

<http://www.dma.unifi.it/~poggiolini/didattica/2020-21-MetMat.php>

[MP] Giuseppe Modica, Laura Poggiolini *Note di Calcolo delle Probabilità. Seconda edizione.* Pitagora Editrice.

[Bre] Pierre Brémaud *Probability Theory and Stochastic Processes* Springer UTX

[Pri] Nicolas Privault *Understanding Markov Chains.* Springer SUMS

- 1 Argomenti di probabilità elementare
- 2 Catene di Markov a Tempo discreto e a Tempo continuo
- 3 Stocastica

— o —

$\Omega \neq \emptyset$ insieme non vuoto

$\mathcal{P}(\Omega) :=$ famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω

INSIEME DELLE PARTI DI Ω

DEF $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ si dice una σ -algebra di Ω se

- 1 $\emptyset \in \mathcal{E}$
- 2 Se $A \in \mathcal{E} \Rightarrow \Omega - A \in \mathcal{E} \quad A^c := \Omega - A$
- 3 Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$

PROP Se $\mathcal{E}$ è una σ -algebra di Ω , allora $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ si ha $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$

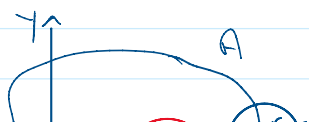
Se $\mathcal{E}$ è una σ -algebra e $A \in \mathcal{E}$, A si dice un EVENTO (DELLA σ -ALGEBRA $\mathcal{E}$)

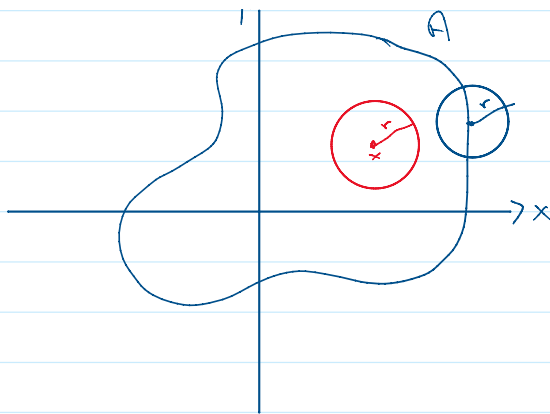
PROP Sia $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$ una qualsiasi famiglia di σ -algebra di Ω ,
Allora la famiglia $\{A \subset \Omega : A \in \mathcal{E}_i \quad \forall i \in I\}$ è ancora una σ -algebra di Ω .
La si indica $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$.

DEF Sia $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una qualsiasi famiglia di sottoinsiemi di Ω .
Chiamo σ -algebra generata da $\mathcal{D}$ e indico col simbolo $\sigma(\mathcal{D})$
 $\bigcap \{ \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{E} \supseteq \mathcal{D} \text{ ed } \mathcal{E} \text{ è una } \sigma\text{-algebra di } \Omega \}$

DEF La σ -algebra di $\mathbb{R}^n$ generata dalle famiglie degli aperti di $\mathbb{R}^n$ si dice σ -algebra di Borel di $\mathbb{R}^n$, si indica $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

N.B. $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice APERTO se $\forall x \in A \quad \exists r > 0$ t.c. la palla centrata in x e raggio r è tutta contenuta in A .
 $\forall x \in A \quad \exists r = r(x) > 0$ t.c. $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\} \subset A$
 $n = 2$





Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una σ -algebra di Ω

Sia $P: A \in \mathcal{E} \mapsto P(A) \in [0, +\infty]$

Si dice che P è una MISURA sulla σ -algebra $\mathcal{E}$ se:

1. $P(\emptyset) = 0$

2. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \mathbb{N} : i \neq j$, si ha $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Se inoltre $P(\Omega) = 1$, allora si dice che P è una (misura di) PROBABILITÀ sulla σ -algebra $\mathcal{E}$ e la Terza $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ si dice uno SPAZIO DI PROBABILITÀ (o SPAZIO PROBABILIZZATO)

PROPRIETÀ ELEMENTARI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato - Allora:

1. $P(A) \in [0, 1] \quad \forall A \in \mathcal{E}$

2. Se $A, B \in \mathcal{E}$ sono T.c. $A \subseteq B$, allora $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
e $P(A) \leq P(B)$

3. Se $A, B \in \mathcal{E}$, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4. Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, allora $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

DEF Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio di probabilità -

Ω si dice EVENTO CERTO

Se $A \in \mathcal{E}$ e $P(A) = 1$, A si dice EVENTO QUASI CERTO

$\emptyset$ si dice EVENTO IMPOSSIBILE

Se $A \in \mathcal{E}$ e $P(A) = 0$, A si dice EVENTO QUASI IMPOSSIBILE

DEF Sia $\mathcal{D}$ insieme finito o numerabile e sia $\{D_i\}_{i \in \mathcal{D}}$ una famiglia di eventi ($D_i \in \mathcal{E} \quad \forall i \in \mathcal{D}$)

Se 1. $\bigcup_{i \in \mathcal{D}} D_i = \Omega$

2. $D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \mathcal{D} \text{ T.c. } i \neq j$

si dice che la famiglia $\{D_i\}_{i \in \mathcal{D}}$ è una PARTIZIONE di Ω in EVENTI

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato e sia $\{D_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ una partizione (finita o numerabile) di Ω in eventi.

