c.

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P_X(A) = \int_A f(x) dx$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
misurabile secondo
Lebesgue e

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty$$

N.B. $1 = P(X \in \mathbb{R}) = P_X(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P_X((-\infty, t]) = \int_{(-\infty, t]} f(x) dx = \int_{-\infty}^t f(x) dx \leftarrow$$

$\Rightarrow F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua

$$\Rightarrow P(X=t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

F_X è discontinua
in $\bar{t}$ sse
 $P(X=\bar{t}) \neq 0$

Se $\bar{t} \in \mathbb{R}$ e f è continua in $\bar{t} \Rightarrow F_X'(\bar{t}) = f(\bar{t})$

f è la densità della distribuzione P_X

$$P_X = f(x) dx$$

Se $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ funzione di Borel non negativa e se X v.a. con distribuzione a.c. $P_X = f(x) dx$

$$\text{Allora } E[\varphi \circ X] = \int_{\Omega} (\varphi \circ X)(\omega) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx$$

In particolare, se $E[X]$ esiste $\Rightarrow$

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

FORMULA DI CAVALIERI Se X è una v.v. sommatile

$$E[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t)) dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t) dt$$

VARIANZA

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio probabilizzato, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.v. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

T.c. $E[X]$ esiste ed è finito $\Rightarrow$

$E[(X - E[X])^2]$ è ben definito. Lo chiamo **VARIANZA di X**
 $Var[X]$

PROPRIETÀ

$$1) Var[X] \geq 0$$

$$2) Var[X] = 0$$

$$3) Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$4) \text{Siano } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow Var[\alpha X + \beta] = \alpha^2 Var[X]$$

SSE $\exists \Omega_0 \subset \Omega$ $P(\Omega_0) = 1$

T.c. $X(\omega) = c \quad \forall \omega \in \Omega_0$

(X è P-q.c. costante)

$$c = E[X]$$

SCARTO QUADRATICO MEDIO $\sigma(X) := \sqrt{Var[X]}$

DISUGUAGLIANZA DI MARKOV

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio probabilizzato, Sia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.v. e ne $I \subset \mathbb{R}$ intervallo T.c. $X(\Omega) \subseteq I$ e ne $f: I \rightarrow [0, +\infty]$ funzione di Borel crescente e non negativa

$$\forall t \in I \quad f(t) P(X > t) \leq E[f \circ X]$$

DIM $f(t) P(X > t) =$

$$= f(t) \int_{\Omega} 1_{\{X > t\}}(\omega) P(d\omega) =$$

$$E[1_{\{X > t\}}] = P(X > t)$$

$$= f(t) \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X > t\}}(\omega) P(d\omega) =$$

$$\int_{\Omega} \underbrace{f(t) \mathbb{1}_{\{X > t\}}(\omega)}_{\leq f(X(\omega))} P(d\omega) \leq$$

$$\leq \int_{\Omega} (f \circ X)(\omega) P(d\omega) = \mathbb{E}[f \circ X]$$

$\lambda > 0$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{X(\omega) > t} f(t) \mathbb{1}_{\{X > t\}}(\omega) = f(t) \\ &\xrightarrow{X(\omega) \leq t} f(X(\omega)) > f(t) \end{aligned}$$

$$X(\omega) \leq t$$

$$f(t) \mathbb{1}_{\{X > t\}} = 0$$

$$f(X(\omega)) \geq 0$$

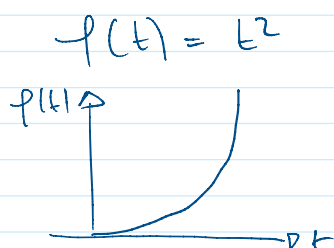
DISUGUAGLIANZA DI CHEBYCHEV

Sia X v.a. sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

T.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito. Allora

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

DM Applica Markov con $Y = |X - \mathbb{E}[X]|$, $I = [0, +\infty)$



$$\begin{aligned} t^2 P(|X - \mathbb{E}[X]| > t) &\leq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &=: \text{Var}[X] \end{aligned}$$

V.A. CON DISTRIBUZIONE DI BERNOLLI DI PARAMETRO p

$\text{Ber}(p)$ è una distribuzione concentrata su $\{0, 1\}$

$$p := P(X=1) \quad \Rightarrow \quad P(X=0) = 1 - P(X=1) = \underline{1-p} \quad p \in [0, 1]$$

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) = p$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p) \leq \frac{1}{4} \quad \left(\begin{array}{l} = \frac{1}{4} \\ \text{se} \\ p = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

V.A. CON DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO

$$\lambda > 0 \quad \text{Exp}(\lambda)$$

È la distribuzione c.c. con densità $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$$1) \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \cancel{f(x)} dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx =$$

$$1) f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = -0 + 1 = 1$$

$$2) F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

$$t \leq 0 \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty, t)$$

$$t > 0 \quad f(x) = 0 \quad x \leq 0$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad 0 \leq x \leq t$$

$$t \leq 0 \quad F_X(t) = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0$$

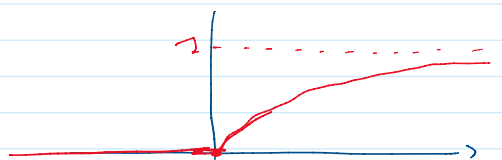
$$t > 0 \quad F_X(t) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{x=t} =$$

$$= -e^{-\lambda t} + 1$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

$$t \leq 0$$

$$t > 0$$



MANCANZA DI MEMORIA

Sia X T.c. $P_X = \text{Exp}(\lambda)$

$$t, s \geq 0 \quad P(X \leq t+s | X \geq t) = \frac{P(X \leq t+s, X \geq t)}{P(X \geq t)} =$$

$$= \frac{P(X \leq t+s) - P(X \leq t)}{1 - P(X \leq t)} = \frac{(1 - e^{-\lambda(t+s)}) - (1 - e^{-\lambda t})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t - \lambda s}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda s})}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s} = F_X(s) = P(X \leq s)$$

Se $P_X = \text{Exp}(\lambda) = 0$

$$\forall t, s \geq 0 \quad P(X \leq t+s | X \geq t) = P(X \leq s) \quad (\text{PROPRIETÀ DI MANCANZA DI MEMORIA})$$

TEOREMA (no dim) Sia X v.e. non negativa T.c. $P(X=0) < 1$
 Sono fatti equivalenti:

1) X è priva di memoria (0)

$$2) P(X \leq t+s | X \geq t) = P(X \leq s) \quad \forall t, s \geq 0$$

3) P_X è esponenziale.

In questo caso $\lambda = -\ln(1 - F_X(0))$

PROPRIETÀ Se $P_X = \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda}$ $\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{x}_{g} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{g'} dx = x(-e^{-\lambda x}) \Big|_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = -\frac{1}{\lambda} (0 - 1) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^2}_{g} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{g'} dx = x^2(-e^{-\lambda x}) \Big|_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx$$

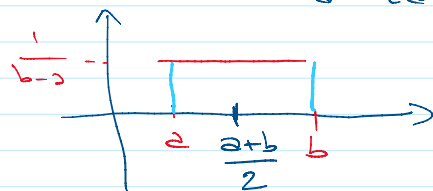
$$= 0 - 0 - \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = -\frac{2}{\lambda} E[X] = -\frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = -\frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

DISTRIBUZIONE UNIFORME SU $[a, b]$ $U([a, b])$

È la distribuzione A.C. $P_X = f(x) dx$ con $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$

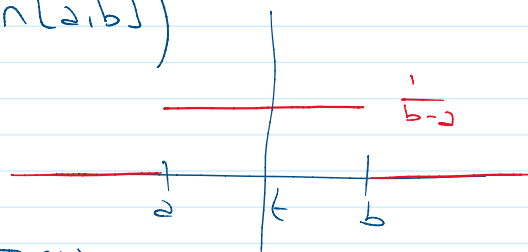
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \frac{1}{b-a} (b-a) = 1$$

$A \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ $P_X(A) = \frac{1}{b-a} \mathcal{L}^1(A \cap [a, b])$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



$$t < a \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty, t) \quad F_X(t) = 0$$

$$a \leq t \leq b \quad f(x) = 0 \quad x \in (-\infty, a)$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad x \in [a, t]$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^t \frac{1}{b-a} dx$$