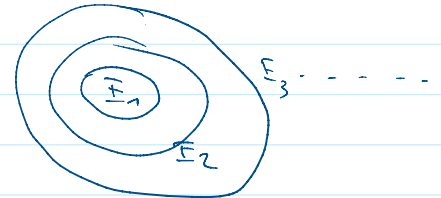
$$\text{Allora } \forall A \in \mathcal{E} \quad P(A) = \sum_{i \in \mathbb{I}} P(A \cap D_i)$$

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA MISURA)

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ spazio probabilizzato e sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di eventi.

1. Se $E_i \subseteq E_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$, allora

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(E_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} P(E_i)$$



2. Se $E_i \supseteq E_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$, allora

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(E_i) = \inf_{i \in \mathbb{N}} P(E_i)$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ t.c. $P(B) > 0$

Per ogni $A \in \mathcal{E}$ definisco $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ PROBABILITÀ DI A DATO B
PROBABILITÀ DI A
CONDITIONATA DA B

PROPOSIZIONE Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ t.c.

$P(B) > 0$ - Considero la funzione

$$P_B: A \in \mathcal{E} \mapsto P(A|B) \in [0, 1]$$

Allora $(\Omega, \mathcal{E}, P_B)$ è uno spazio probabilizzato e

$$P_B(A) = 1 \quad \forall A \in \mathcal{E} \text{ t.c. } A \supseteq B$$

$$P_B(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{E} \text{ t.c. } A \cap B = \emptyset$$

Se $P(B) = 0$, $P(A|B)$ non è ben definito può rianimamente $P(A \cap B) = 0$

Se $P(B) > 0$ sappiamo che $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Allora, se $P(B) = 0$, interpreto il prodotto $P(A|B)P(B)$ come uno zero con è rianimamente uguale a $P(A \cap B)$.

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ spazio probabilizzato, sia $\{D_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ una partizione finita o numerabile di Ω in eventi. Allora

$$P(A) = \sum_{i \in \mathbb{I}} P(A \cap D_i) = \sum_{i \in \mathbb{I}} P(A|D_i)P(D_i) \quad \forall A \in \mathcal{E}$$

FORMULA DI BAYES Se $A, B \in \mathcal{E}$ e $P(A)P(B) > 0$, allora

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

VARIABILI ALEATORIE

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato e sia $X: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} (= \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\})$.
Diciamo che X è una **VARIABILE ALEATORIA (v.a.)** su $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ se

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{ \omega \in \Omega : X(\omega) \leq t \} \in \mathcal{E}$$

$$X^{-1}([-\infty, t]) = \{X \leq t\}$$

PROPOSITION 1 Sia $X: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ con $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ spazio probabilizzato.
Sono condizioni equivalenti:

1. X è una v.a.
2. $\{X > t\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
3. $\{X < t\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
4. $\{X \geq t\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
5. $\{X = +\infty\} \in \mathcal{E}, \{X = -\infty\} \in \mathcal{E}$ e $\{X \in A\} \in \mathcal{E} \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Se X è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, P)$, allora $\forall t \in \mathbb{R}$ è ben definita $P(X \leq t)$ perché $\{X \leq t\} \in \mathcal{E}$

Quindi è ben definita la funzione $F_X: t \in \mathbb{R} \mapsto P(X \leq t) \in [0, 1]$

F_X si dice **LESSE DI X**

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI X

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA DI X

PROPRIETÀ La legge F_X di una v.a. X gode delle seguenti proprietà:

1. F_X è monotona non decrescente
 $\forall s, t \in \mathbb{R} \quad s < t \quad \text{si ha} \quad F_X(s) \leq F_X(t)$

2. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = P(X = -\infty)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1 - P(X = +\infty)$$

3. F_X è continua da destra: $\lim_{s \rightarrow t^+} F_X(s) = F_X(t)$ cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{T.c.} \quad \forall s \in (t, t + \delta), \quad |F_X(s) - F_X(t)| < \varepsilon$$

4. $\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{s \rightarrow t^-} F_X(s) = F_X(t) - P(X = t)$

5. Se $t \in \mathbb{R}$, allora F_X è continua in t sse $P(X = t) = 0$

6. $\{t \in \mathbb{R} : P(X = t) > 0\}$ è un insieme al più numerabile

5. Se $t \in \mathbb{R}$, allora F_X è continua in t sse $P(X=t)=0$

6. $\{t \in \mathbb{R} : P(X=t) > 0\}$ è un insieme al più numerabile

Per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\underbrace{P(X \in A)}_{\in \mathcal{E}}$ è ben definito - Considero la funzione

$$P_X: A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto P(X \in A) \in [0, 1]$$

Si può dimostrare che P_X è una misura su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ed è una misura di probabilità sse $P(X=+\infty)=P(X=-\infty)=0$

LAVORIAMO SEMPRE con L'IPOTESI $P(X=+\infty)=P(X=-\infty)=0$

Quindi $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ è uno spazio di probabilità -

La probabilità P_X si chiama DISTRIBUZIONE DELLA v.a. X

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P(X = -\infty) + P(X \in (-\infty, t]) = P_X((-\infty, t])$$

infatti $\{X \leq t\} = \{X = -\infty\} \cup \{X \in (-\infty, t]\}$ e $P(X = -\infty) = 0$

Quindi nota la distribuzione, conosco la legge. Si può dimostrare che se conosco la legge, allora conosco la distribuzione -

INTEGRAZIONE DI V.A.

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ spazio probabilizzato e sia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a.

Dico che X è una funzione semplice se assume solo un numero finito di valori
 $X(\Omega) = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$

$$c_i \in X(\Omega) \Rightarrow \{X = c_i\} \in \mathcal{E} \quad \text{infatti} \quad \{X = c_i\} = \underbrace{\{X \leq c_i\}}_{\in \mathcal{E}} \cap \underbrace{\{X > c_{i-1}\}}_{\in \mathcal{E}}$$

Si può scrivere

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$$

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

$A \in \mathcal{E}$ fissato

DM:

Le famiglie $\{E_i\}_{i=1}^N$ è una partizione di Ω in eventi:

Se $\omega \in \Omega$ so che $\exists!$ $i \in \{1, \dots, N\}$ T.c. $X(\omega) = c_i = v$

$$\begin{aligned} \exists! i \in \{1, \dots, N\} \text{ T.c. } \omega \in E_i &\Rightarrow \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) = c_i \underbrace{\mathbb{1}_{E_i}(\omega)}_{=1} + \sum_{i \neq i} c_i \underbrace{\mathbb{1}_{E_i}(\omega)}_{=0} \\ &= c_i \cdot 1 + 0 = c_i = X(\omega) \end{aligned}$$

de dipende da ω

Sia dunque $X(\omega) = \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$ funzione semplice

Definisco

$$\int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) := \sum_{i=1}^N c_i P(E_i) = \sum_{i=1}^N c_i P(X = c_i)$$

Questa quantità si dice anche VALORE ATTESO o SPERANZA MATEMATICA DI X RISPETTO ALLA PROBABILITÀ P e si indica $E[X]$ -

Questa quantità si dice anche VALORE ATTESO o SPERANZA MATEMATICA DI X RISPETTO ALLA PROBABILITÀ $\mathbb{P}$ e si indica $\mathbb{E}[X]$.

Sia $X: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ v.e. nonnegativa su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Definisco

$$\mathbb{E}[X] := \sup \left\{ \mathbb{E}[\gamma] : \begin{array}{l} \gamma \text{ funzione semplice su } (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ \text{T.c. } 0 \leq \gamma(\omega) \leq X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\}$$
$$\int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

Sia $X: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ v.e. qualsiasi su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

PARTE POSITIVA DI X $X^+(\omega) := \max \{0, X(\omega)\}$

PARTE NEGATIVA DI X $X^-(\omega) := \max \{0, -X(\omega)\}$

Si può dimostrare che X^+ e X^- sono v.e. non negative su X

Sono quindi ben definiti $\mathbb{E}[X^+]$ e $\mathbb{E}[X^-]$

Inoltre

$$X^+ + X^- = |X| \quad \text{e} \quad X^+ - X^- = X$$

Se almeno uno tra $\mathbb{E}[X^+]$ e $\mathbb{E}[X^-]$ è finito, dico che la v.e. X è INTEGRABILE (rispetto a $\mathbb{P}$) e pongo

$$\mathbb{E}[X] := \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$$

Se $\mathbb{E}[X^+]$ e $\mathbb{E}[X^-]$ sono entrambi finiti, dico che la v.e. X è sommabile (rispetto a $\mathbb{P}$)

PROPRIETÀ Sia X v.e. su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - Sono equivalenti:

1. X è sommabile
2. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito
3. $\mathbb{E}[|X|]$ è finito

LEMMA DI BEPPO LEVI

Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione monotona nondecrecente di v.e. nonnegative: $0 \leq X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \dots \leq X_i(\omega) \leq X_{i+1}(\omega) \leq \dots \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$$\text{Sia } X(\omega) := \lim_{i \rightarrow \infty} X_i(\omega) = \sup_{i \in \mathbb{N}} X_i(\omega)$$

Allora X è una v.e. su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_i] = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X_i]$$

TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE

Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{F})$

Supponiamo $\exists \Omega_0 \subseteq \Omega$ evento quasi-certo t.c.

1. $\forall \omega \in \Omega \quad \exists \lim_{i \rightarrow \infty} X_i(\omega) =: X(\omega)$

2. $\exists \gamma: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ v.a. sommabile t.c. $|X_i(\omega)| \leq \gamma(\omega)$
 $\forall i \in \mathbb{N}$ e $\forall \omega \in \Omega_0$

Allora • X è una v.a. sommabile

• $E[X] = \lim_{i \rightarrow \infty} E[X_i]$