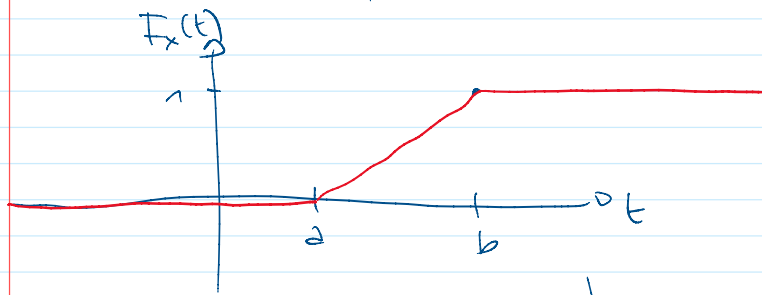
$$= \frac{1}{b-a} (t-a)$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \end{cases}$$

$$F_X(t) = 1 \quad \forall t > b$$

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$$

$$F_X(b) = 1 \quad \forall t \geq b$$



$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{12} (b-a)^2 \quad \text{Dimostrare per esercizio}$$

V.A. A VALORI VETTORIALI

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione

$$X: \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}^n$$

$$X: \omega \in \Omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n$$

Dico che X è una v.e. vettoriale (una v.e. multivariata) se
 $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \{X \in A\} \in \mathcal{E}$

Si dimostra che X è una v.e. multivariata sse tutte le sue componenti sono v.e. scalari.

Quindi se X è una v.e. multivariata, allora può ben definire le distribuzioni $\mathbb{P}_{X_1}, \mathbb{P}_{X_2}, \dots, \mathbb{P}_{X_n}$ su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Si dicono DISTRIBUZIONI MARGINALI DI X

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ posso considerare $\mathbb{P}(X \in A) = 0$ è ben definita

$$\mathbb{P}_X: A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{P}(X \in A)$$

Si può dimostrare che $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato. $\mathbb{P}_X$ si dice DISTRIBUZIONE di X

probabilizzato. $\mathbb{P}_X$ è la DISTRIBUZIONE di X
DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DI $X_1, X_2, \dots, X_n$.

LEGGE CONGIUNTA

$$F_X: (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n) \in [0, 1]$$

$n=2$ $(X, Y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

Siano X e Y v.e. real. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ T.c. $\mathbb{E}[X]$ ed $\mathbb{E}[Y]$ esistono finiti.

Definisco COVARIANZA di X e Y e intendo $\text{Cov}(X, Y)$
$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

PROPRIETÀ 1) Se $\text{Var}[X]$ e $\text{Var}[Y]$ sono finiti. $\rightarrow$
$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}$$

2) $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

3) $\text{Var}[X+Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$

4) Se $X_1, \dots, X_n$ sono v.e. con valore atteso finito

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

EVENTI INDIPENDENTI

DEF Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e siano $A, B \in \mathcal{E}$.

Diciamo che A e B sono indipendenti se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

N.B. $\mathbb{P}(B) > 0$ $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$

DEF Siano $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$. Diciamo che $A_1, \dots, A_n$ è una famiglia di eventi indipendenti se $\forall k=2, \dots, n$ e $\forall A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ delle famiglie distinte due a due $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(A_{i_j})$

V.A. INDIPENDENTI

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio probabilizzato e siano $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ v.a. su questo spazio. Dico che X e Y sono indipendenti se

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ e } \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

cioè $P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$

Se X e Y sono v.a. indipendenti $\Rightarrow F_{X,Y}(s,t) = F_X(s)F_Y(t)$

OSSERVAZIONE Se $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono v.a. $\forall s, t$ indipendenti e aventi valore atteso finito, allora si può dimostrare che $E[XY] = E[X]E[Y]$

Di conseguenza $Cov(X,Y) = 0$

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$$

Siano $X_1, \dots, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Dico che $X_1, \dots, X_n$ è una famiglia finita di v.a. indipendenti se $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2) \dots P(X_n \in A_n)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

Una famiglia numerabile $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di v.a. si dice una famiglia di v.a. indipendenti se ogni sua sottofamiglia finita lo è.